புள்ளியியல் முறைகள் - II

மில்ஸ் (எஃப் ஸி)

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—97

புள்ளியியல் முறைகள்–II

(Statistical Methods-II)

ஆசிரியர் :
எஃப். சி. மில்ஸ்

தமிழாக்கம் :
K. R. ராஜகோபாலன், B.SC. (HONS.),
விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை,
சென்னைக் கிறித்துவக் கல்லூரி, தாம்பரம்.



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழ்நாடு - அரசாங்கம்

First Edition—March, 1966

B.T.P. No. 97

STATISTICAL METHODS

F. C. MILLS

Translation

K. R. RAJAGOPALAN

Price Rs. 14-00

This translation of Statistical Methods by F. C. Mills, Third Edition is published by arrangements with Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York.

Printed by

Muthukumaran Press,
14-A, Kuppier Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

(திரு. எம். பக்தவத்ஸலம், தமிழக முதலமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஆறு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்துவருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே திருப்திகரமாக நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புள்ளியியல் முறைகள்-II' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 97ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இது வரை 132 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலையாசனத்தில் அமர்ந்துள்ளாள். எனவே, இவ் அன்னையை வாழ்த்துவோமாக. உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

எம். பக்தவத்ஸலம்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

APPENDIX TABLE

பாகம் II

11. காலத் தொடர்வரிசைகளின் ஆய்வு: பருவகால ஏற்ற இறக்கங்களை அளவிடுதல்.

காலத் தொடர்வரிசைகளை ஆராய்வதில் நிகழும் பல சிக்கல்களில் நெடுங்காலப் போக்கைக் கணக்கிடுவதும் ஒன்று. அந்தத் தொடர்வரிசைகள், காலச் சுழற்சியுடைய, மற்றும் சுமாரான காலச்சுழற்சியுடைய (periodic and semi-periodic) பருவகாலச் சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களைப் பெற்றிருக்கக்கூடும் என்பதனை முன்பே கூறியுள்ளோம். இவைகளை ஆராய்ச்சியாளர் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டியிருக்கலாம். இவைகளில் முதலாவதைப்பற்றி இவ்வதிகாரத்தில் கூறுவோம்.

பருவகால அசைவுகள் எங்கும் பரவியுள்ளன: பொருளாதாரத் தொடர்வரிசைகளில் பருவகால மாற்றங்கள் ஏற்படுவது உண்மையான காலச்சுழற்சியுடையவைகள் என்பது வெளிப்படை. சூரியனைச் சுற்றி பூமி செல்லும்பொழுது, அது பற்பல இயக்கங்களை, தட்பவெப்ப நிலைகளை ஏற்படுத்திக்கொண்டிருக்கும். எனவே, அறுவடைகளில், உள்நாட்டு வெளிநாட்டு வாணிபத்தில், பொருள்களின் இயக்கங்களில், துய்ப்போரின் தேவைகளில், அவர்களுடைய வாங்கும் பழக்கங்களில், துய்ப்போர் தேவையுடன் தொடர்புடைய தொழில் உற்பத்திகளில், மற்றும் இவைகளின் வழியே ஏற்படும் கணக்கற்ற விளைவுகளிலெல்லாம் அசைவுகள் ஏற்படுகின்றன.

இதுபோன்ற அசைவுகள் மிகுந்த வீச்சுடன் எங்கும் பரவியுள்ளன என்பதைக் காட்ட சில எடுத்துக்காட்டுகளே போது

மானவை.[1] அமெரிக்காவின் தொழில் உற்பத்தி ஆண்டுக்குச் சராசரி 100 என்று வைத்துக்கொள்வோம்; அப்படியானால் அது ஜூலை மாதத்தில் மிகக் குறைவாகவும், அக்டோபர் மாதத்தில் மிக அதிகமாகவும் இருக்கிறது; வீச்சு 94-லிருந்து 103 வரை. உலோகங்களைத் தோண்டியெடுப்பது ஜனவரியில் 72 ஆகக் குறைவாகவும், ஜூனில் 121ஆக அதிகரித்தும் காணப்படுகிறது; நிலக்கீலார்ந்த (bituminous) நிலக்கரி உற்பத்தியின் உயர்வு அக்டோபர்-நவம்பரில் 109ஆகவும், ஜூலையில் சிறுமம் 75 ஆகவும் இருக்கும். உணவு, பானவகைகளின் உற்பத்திகள் (பொறிசெய் பொருள் வகைகள்) பிப்ரவரியில் 91 ஆகக் குறைந்தும், செப்டம்பரில் 114 ஆக அதிகரித்தும் உள்ளன. பருத்தியின் துய்ப்பு ஜூலையில் குறைவாகவும், பிப்ரவரியில் அதிகமாகவும், பருவகாலத்திற்கான வீச்சு 84-லிருந்து 108 ஆகவுமுள்ளது. போர்ட்லாந்து சிமென்ட்டின் உற்பத்தியோவெனில், பிப்ரவரியில் 76ஆகவும், அக்டோபரில் 115 ஆகவும் இருக்கிறது. தபால்மூலம் அனுப்பும் நிறுவனங்களின் விற்பனைகள் பிப்ரவரியில் 70 ஆகவும், டிசம்பரில் 145 ஆகவும் மாறுகின்றன. டிபார்ட்மென்ட் ஸ்டோர்களிலிருந்தும் (departmental stores) தபால்மூலம் அனுப்பும் நிறுவனங்களிலிருந்தும் பொருள்களை வாங்குவதற்கான துய்ப்புக் கடன் அளவுகள், ஆகஸ்ட், செப்டம்பர் மாதங்களில் 92 ஆகவும், ஆண்டு இறுதியில் டிசம்பரில் 110 ஆகவும், ஜனவரியில் 111 ஆகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். ரயில்வேக்களின் சரக்கு டன்-மைல்கள் பிப்ரவரியில் 92 ஆகக் குறைந்து, அக்டோபரில் 112 ஆக உயர்கின்றன. குளிர் சாதனத்தில் வைக்கப்படும் முட்டைகளின் அளவு பிப்ரவரியில் 4 ஆகக் குறைந்து, ஜூலையில் 192 ஆக ஏறுவதைப் பார்க்கிறோம்! இவைகளில் சில வெகு அதிக வீச்சுடையனவே; பருவங்கள் மாறினும், உண்மையாகவே பாதிக்கப்படாதவைகள் வேறு சில. ஆனால், பெரும்பாலான சமூகச் செயல்களும், பொருளாதார வேலைக்கிரமங்களும் பருவ மாற்றங்களால் பாதிக்கப்படுபவை. இவைகளையே நாம் இனிக் கவனிப்போம்.

தட்பவெப்ப நிலைகள், அறுவடைகள் இவற்றின் சீரான இயக்கங்களையும், இவைகளின் பல்வேறு பொருளாதார விளைவுகளையும் தனியேகூட ஆராயலாம்; இப்படி இவைகளையே தனியாகக்கொண்ட ஆராய்ச்சிகள் பல நடந்துள்ளன. முக்கிய

[1] *ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் போர்டு ஆஃப் கவர்னர்ஸ் குழுவினராலும்* (Board of Governors of the Federal Reserve System), *நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச்* (National Bureau of Economic Research) *என்ற நிறுவனத்தாராலும் கணக்கிடப்பட்ட பருவகாலக் குறியீடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டவை இவ் வெடுத்துக்காட்டுகள்; குறியீடுகள் காலவாக்கில் மாறும் தன்மையுடையவைதாம்.*

அட்டவணை 11-1

1936-1953ஆம் ஆண்டுகளில் அமெரிக்காவில் நெருப்பினுல் நேர்ந்த சேதங்களின் மாதாந்தர விவரங்கள்*

(ஆயிரம் டாலர்களில்)

	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்சு	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்டு	செப்டம்பர்	அக்டோபர்	நவம்பர்	டிஸம்பர்	மொத்தம்
1936	27,730	30,910	29,177	25,786	21,479	20,407	22,357	21,714	20,413	20,439	22,808	30,133	293,353
1937	25,070	28,655	29,319	26,664	21,438	19,525	19,812	19,767	19,350	21,098	23,850	30,173	284,721
1938	27,676	26,473	29,051	25,616	22,917	19,474	20,435	20,821	23,372	24,798	28,659	32,758	302,050
1939	27,615	29,303	30,682	27,061	27,032	24,191	22,468	22,800	22,837	24,300	27,248	27,959	313,496
1940	36,261	34,410	29,789	26,657	23,446	19,506	20,323	20,722	21,198	22,091	23,449	28,617	306,469
1941	26,470	26,102	31,471	29,330	25,637	24,943	23,698	24,122	24,668	30,833	23,822	31,261	322,357
1942	35,565	30,819	30,505	27,960	23,233	22,410	21,000	19,680	20,443	22,621	24,144	36,469	314,849
1943	27,733	33,175	39,214	34,241	29,297	26,854	25,016	29,193	26,488	29,661	31,647	47,716	380,235
1944	38,572	38,280	39,084	34,746	32,815	30,555	32,706	30,618	31,448	32,173	33,847	48,694	423,538
1945	44,865	41,457	40,876	37,950	34,153	34,090	34,054	34,096	32,447	34,470	37,393	49,478	455,329
1946	49,808	51,759	53,252	52,153	46,094	44,240	40,998	40,019	40,256	40,108	44,706	58,094	561,487
1947	57,180	64,247	72,435	68,029	56,545	50,840	49,357	51,359	47,990	54,946	51,346	68,361	692,635
1948	63,010	71,521	74,236	63,751	59,256	54,706	50,955	49,543	49,945	51,845	52,949	69,397	711,114
1949	57,926	62,424	67,218	55,290	54,162	51,787	49,592	50,150	49,678	48,914	53,116	67,279	667,536
1950	58,823	58,340	72,468	61,605	58,765	57,116	52,980	49,878	45,922	49,953	55,790	66,820	688,460
1951	68,686	69,136	71,507	62,965	58,744	56,403	52,220	55,416	53,398	54,660	60,064	68,206	731,405
1952	74,155	69,925	72,254	67,380	62,354	58,585	61,675	56,462	58,949	63,958	65,129	74,127	784,953
1953	76,659	72,706	83,471	67,362	64,239	67,644	74,938	107,713	68,613	68,551	68,064	83,440	903,400

* நேஷனல் போர்ட் ஆஃப் ஃபையர் அண்டர்ரைட்டர்ஸ் (National Board of Fire Underwriters) நிறுவனத்தாரால் தொகுக்கப்பட்டது.

மாக நோக்கின், புள்ளியியலறிஞர்கள் பருவகால மாற்றங்களின் கோலங்களைக் கண்டுபிடிப்பது அத்தகைய மாற்றங்களை நீக்குவதற்காகவேதான். ஃபெடரல் ரிஸர்வ் உற்பத்திக் குறியீடு இதுபோன்று பருவகால இயக்கங்களுக்கு மாற்றப்பட்டதாகும். காலத் தொடர் வரிசைகளின் ஆய்வில் முதலில் நெடுங்காலப் போக்கும், பருவ காலப் போக்கும் நீக்கப்பெறும்; பிறகு 'சுழல்' மாற்றங்கள் கவனிக்கப்படும். இதுவே சம்பிரதாயமான முறை. பருவகாலக் கோலங்களைப்பற்றிமட்டும் கவனிப்பதாயினும், அவைகளை நீக்கி விட்டு மற்ற ஆராய்ச்சிகளைத் தொடங்குவதாயினும், அவைகளைக் கூடுமான வரையில் திட்பமாக அளவிடுதல் முதல் வேலையாகும்.

நகரும் சராசரிகளின் பயனை விளக்க ஓர் எடுத்துக்காட்டு

நெருப்பினுலும் மின்னல்களாலும் அமெரிக்காவில் நிகழ்ந்த சேதங்களின் மாதாந்திர விவரங்களை அட்டவணை 11-1-ல் காணலாம். இவைகளைக்கொண்டு பருவகால ஏற்றவிறக்கங்களின் அளவிடுதலை விளக்குவோம். அளவிடுவதற்கான முறையின் முதற் படி 12-மாத அளவுகள்கொண்ட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுதல். விளக்க வேண்டிய ஏற்றவிறக்கங்கள், 12 மாதங்களிடையே மாருது நிகழ்வதால், நகரும் சராசரியை நம்பிக்கையுடன் பயன்படுத்தலாம். ஆனுல், ஏற்றவிறக்கங்களின் அளவு (பருவ மாற்றங்களின் வீச்சு) ஆண்டுக்கு ஆண்டு சிறிது மாறக்கூடும்; மற்றும், விவரங்கள் ராண்டம் (random) காரணங்களாலும், மற்றப் பருவமாற்றமில்லாத காரணிகளாலும் பாதிக்கப்படலாம். எனவே, நகரும் சராசரிகளால் குறிக்கப்பெறும் வரம்பு பருவகால மாற்றங்களால் பாதிக்கப்படாமற் போகாது; அந்த வரம்பிலிருந்து விளக்கங்களும், உண்மையான பருவகால மாற்றங்களைமட்டும் குறிப்பவைகளாகா. இவைகளைச் சிறிதே நீக்க, கீழ்க்கண்ட முறையைக் கையாளலாம்: மாதங்களின் விவரங்களை நகரும் சராசரிகளுக்கு விகிதமாக்கி அவைகளைச் சராசரியாக்கலாம்; இந்தச் சராசரிகளை வைத்துக்கொண்டு பருவகாலக் குறியீடுகளை அமைக்கலாம்.

மையமாக்கப்பட்ட நகரும் சராசரியும், அது தொடக்கத்திலுள்ள எந்த எண்ணுடன் ஒப்பிடவேண்டுமோ அந்த எண்ணின் காலத்திற்கே உரியதாகவேண்டும் என்பது தெளிவு. இதனுல் மற்றுமொரு முறை சராசரியாக்கவேண்டியதாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, நெருப்பினுல் உண்டான சேதங்களை அந்தந்த மாதங்களின் மையத்தில் நிகழ்ந்ததாகக் கொள்ளவேண்டும். 1936ஆம் ஆண்டுக்

கான 12 மாதாந்தர விவரங்களைச் சராசரியாக்கினல் அதன் மையம் ஜுலை 1ஆம் தேதிக்கு ஆகும். 1936ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரியிலிருந்து 1937ஆம் ஆண்டு ஜனவரிவரையிலுள்ள பன்னிரண்டு மாதங்களின் சராசரி, ஆகஸ்ட் 1ஆம் தேதிக்காகும். எனவே, ஜுலை 15ஆம் தேதி விவரத்துடன் ஒப்பிடக்கூடியதான விவரத்தைப் பெற இந்த இரண்டு சராசரிகளையும் மறுமுறை சராசரியாக்கவேண்டும். எனவே, 12 மாதங்களுக்கான நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டபிறகு இரண்டு மாத நகரும் சராசரிகளைத் திரும்பவும் கண்டுபிடிப்பதால் துவக்கத்திலுள்ள விவரங்களுடன் ஒப்பிடக்கூடிய அளவைகள் கிடைக்கும். நடைமுறையில், கடைசிப் படிவரைக்கும் மொத்தங்களாகவே கணக்கிட்டு, இறுதியில் திருத்தமாக மையமாக்கிய நகரும் சராசரியைப் பெறுவது எளிதாகும்.

நகரும் சராசரிகளுக்கு விகிதங்கள்

கொடுக்கப்பட்ட 18 ஆண்டுகளில் இரண்டாண்டுகளுக்கான கணக்குமுறைகளை அட்டவணை 11-2 எடுத்துக்காட்டுகிறது. (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள பன்னிரண்டு மாதங்களின் நகரும் மொத்தங்களை இரு மாதங்களுக்கான மொத்தங்களாக்கி மையமாக்குவதால், (4)ஆம் பத்தியில் காணும் விவரங்கள் கிடைக்கின்றன. 24ஆல் இவைகளை வகுப்பதால், (5)ஆம் பத்தியிலுள்ள நகரும் சராசரிகளைப் பெறுவோம். (5)ஆம் பத்தியிலுள்ள சராசரிகளுக்கும், முறையே அதே மாதங்களுக்கான உண்மை விவரங்களுக்கும் விகிதங்களைக் கணக்கிட்டு (6)ஆம் பத்தி எண்ணிக்கைகளைப் பெறுவோம்.

நகரும் சராசரிகளுக்கும் உண்மை நெருப்புச் சேதங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் இத்தகைய வருவிக்கப்பட்ட சதவீதங்களை (derived percentages) 1936-53-க்கு, மாதவாரியாக அட்டவணை 11-3-ல் காணலாம். இவைகளைக்கொண்டுதான் பருவகால மாற்றக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவோமாதலால், இவைகளைச் சிறிது விளக்கவேண்டியதாகிறது.

ஒவ்வொரு சதவீதத்திற்கும் — எடுத்துக்காட்டாக, ஜுலை 1936-க்கான 24,335 என்பது--அடிப்படை, 12 மாதங்களின் ஒரு சராசரியே. இதனைக் கணக்கிடும்பொழுது, சரியாக 12 மாதகாலத்திற்கிடையே திரும்பத்திரும்ப நிகழும் (recurring) ஏற்றவிறக்கங்கள் அடிபட்டுப்போகும் எனக் கருதுகிறோம். எனவே, சராசரியானது பருவகால மாற்றங்கள் இல்லாமல் இருப்பதாகும். ஆனல், நெடுங்காலப்போக்கு ஒன்று இருக்குமானல், அதற்கேற்றவாறு சராசரிகள் அசைவு பெறும். மற்றும் 12 மாதங்களுக்குமதிகமான காலச் சுழற்சியுடைய (periodic) ஏற்றவிறக்கங்களாலும்—வியாபாரச் சுழல்

அட்டவணை 11 - 2

மாதாந்தர நெருப்புச் சேதங்களின் 12 மாதத்திற்கான நகரும் சராசரிகளையும், உண்மையான சேதங்களுக்கும் நகரும் சராசரிக்குமுள்ள விகிதங்களையும் கணக்கிடுதல்

(சேதங்கள் ஆயிரம் டாலர்கள் அளவில்)

ஆண்டும் மாதமும் (1)	சேதத்தின் அளவு (2)	12 மாதத்திற்கான நகரும் மொத்தம் (3)	(3)ஆம் பத்தியின் 2 மாதத்திற்கான நகரும் மொத்தம் (4)	(4) ÷ 24 (5)	(2)ஆம் பத்திக்கும் (5) ஆம் பத்திக்கும் விகிதம் (6)
1936					
ஜனவரி	27,730				
பிப்ரவரி	30,910				
மார்ச்சு	29,177				
ஏப்ரல்	25,786				
மே	21,479				
ஜூன்	20,407				
ஜூலை	23,357	293,353	584,046	24,335	.9187
ஆகஸ்ட்	21,714	290,693	579,131	24,130	.8999
ஸெப்டம்பர்	20,413	288,438	577,018	24,042	.8490
அக்டோபர்	20,439	288,580	578,038	24,085	.8486
நவம்பர்	22,808	289,458	578,875	24,120	.9456
டிஸம்பர்	30,133	289,417	577,952	24,081	1.2513
1937					
ஜனவரி	25,070	288,535	574,525	23,938	1.0473
பிப்ரவரி	28,655	285,990	570,033	23,751	1.2065
மார்ச்சு	29,319	284 043	567,023	23,626	1.2410
ஏப்ரல்	26,664	282,980	566,619	23,609	1.1294
மே	21,438	283,639	568,320	23,680	.9053
ஜூன்	19,525	284,681	569,402	23,725	.8230
ஜூலை	19,812	284,721	572,048	23,835	.8312
ஆகஸ்ட்	19,767	287,327	572,472	23,853	.8287
ஸெப்டம்பர்	19,350	285,145	570,022	23,751	.8147
அக்டோபர்	21,098	284,877	568,706	23,696	.8904
நவம்பர்	23,850	283,829	569,137	23,714	1.0057
டிஸம்பர்	30,173	285,308	570,565	23,773	1.2692

1936ஆம் ஆண்டுக்கு (3)-லிருந்து (6)ஆம பத்திவரை காலியாகவே இருக்கும்; இந்த ஆண்டின் முதல் ஆறு மாதங்களுக்கான—ஜனவரிமுதல் ஜூன்வரை—நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட, 1935ஆம் ஆண்டுக் கடைசி ஆறுமாத விவரங்கள் தேவைப்படும். 1937ஆம் ஆண்டுக்கான விவரங்கள், 1938ஆம் ஆண்டு விவரங்களும் முழுமையாக உள்ளதால், முழு ஆண்டுக்கும் கொடுக்கப்பெற்றுள்ளன. அட்டவணை 11-2, மொத்த 18 ஆண்டுகளுக்குமான பட்டியலிலிருந்து ஒரு பகுதி மட்டுமே.

அட்டவணை 11-3

1936-53 ஆண்டுகளுக்கான மையமாக்கப்பெற்ற 12 மாத நகரும் சராசரிகளுக்கும், உண்மை நெருப்புச் சேதங்களுக்குமுள்ள தொடர்பைக் குறிக்கும் சதவிதங்கள்

	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்ட்	செப்டம்பர்	அக்டோபர்	நவம்பர்	டிஸம்பர்
1936							91.9	90.0	84.9	84.9	94.6	125.1
1937	104.7	120.6	124.1	112.9	90.5	82.3	83.1	82.9	81.5	89.0	100.6	126.9
1938	116.3	110.9	120.6	105.0	92.6	77.7	81.2	82.3	91.8	96.9	111.0	125.0
1939	104.3	110.0	114.9	101.5	101.7	91.9	84.8	84.3	83.9	89.4	100.9	104.8
1940	137.4	131.3	114.3	102.9	91.4	76.5	80.9	85.0	87.9	91.0	95.8	115.4
1941	105.2	102.5	122.3	111.7	96.3	93.2	87.0	86.7	88.2	110.6	85.9	113.6
1942	130.3	114.1	114.5	107.0	90.1	86.1	81.0	76.6	78.2	84.5	88.5	131.6
1943	98.8	115.8	133.9	114.8	96.3	86.0	77.8	89.0	80.2	89.8	95.3	142.5
1944	113.6	111.5	112.9	99.5	93.4	86.7	92.0	85.2	87.0	88.5	92.6	132.5
1945	121.4	111.5	109.4	101.2	90.5	89.9	89.2	87.9	81.7	84.4	89.2	115.5
1946	114.3	117.4	119.2	115.3	100.7	95.3	87.0	83.5	81.7	79.1	86.3	110.6
1947	107.6	119.1	132.3	122.1	99.9	88.7	85.1	87.8	81.5	93.5	87.4	115.9
1948	106.4	120.8	125.4	107.7	100.2	92.4	86.3	84.7	86.4	90.7	93.6	123.4
1949	103.3	111.4	111.9	98.9	97.1	92.9	88.8	90.2	89.4	87.2	94.0	118.2
1950	102.7	101.6	126.6	107.8	102.6	99.5	91.6	85.1	77.8	84.6	94.4	113.1
1951	116.4	116.7	119.6	104.4	96.8	92.6	85.4	90.2	86.8	88.6	96.8	109.5
1952	118.1	110.6	113.8	105.1	96.4	89.9	94.1	85.9	88.9	95.8	97.4	110.1
1953	112.3	102.5	113.6	90.9	86.4	90.3						

போன்றவைகளால்—அவை பாதிக்கப்படும். அட்டவணை 11-3-ல் இருக்கும் சதவீதங்களைத் தருகின்ற, நகரும் சராசரிகளிலிருந்து வரும் விலக்கங்கள் முக்கியமாகப் பருவகால மாற்றங்களால் ஏற்பட்டவை என்று கருதுவோம்; இவைகள் 100-க்கு மேலோ அல்லது கீழோ மதிப்புள்ளனவாகலாம். பருவகால வகை ஒரேவாறாக நிகழ்வதானால்—வேறு விசைகள் (forces) இந்தச் சதவீதங்களைப் பாதிக்காதுபோனால்—எந்த ஒரு மாதத்திய (டிசம்பர் என்று வைத்துக்கொள்வோம்) விவரத்தையும், அந்த மாதத்தின் குறியீடாகக் கருதிவிடலாம்; ஏனென்றால், அவைகள் சமமாகவே இருக்கும். இங்கு அவைகள் சமமாகவில்லை என்று தெளிவாகத் தெரிகிறது. டிசம்பரின் சதவீதங்கள் 1939-ல் 104.8 என்ற சிறிய மதிப்புக் கொண்டும், 1943-ல் 142.5 என்ற பெரிய மதிப்புக் கொண்டுமுள்ளன. எனவே, ஆண்டின் எல்லா மாதங்களுக்கான நெருப்புச் சேதங்கள், பருவகால மாற்றங்களுடன் வேறு பல விசைகளுக்கும் ஆளாகியுள்ளன. ராண்டம் காரணங்களும் ஒரு முக்கியமான பகுதியாகின்றன—ஏதாவதொரு மாதத்தில் ராண்டம் காரணங்களால் நெருப்புச் சேதம் ஏற்பட்டு, அந்த மாதத்திற்கான விவரத்தை அனுபவ வழியில் எதிர்பார்ப்பதைவிட, அதிகமாகவோ குறைவாகவோ காட்டக்கூடும். 12-மாதங்களின் நகரும் சாரசரிகளாலேயே நெடுங்கால அசைவுகள் திருத்தமாகக் குறிப்பிடப்படும் என்பதற்கில்லை. நெடுங்காலப் போக்கு, திட்டப்படாத வரையில் அட்டவணை 11-3-ல் உள்ள மாதச் சதவீதங்கள் 100-லிருந்து வேறுபட்டிருக்கும். அதேபோல், நெருப்புச் சேதங்களின் சுழல் ஏற்ற இறக்கங்களும் (cyclical fluctuations), நகரும் சராசரிகளினால் முழுவதும் குறிப்பிடப்படும் என்பதற்கில்லை; அட்டவணை 11-3-ல் உள்ள சதவீதங்கள் இதுபோன்ற எந்த வித்தியாசத்தினாலும் பாதிக்கப்பெறும்.

எனவே, பற்பல காரணங்களால் ஆண்டின் ஒவ்வொரு மாத சதவீதங்களிடையேயும் மாறுபாடு அதிகமாக உள்ளது. வித்தியாசத்தின் அளவுகளைப் படம் 11.1-ல் காணலாம். இஃது ஒரு பலதரப்பட்ட (multiple) அலைவெண் பரவலாகும். இங்கு 12 மாதங்களிலும் நிகழ்கின்ற சதவீதங்களின் சிதறல்களைக் காணலாம். இத்தகைய மாறுபாடுகளினால் ஏற்படும் இன்னல்களைத் தவிர்க்க ஓர் எளிதான வழி சராசரிகளாக்குவதுதான்; அதாவது, ஜனவரி மாதத்திற்கான 17 உறுப்புகளையும், பிப்ரவரி மாதத்திற்கான 17 உறுப்புகளையும்—இப்படியே மற்ற மாத உறுப்புகளையும்—சராசரியாக்குவது. இது பகுத்தறிவிற்குட்பட்ட முறைதான் என்பதை நன்கு காட்டலாம். எந்த ஒரு மாதத்திலும்—ஆகஸ்டு என்போம்—நெருப்புச் சேதங்களின்மேல் பருவகால விசையின் இயக்கம் சுமாராக மாறாமலே இருக்கிறது என்று எண்ணுவோம். அந்த

மாதத்தில் சேதம் குறைவாகவே உள்ளது. ஆனால், ராண்டம் காரணங்களும் அவைகளைப் பாதித்துச் சில மாதங்களில் குறை வாகவும், சில மாதங்களில் அதிகமாகவும் சேதத்தை விளைவிக்கலாம். அதேபோலவே, சுழல் மாற்றங்களும்—12 மாத நகரும் சராசரிகள், சில சமயம், சுழலின் சராசரியைவிடக் குறைவாகவும், சில வேளைகளில்

Relatives	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
142 - 144.9												I
139 - 141.9												
136 - 138.9	I											
133 - 135.9			I									
130 - 132.9	I	I	I									II
127 - 129.9												
124 - 126.9			III									III
121 - 123.9	I		I	I								I
118 - 120.9	I	III	III									I
115 - 117.9	II	III		I								III
112 - 114.9	III	I	卌I	II								II
109 - 111.9		卌I	II	I						I	I	III
106 - 108.9	II			III								
103 - 105.9	IIII			III								I
100 - 102.9	I	III		III	IIII						II	
97 - 99.9	I			II	II	I					I	
94 - 96.9					IIII	I	I			II	卌I	
91 - 93.9					III	卌	III		I	II	II	
88 - 90.9				I	III	IIII	II	IIII	III	卌I	II	
85 - 87.9					I	III	卌	卌II	IIII	I	III	
82 - 84.9						I	II	卌	II	IIII		
79 - 81.9							III		卌	I		
76 - 78.9						II	I	I	II			

படம் 11.1. அலைவெண் பரவல்கள் : நிகழ்ந்த மாதாந்தர நெருப்புச் சேதங்களை, அதனதன் 12-மாத நகரும் சராசரிகளின் ஒப்புமைகளாகக் கணக்கிடுதல்.

அதிகமாகவும் இருக்கக்கூடும். போக்கு மாற்றங்கள் அதிக துன்பங் களைக் கொடுக்கக்கூடும். உண்மையான போக்கு நேர்கோட்டு முறையில் இல்லாமல் எப்பொழுதும் மேற்புற வளைவோ (curvature) கீழ்ப்புற வளைவோ கொண்டதாக இருக்கும்பொழுது, நகரும் சரா சரிகள் போக்கு மதிப்புகளுக்குக் குறைவாக அல்லது அதிகமாக இருக்

கலாம்.[2] இந்த ஒரு விதிவிலக்கை விட்டுவிட்டால், ஒரு மாதத்திற்கான பல சதவீதங்களைச் சராசரியாக்குவதனுல் பருவகாலமல்லாத மாறுபாடுகள் காலவழியில் ஒன்றேடொன்று அடிபட்டுவிடும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். பருவகால அசைவுகளின் நிலைத்த (persistent) விளைவுகள் மேம்பட்டிருக்கும்; எனவே, அந்த மாத அளவின் மதிப்பை அது நிர்ணயிக்கும். போக்கு நேர்கோட்டு முறையில் இல்லாது மிகுந்த வளைவுடன் (curvature) இருந்தால்தான், போக்குக் காரணி இதனைக் கலைக்கக்கூடும்.

நெருப்புச் சேதங்களில் திட்டமான பருவகால வகையுள்ளது என்பதனைப் படம் 11.1 நன்கு எடுத்துக்காட்டுகிறது. சில மாதங்களில் மாறுபாடு வெகு அதிகமாக இருக்கிறது என்ருலும், டிசம்பரிலிருந்து மார்ச்சுவரை சேதங்கள் அதிகமாகவே நிலைத்துள்ளன என்பதும், இலையுதிர் காலத்தில் குறைவாகவே உள்ளன என்பதும், மறுபடியும் டிசம்பரில் அதிகமாகின்றன என்பதும் தெளிவாகின்றன. இது போன்ற திட்டமான வகை தெரியவருவதால், இந்த விவரங்களிலிருந்து வருவிக்கப்பெறும் பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் (seasonal index numbers), ஓராண்டுக்குள் நிகழ்கின்ற உண்மை மாற்றங்களைச் சிறப்பாக எடுத்துக்காட்டும் என்று நம்பலாம்.

நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்களுக்கான சராசரிகளும் இடைநிலைகளும்

ஆண்டின் ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் திருத்தமானதும், பிரதிநிதியானதுமான (representative) ஒரு குறியீட்டைப் பெறப் பல முறைகளைக் கையாளுகின்றனர். நடைமுறையில் வழங்கும் சராசரிகளில் கூட்டுச் சராசரியும், இடைநிலையுமே பொருத்தமானவை. 12 மாதங்களுக்கான இந்தச் சராசரிகளை அட்டவணை 11-4-ல் காணலாம் ; மற்றும் ஒழுங்காக்கப்பட்ட அளவைகளும் அங்கு உள்ளன. 12 மாதச் சராசரிகளின் சராசரி 100 ஆக இருப்பது வெகு குறைவான சமயங்களிலேதாம்; ஏனென்ருல், பருவகாலமல்லாத காரணிகள் முழுவதும் அடிபட்டுவிடுவதில்லை. அட்டவணை 11-4-ன் (2)ஆம் பத்தியின் சராசரி 99.72 ஆக உள்ளதைக் காண்க. பருவகால மாற்றங்கள்மட்டும் நிகழ்ந்திருப்பின், ஆண்டின் மொத்தச் சேதம் 12 மாதங்களில் எவ்வாறு நேர்ந்துள்ளது என்பதனைக் காட்டவே நாம் மாதாந்தரக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுகிறேம் அல்லவா? எனவே, இவைகளின் சராசரி 100-க்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும். இவைகளை ஒழுங்குபடுத்த, (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் 99.72-ன் ரெஸிபுரோக்கலினுல் (reciprocal) பெருக்கி, எளிதான ஒரு முறையைக் கையாளுகிறேம். இப்பொழுது ஒழுங்

[2] பார்க்க, பக்கங்கள் 331 - 3.

காக்கப்பட்ட அளவைகளின்—(3)ஆம் பத்தியிலுள்ளவை—சராசரி 100 ஆகவே இருக்கும். (கணக்கு முறைகளில் இரண்டு தசமஸ்தானங்களுக்கு எண்களை எடுத்துக்கொண்டுள்ளோம்; ஆனல், இறுதியான குறியீடுகளை ஒரே தசமஸ்தானத்துக்குத் தந்துள்ளோம்.) தொடக்கத்திலுள்ள மாதாந்தர விகிதங்களுக்கு மேற்கூறிய முறையையொட்டியே இடைநிலைகளும் கணக்கிடப்பட்டு ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 11–4

நெருப்புச் சேதங்களின் பருவகாலக் குறியீடுகள். 12-மாத நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்களிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச் சராசரிகளும் இடைநிலைகளும்

மாதம்	கூட்டுச் சராசரிகள்	ஒழுங்காக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரிகள்	இடைநிலைகள்	ஒழுங்காக்கப்பட்ட இடைநிலைகள்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
ஜனவரி	112.54	112.9	112.3	113.2
பிப்ரவரி	113.43	113.7	111.5	112.4
மார்ச்சு	119.37	119.7	119.2	120.2
ஏப்ரல்	106.39	106.7	105.1	106.0
மே	95.46	95.7	96.3	97.1
ஜூன்	88.94	89.2	89.9	90.7
ஜூலை	86.31	86.5	86.3	87.0
ஆகஸ்ட்	85.72	86.0	85.2	85.9
செப்டம்பர்	84.58	84.8	84.9	85.6
அக்டோபர்	89.91	90.2	89.0	89.8
நவம்பர்	94.37	94.6	94.4	95.2
டிஸம்பர்	119.63	120.0	115.9	116.9
சராசரி	99.72	100.0	99.17	100.0

ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட இரு சராசரிகளிடையேயும், நெருப்புச் சேத அளவுகளில் மிகுதியான வேறுபாடுகள் உள்ளதைக் காண்கிறோம். ஆண்டின் சராசரி மாத சேதத்தைக் காட்டிலும் செப்டம்பர் மாதத்தில் சுமார் 15 சதவீதம் சேதம் குறைவாகவும், டிசம்பர், மார்ச்சு மாதங்களில் சேதம் பருவகால வழியில்—சுமார் 17-லிருந்து 20 சதவீதம்வரை—ஏற்றமாகவும் உள்ளதைக் காண்கிறோம். இது நிலையான தோரணிதான் (pattern) என்பதைப் படம் 11.1-ல் உள்ள அலைவெண் பரவல்களும் தெளிவாகக் காட்டுகின்றன.

பருவகாலக் குறியீடுகளின் ஈரடைவுகளும் (sets) நெருக்கமாகவே ஒத்திருக்கின்றன. இவைகளிடையே உள்ள வித்தியாசம் 2 சதவீதத்திற்கும் குறைவு ; விதிவிலக்கு டிசம்பரிலேதான்—அந்த மாதத்தில்தான் நெருப்புச் சேத அளவுகளில் மிகுந்த சிதறல்களைக் காண்கிறோம். இரு சராசரிகளில், ஒவ்வொன்றும் சில நிறை குறைகளைப் பெற்றவை. கூட்டுச் சராசரி, அந்த மாதத்திற்கான எல்லா அளவைகளாலும் பாதிக்கப்படுகிறது ; ஆனால், விதிவிலக்கான சில விவரங்களால் அது மிகையாகவே பாதிக்கப்படக்கூடும். ஒரு பெருந்தீ (conflagration) விபத்து ஒரு மாதத்தில் நிகழுமாயின், அந்த மாதத்தின் நெருப்புச் சேதங்களை அது வெகுவாக அதிகப்படுத்திவிடும் ; அந்த மாதத்திற்கான பருவகாலக் குறியீட்டில் இந்த விதிவிலக்கான விவரமும் இடம்பெறுமானால், குறியீடு திருத்தமற்றதாகலாம். இந்த இன்னலைத் தவிர்க்குமாறு அமைந்த இடைநிலைக்கும் சில தனித்த குறைகள் உள்ளன. மாதாந்திரப் பரவல்களில் நல்ல குவிவு (concentration) இருந்தாலன்றி, ஓரிரண்டு விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டாலோ நீக்கப்பட்டாலோ அதன் மதிப்பு திட்டமாக மாறக்கூடும். குறிப்பிட்ட மாதங்களில் விவரங்களின் பரவல் தன்மையையொட்டியே நாம் சராசரியைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமாதலால், படம் 11.1-ல் உள்ளதைப்போன்ற அட்டவணைச் சுருக்கம் (tabular summary), நமக்கு நல்ல வழிகாட்டியாக அமையலாம்.

நிலைச் சராசரிகள் (Positional Means)

பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதற்கு மூன்றாவது முறையும் பயன்படுகிறது ; இது மேலே விளக்கப்பட்ட இரு சராசரிகளின் நன்மைகளையும் ஒருங்கே பெற்றதாகும். ஒவ்வொரு மாதத்தின் விவரங்களின் மையத்திலிருக்கும் சில விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவதே இந்த முறையாகும். ஒவ்வொரு மாதப் பரவலிலும் ஒற்றை (odd) எண்ணிக்கையுள்ள விவரங்கள் இருந்தால், அப்பொழுது மையமான மூன்று அல்லது ஐந்து விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிடுவோம் ; எண்ணிக்கை இரட்டை எண்ணாக இருந்தால், மையமான நான்கு அல்லது ஆறு விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம். (அலைவெண் பரவல்களிலிருந்து அளவைகளைக் கணக்கிடக் கூடாது ; தொடக்கநிலை விவரங்களின் பட்டியலிலிருந்துதான் கணக்கிடவேண்டும்.) இதுபோன்ற ஒரு 'நிலைச் சராசரி'யானது இருபுறக் கோடிகளிலும் அமைந்துள்ள மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாதது ; இடைநிலையைவிட அதிக உறுதியானது (stable) —அதாவது, ஓரிரண்டு விவரங்களை நீக்குவதாலோ சேர்ப்பதாலோ

அதிகமாகப் பாதிக்கப்படாதது. இதுபோன்ற நிலைச் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி, பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கணக்கிட்ட விவரங்களை, அட்டவணை 11-5-ல் பார்க்கலாம்.

அட்டவணை11-5-ன் (3), (5)ஆம் பத்திகளிலுள்ள குறியீடுகளும், 11-4-ன் குறியீடுகளால் விளக்கப்பெற்ற முறையையே காட்டு கின்றன. ஆனால், டிசம்பர் மாதத்திற்குச் சாதாரண கூட்டுச் சராசரி இடைநிலைகளால் கிடைத்துள்ள இருபுற எல்லைகளுக்கிடையேதான்

அட்டவணை 11–5

நெருப்புச் சேதத்தின் பருவகாலக் குறியீடுகள். நகரும் சராசரிகள் விகிதங்களிலிருந்து கணக்கிட்ட நிலைச்சராசரிகள்

மாதம் (1)		மையமான மூன்று விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி (2)	ஒழுங்காக்கப்பட்ட (2) ஆம் பத்தி (3)	மையமான ஐந்து விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி (4)	ஒழுங்காக்கப்பட்ட (4) ஆம் பத்தி (5)
ஜனவரி	...	111.18	112.3	110.84	111.8
பிப்ரவரி	...	112.37	113.5	112.86	113.9
மார்ச்சு	...	116.20	117.3	116.50	117.5
ஏப்ரல்	...	105.70	106.7	105.84	106.8
மே	...	96.33	97.3	95.80	96.7
ஜுன்	...	90.00	90.9	90.12	90.9
ஜுலை	...	86.23	87.1	86.16	86.9
ஆகஸ்ட்	...	85.40	86.2	85.58	86.3
செப்டம்பர்	...	85.07	85.9	84.78	85.5
அக்டோபர்	...	89.00	89.9	89.06	89.8
நவம்பர்	...	94.33	95.2	94.38	95.2
டிசம்பர்	...	116.53	117.7	117.68	118.7
சராசரி		99.03	100.0	99.13	100.0

மைய விவரங்களைச் சராசரியாக்கப்பெற்ற குறியீடுகள் உள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். நிலைச் சராசரிகள் தெளிவான தகுதியைப் (merit) பெற்றவைகளே. பொதுவாக, மாதாந்தர ஒப்புமைகள் அதிகமான சிதறல்களைக் காட்டும்பொழுது, கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலையைவிட நிலைச் சராசரிகளையே பயன்படுத்தவேண்டும்.

மற்ற முறைகள் : பருவகால மாற்றங்களின் வகைகளை விளக்குவதற்கு நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துவதை, முந்திய எடுத்துக்காட்டு விவரித்துள்ளது. போக்கு மதிப்பு

களுக்கு விகிதங்களைக் கண்டுபிடிக்கும் ஏறக்குறைய இதேபோன்ற முறையுமுள்ளது. அந்த விகிதங்களையும் படம் 11.1-ஐப்போல் பரவல்களாக அமைத்து, பிறகு நகரும் சராசரி விகிதங்களைப் போலவே கையாண்டு, சராசரியாக்கிப் பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதுதான் அது. போக்கு விகிதமுறை, நகரும் சராசரி முறையைக்காட்டிலும் திருப்தி குறைவானதால், அதனை இப்பொழுது அவ்வளவாகப் பயன்படுத்துவதில்லை. போக்கிலிருந்து வரும் விலக்கங்கள், பருவகாலச் சுழல், மற்றும் ராண்டம் ஏற்ற இறக்கங்களைக் கொண்டவை; எனவே, போக்கு விகிதங்களைச் சராசரியாக்குவதனாலேயே சுழல்கள், மற்றும் ரா டம் விளைவுகள் முழுவதும் நீக்கப்பெறும் என்பது நம்பவேண்டியதாகும். இதுபோன்ற நீக்கம் நிகழ்வது அரிதானதால், இதனின்று கிடைக்கும் பருவகாலக் குறியீடுகள் அவ்வளவு திருப்திகரமாக நம்பிக்கை வாய்ந்தவை ஆகா. இவைகளைத் தவிர விகிதத் தாள்களின் (அல்லது அரை லாகிருதத் தாள்) சிறப்புப் பயன்களைக்கொண்டு வரைபட முறையும் பருவகால அசைவுகளை அளவிடப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதில் அக்கறை கொண்ட மாணாக்கர் ஸ்பர், கெல்லாக், மற்றும் ஸ்மித் Spurr, Kellogg and Smith) அவர்களின் நூலில் (து.நூ.ப. 150) விளக்கம் காணலாம்.

மாத அளவில் (அல்லது ஆண்டின் வேறு பகுதிகளில்) கொடுக்கப் படும் விவரத் தொடர்வரிசைகளில் எல்லாம் பருவகால மாறுபாடு இருக்காது என்பதை நாம் கவனிக்கவேண்டும். எனவே, துவக்கநிலைத் தொடர்வரிசையில் இருக்கும் உண்மையான (திரும்பத் திரும்ப நிகழ்கின்ற) ஏற்ற இறக்கங்களுக்குத்தாம் நாம் திருத்தங்கள் அமைக்கிறோமா என்பதனை ஆராய்ச்சியாளர் ஒவ்வொரு தொடர் வரிசையைக் கருதும்போதும், திட்டமாகத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். மேற்கூறப்பட்ட முறைகள் கொடுக்கும், 12 மாத நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்கள், சுமாராக எப்பொழுதுமே, ஆண்டின் பல மாதங்களில் வேறுபட்டிருக்கும்; ராண்டம் காரணங்கள் நிகழ்வதால்இஃதுஉறுதியாகும். ஆனல், கணக்கிடப்பட்டகுறியீடுகள் மாதத்திற்கு மாதம் வேறுபடுவதால் பருவகாலத் தோரணி இருக்கும் எனக் கூறுவதற்கில்லை. பகுத்தறிவுக் காரணங்களைக் கொண்டும், படம் 11.1-ல் வருவதைப்போன்ற ஓர் ஒழுங்கான பருவகாலத் தோரணி பல்தரப்பட்ட அலைவெண் பரவலை அமைக்கும்பொழுது நிகழ்வதாலும், பருவகாலக் குறியீடுகளைச் சிறப்பானவை என்று ஏற்றுக்கொள்ளலாம். [கண்டறிந்த 'விவரங்கள் பல ஆண்டுக் கானவைகளாக இருக்கவேண்டும்—8 அல்லது 10 ஆண்டுகள் சிறும அளவு என்று வைத்துக்கொள்ளலாம்; ஆனல், நடைமுறையில், தம் துறை விவரங்களை நன்கு அறிந்த புள்ளியியலறிஞர்கள், ஐந்து ஆண்டு விவரப் பதிவேடுகளிலிருந்தும் (rec

குறியீடுகளைப் பெறுகிருர்கள்.] 16ஆம் அதிகாரத்தில் கூறப்பட்டுள்ள தற்சார்பற்ற சோதனைகளையும் பயன்படுத்தக் கூடுமானுல், குறியீடுகளை அதிக நம்பிக்கையுடன் ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

பருவகாலத் தோரணிகளில் மாற்றங்கள்

தட்பவெப்ப நிலையில் நெடுங்காலப் போக்கில் லேசான மாற்றங்கள் இருந்தாலும் (படம் 10.3-ஐப் பார்க்க), குளிர்காலத்தின் குளிர் அளவும், வெப்ப காலத்தின் சூட்டளவும் ஆண்டுக்கு ஆண்டு மாறுபட்டாலுங்கூட, தட்பவெப்ப நிலைகளால் ஓர் ஆண்டினிடையே ஏற்படும் அசைவுகளால் உண்டாக்கப்பெற்ற பருவகால அடிப்படைத் தூண்டுகைகள் (impulses) கால அளவில் சுமாராக மாறிலிகளாக இருக்கும். ஆனுல், வருவிக்கப்பெற்ற (derived) பொருளாதார நடக்கை முறைகள் (behaviour patterns) மாருமல் இருப்பதில்லை. பருவகாலத் தோரணிகளில் மாற்றங்கள் திடீரென்றும் ஏற்படலாம்; தாமதமாக, ஆனுல் முன்னேறுகின்றவாறும் நிகழலாம்; படிப்படியாக, ஆனுல் ஒழுங்கற்ற முறையிலும் நிகழலாம். ஒரு நாட்டின் பொருளாதார அமைப்பு சமாதானத்திலிருந்து யுத்த நிலைக்கும், அல்லது யுத்த நிலையிலிருந்து சமாதானத்திற்கும் விரைவாக மாறும்பொழுது, திடீர் மாற்றங்கள் ஏற்படக்கூடும். வியாபார முறைகளிலும், உற்பத்திச் செய்முறைகளிலும், அல்லது துய்ப்புப் பழக்கங்களிலும் ஏற்படும் தாமதமான மாற்றங்கள் முறைகளில் போக்கு மாற்றங்களையோ, படிமலர்ச்சி (evolutionary) மாற்றங்களையோ உண்டாக்கலாம். திறந்த மோட்டார் வண்டிகளிலிருந்து மூடிய மோட்டார் வண்டிகளாக மாறியபொழுது மோட்டார் கார் விற்பனைகளின் பருவகாலத் தோரணி வெகுவாக மாற்றமடைந்தது. ஒழுங்கற்ற மாற்றங்கள் பற்பல சிறிய காரணங்களால் ஏற்படலாம், அல்லது திட்டமான ஏதாவதொரு காரணத்தாலும் ஏற்படலாம். ஆக, விவசாயப் பொருள் ஒன்றின் விலை, அதிக உற்பத்திக் காலங்களில் ஒருவித பருவகாலத் தோரணியையும், குறைந்த உற்பத்திக் காலங்களில் வேருெரு தோரணியையும் பெற்றிருக்கலாம். மோட்டார் கார் கண்காட்சி தேதிகளில் மாற்றமேற்படுவதாலும், அவைகளின் விற்பனைகளின் பருவகாலத் தோரணி மாறலாம். ஈஸ்டர் பண்டிகையின் (Easter) தேதி மாற்றங்களினுல், சில பொருள்களின் சில்லறை விற்பனைகளில் மாற்றமேற்படுகிறது. எனவே, புள்ளியியலறிஞர்கள் பருவகாலத் தோரணியை நிலையானது என்று கருதவே முடியாது. அடிக்கடி தணிக்கை செய்தல் மிக இன்றியமையாதது; இவ்வாறு செய்வதால் ஐந்து அல்லது பத்து ஆண்டுகளுக்கொருமுறை—அல்லது இன்னும் விரைவிலேயே—புது பருவகால மாற்றங்களைப் பயன்படுத்த வேண்டியதாகலாம். [எடுத்துக்காட்டாக, தொழில் உற்பத்திக்கான

ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீட்டின் (Federal Reserve Index) பிரிவுகளில், 1947-லிருந்து 1952 வரை நிகழ்த்திய பல பருவகால மாறுதல்களைக் கவனிக்கலாம்.][3]

பருவகாலத் தோரணியில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் படிமலர்ச்சியுடையனவாகவிருந்தால் (evolutionary), ஒவ்வொரு மாதக் குறியீட்டில் நிகழும் படிப்படியான மாற்றத்தைத் தனியாக அளந்துவிடலாம். அதாவது, நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்கள் பெற்ற பிறகு எல்லா ஜனவரி மாத அளவைகளையும், காலவாரியாக 1937-லிருந்து 1953 வரை என்று கொண்டு வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இந்த ஜனவரி விகிதங்களில் படிப்படியானதொரு மாற்றமிருந்தால், அந்த அசைவைத் தகுந்த போக்குக் கோட்டினுல் விளக்கலாம். 1937-ஆம் ஆண்டு ஜனவரியின் போக்கு மதிப்பு, 1937-ஆம் ஆண்டு ஜனவரி பருவகாலக் குறியீட்டிற்கு முதல் தோராயமாகும் (first approximation); இவ்வாறே 1938-ஆம் ஆண்டு ஜனவரிக்கான போக்கு மதிப்பு, அந்த மாதபருவகாலக் குறியீட்டின் தோராயம்-இதுபோலவே மற்ற ஆண்டுகளின் ஜனவரி மாதங்களுக்கும். எல்லா பிப்ரவரி மாத விகிதங்களையும் இவ்வாறே செய்து, பிப்ரவரி மாதக் குறியீடுகளின் முதல் தோராயங்களைப் பெறுவோம். இவ்வாறே ஆண்டின் மற்ற எல்லா மாதங்களுக்கும் பெறுவோம்; பிறகு இவைகளை, முன்பு நெருப்புச் சேதக் குறியீடுகளுக்கு அமைத்ததைப் போல் சராசரி 100 வருமாறு திருத்தி அமைக்கவேண்டும்.

ஆண்டின் பல மாதங்களுக்கு, விகிதங்களுடைய போக்குகளைத் தீர்மானிப்பதே இந்தச் செய்முறையின் உயிர்நாடியாகும். ஒவ்வொரு மாதக் குறிப்புப் படத்தையும் (plotted) நன்கு நோக்கி ஆராய்வது முதற்படி என்று கூறவேண்டியதில்லை. பிறகு ஆராய்ச்சியாளர், குறைந்த வர்க்க முறையைப் (least squares method) பயன்படுத்தி, கணக்கு முறை சார்பலன் (mathematical function) ஒன்றை இணைக்கலாம் (fit). குறிப்பிட்ட மாதத்திற்கான பருவகால அசைவுகள் ஒழுங்கான கூடுதல்களையோ குறைவுகளையோ பெற்றிருந்தால், எளிதாக நேர்கோட்டையே போக்காகக் கொள்ளலாம். இல்லாவிட்டால், ஐந்து அல்லது ஏழு உறுப்புகள் கொண்ட நகரும் சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம்; அல்லது ஒரு மாதத்திற்கான புள்ளிகளிடையே, இயல்பாகக் கையினுலேயே ஒரு கோட்டை வரையலாம். நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் (National Bureau of Economic Research) என்ற நிறுவனத்தார், மாறும் பருவகாலக் குறியீடுகளை அமைக்க நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர்; ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் (Federal Reserve

[3] 'Federal Reserve Bulletin', 1953-ஆம் ஆண்டு செப்டம்பர், பக்கங்கள் 54.5 பார்க்க.

System) கவர்னர்கள் குழுவின் ஆராய்ச்சிப் பகுதி (Research Division), இயல்பாகக் கையால் வரையப்பட்ட கோட்டு முறையை, அவர்களின் உற்பத்திக் குறியீட்டில் ஏற்படும் பருவகால மாற்றங்களுக்குப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

பருவகாலத் தோரணியில் ஏற்படக்கூடிய பிறழ்ச்சியைச் சோதனை செய்தல் (Testing a Shift in Seasonal Pattern)

பருவகாலத் தோரணிகளில் ஏற்படும் பிறழ்ச்சிகளைக் கருதும் பொழுது; ஆராய்ச்சியாளர் எங்கும் நிறைந்துள்ள ராண்டம் காரணிகளின் விளைவுகளையும் கருதவேண்டியிருக்கிறது. மிகவும் நிலையான

அட்டவணை 11-6

பருவகாலத் தோரணியில் வெளிப்படையான பிறழ்ச்சிக்கான சோதனை. 1940-1951ஆம் ஆண்டுகளில் வடகோட்டா (North Dakota) நாட்டில் கட்டும் தொழிலில் டிசம்பர் மாதத்தில் வேலையில் ஈடுபட்டோர்.

(மையமாக்கிய, 12மாத நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்கள்)

ஆண்டு (1)	டிசம்பரில் வேலையில் ஈடுபட்டோரின் விவரத்திற்கும் 12 மாத நகரும் சராசரிக்குமான விகிதம் (2)	தரம் (rank) (3)	இயற்கை எண்கள் (4)
1940	0.445	1	1
1941	0.668	4	2
1942	0.524	2	3
1943	0.663	3	4
1944	0.695	5	5
1945	0.763	7	6
1946	0.902	12	7
1947	0.795	9	8
1948	0.781	8	9
1949	0.875	10	10
1950	0.877	11	11
1951	0.747	6	12

தொடர்வரிசைகளின் பருவகால அசைவுகளிலும், ராண்டம் காரணங்களால் ஆண்டுக்கு ஆண்டு சிறு மாற்றங்கள் நேரக்கூடும். எனவே, சிறப்பற்ற விலக்கங்களிலிருந்து (non-significant deviations) சிறப்பான விலக்கங்களைப் (significant deviations) பிரித்துக் காண்பதற்கான முறைகளே இப்பொழுது தேவை. அதற்கான ஒரு சோதனையை—9ஆம் அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்ட—தரத்தொடர்பு

(rank correlation) முறையை யொட்டி அமைக்கலாம். இதற்கான விவரங்கள் அட்டவணை 11-6-ல் உள்ளன.[4]

அட்டவணை 11-2-ன் (6)ஆம் பத்தியிலுள்ள விவரங்களைப் போன்றவைகளே அட்டவணை 11-6-ன் (2)ஆம் பத்தியிலும் உள்ளன. டிசம்பர் மாதத்திற்கான விகிதங்கள் காலவாரியில் அமைந்துள்ளன. வெளிப்படையாக, டிசம்பர் மாதத்தில் கட்டும் தொழில் வேலை, ஆண்டுச் சராசரிக்குக் குறைவாகவே இருப்பது தெரிகிறது. கடுமையான குளிரானது, இதுபோன்ற செயலைக் கட்டுப்படுத்துகின்றது என்பது தெளிவு. கருதப்பட்ட 12 ஆண்டுகளில் பருவகாலத் தோரணியில் உண்மைப் பிறழ்ச்சி ஏற்படவில்லை என்று கொள்வோம்; அப்பொழுது, அட்டவணை 11-6-ல் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள விகிதங்களை அளவுக்குத் தகுந்தவாறு தரப்படுத்தினால், அந்த அட்டவணையின் (3)ஆம் பத்தி விவரங்கள் கிடைக்கும்; பிறழ்ச்சியே இல்லாவிடில், இந்த எண்கள் [(3)ஆம் பத்தியிலுள்ளவை] ராண்டம் முறையிலேயே அமையவேண்டும். ஆனால், டிஸம்பர் விகிதங்களில் படிப்படியான ஏற்றமொன்று இருப்பதாகத் தெரிகிறது—அந்த ஏற்றம், மற்ற மாதங்களோடு ஒப்பிட்டால், டிசம்பர் வேலை அதிகமாகிவருவதைக் காட்டும். எல்லாத் தட்பவெப்ப நிலைகளிலும் பயன்படக்கூடிய கட்டுதலுக்கான பொருள்களும் நுண்முறைகளும் ஏற்பட்டுவருவது இதுபோன்ற ஏற்றத்திற்குக் காரணமாயிருக்கக் கூடும் என்று நினைக்க ஏதுவுண்டு. ஆனால், நமக்குத் தற்சார்பற்றதொரு சோதனை தேவை. (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள தரங்களை, ராண்டம் முறையிலுள்ளவை என்று கருதமுடியுமா அல்லது அவைகள் டிசம்பர் விகிதங்களில் படிப்படியான ஏற்றமிருப்பதைக் குறிக்குமா ?

(3)ஆம் பத்தியிலுள்ள தரங்களுடன், (4)ஆம் பத்தியிலுள்ள இயற்கை எண்களை (natural numbers) ஒப்பிட்டுச் சோதனையை நிகழ்த்தலாம். (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள தரங்கள், ராண்டம் முறையில் இருப்பின், தொடர்பு கெழு (zero) ஆகும்—மாதிரி எல்லைகள் அளவில் (within sampling limits) இந்தச் சூனிய எடுகோளைச் (null-hypothesis) சோதிப்பதற்கு, கெண்டாலின் (Kendall) தரத்தொடர்புக் கெழு தகுந்ததாகும் (இந்தச் சோதனையின் அளவைகளைப்பற்றிய விவரங்களை முதற் பாகம் அதிகாரம் 9-ல் காண்க).

[4] காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வில் பராமெட்ரிக் அற்ற (non-parametric) சோதனை நிகழ்த்துவதான, இந்தக் கவனம் செலுத்தவேண்டிய எடுத்துக்காட்டை கே. ஏ. மிட்டில்டன் (K. A. Middleton) என்பவரின் டாக்டர் பட்டத்திற்கான ஆராய்ச்சிக் கட்டுரையிலிருந்து அவர் அனுமதிபெற்றுக் காட்டியுள்ளோம். அதன் தலைப்பு, 'The Estimation of Monthly Labour Force Employment and Unemployment Data for States.' இது கொலம்பியா பல்கலைக்கழக நூல் நிலையத்திலுள்ளது.

அட்டவணை 11-6-லுள்ள தரங்களிலிருந்து,

$$S = 40$$
$$s_{sc} = 14.60$$

இங்கு s_{sc} என்பது S-ன் தரப்பிழையாகும். கண்டறிந்த S-ன் மதிப்பு, முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பாகக் கருதப்பட்ட சுழியி லிருந்து சிறப்பாக வேறுபட்டுள்ளதா ? தொடர்ச்சிக்கான திருத்தம் (correction for continuity) செய்த பிறகு, மாதிரியானது, இயல் நிலைப் பரவல் என்று கருதக்கூடிய அளவிற்குப் பெரிதாக உள்ளது. எனவே, இயல்நிலை மாறிக்கான

$$T = \frac{39 - 0}{14.60} = 2.67$$

இந்த முடிவை 1 சதவீத மட்டத்தில் வைத்துப் பார்த்தால், சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி (rejec) செய்யவேண்டியதாகும். அதாவது, அட்டவணை 11-6-ல் உள்ள விவரங்கள், டிசம்பர் மாத விகிதங் களிடையே படிப்படியான மாற்றமுள்ளதற்குச் சான்று கூறு கின்றன என்று நேர்முகமாகக் கூறலாம்.

பருவகால ஆய்வில் மின்னியக்கக் கணக்கிடுதல் (Electronic Computations in Seasonal Analysis)

யு. எஸ். பியூரோ ஆஃப் தி ஸென்ஸஸ் (U.S. Bureau of the Census) என்ற நிறுவனத்தார் அண்மையில் செய்துள்ள முன்னேற் றங்கள், பருவகால ஆய்வு முறைகளை வெகுவாகச் செம்மையாக்கலாம் என்ற நம்பிக்கை தருவனவாக உள்ளன. யூனிவாக்கை (Univac)— பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதற்கும், இவைகளைச் 'சிறப் புக்கு'ச் சோதிப்பதற்கும் — பயன்படுத்துவதற்கு இப்பொழுது ஓர் ஒழுங்கான செய்முறையுள்ளது. இது (Univac) மிக வேகமான மின் னியக்கக் கணக்கிடும் எந்திரமாகும் (electronic computer); முன் பக்கங்களில் விளக்கப்பட்டதும், நகரும் சராசரிகளின் விகிதங்கள் அமைத்து 'நிலை'ச் சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவதுமான முறையின் மாற்றியமைப்பே இந்த முறை. வருவிக்கப்பட்ட அளவைகளும் நகரும் குறியீடுகளே (moving indexes) — அதாவது, ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்படும் உண்மையான பருவகாலத் தோரணி களின் மாற்றங்களையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளுமாறு அமைக்கப்பெற்றவை. முறை மிகத் திருத்தமானது; விரைவில் செய்யக்கூடியது; பொறிக்காலக் (machine time) கணக்கின்படி பார்த்தால் செலவும் குறைவானது. 10 ஆண்டுகளுக்கான மாதத் தொடர்வரிசைக்குக் குறியீடுகளை அமைத்து, பருவகாலத் தோரணிக்கான 'சிறப்பை'ச் சோதனை செய்து, திருத்தங் களின் சரிபார்த்தலையும் செய்வதற்குத் தேவைப்படும் காலம்

சுமார் 1 வினடி; செலவு சுமார் இரண்டு டாலர்கள்.[5] சாதாரணமான ஆராய்ச்சியாளருக்கு இத்தகைய வசதியிருக்காது என்ருலும், அடிப்படையான எல்லாப் பொருளாதார, சமூகத் தொடர்வரிசைகளையும், ஒரு மையமான ஃபெடரல் (federal) நிறுவனத்தில் விரைவாகப் பருவகாலச் சோதனைகளைச் செய்து, திருத்தம் தேவையாயின் திருத்தங்களும் செய்துவிடலாம் என்பது ஏற்படுகிறது.

துணை நூல்கள்

Burns, A. F. and Mitchell, W. C., 'Measuring Business Cycles,' pp. 43-55.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics,' Chaps. 17, 18.

Federal Reserve System, Board of Governors, 'Federal Reserve Bulletin,' Dec. 1953, pp. 1260-1264.

Joy, A. and Thomas, W., 'The Use of Moving Averages in the Measurement of Seasonal Variations,' 'Journal of the American Statistical Association,' Sept. 1928.

Kuznets, S., 'Seasonal Variations in Industry and Trade.'

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business,' Chap. 11.

Mendershausen, H., 'Methods of Computing and Eliminating Changing Seasonal Fluctuations,' Econometrica, July, 1937.

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., 'Business Statistics,' 3rd ed., Chap. 16.

Shiskin, J., 'A New Multiplicative Seasonal Index,' 'Journal of the American Statistical Association,' Dec., 1942.

Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H., 'Business and Economic Statistics,' pp. 356-376.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chap. 26.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும் நூலின் இறுதியிலுள்ள துணைநூற் பட்டியலில் காணலாம்.

[5] இந்தப் புதுமையின் விளக்கத்தையும், பருவகால ஆய்வை மின்னியந்த வழியில் செய்வதற்கான ஓர் எடுத்துக்காட்டையும் காண, ஜூலியஸ் ஷிஸ்கின் (Julius Shiskin) என்பவரின் 'Seasonal Computations on Univac' என்ற கட்டுரையைப் பார்க்க; வெளிவந்த இதழ்— 'The American Statistician,' பிப்ரவரி 1955.

12. காலத் தொடர்வரிசைகளின் ஆய்வு: சுழல் ஏற்ற இறக்கங்கள்

காலவாரி மாறிகளில் ஏற்படும் சுழல் ஏற்ற இறக்கங்களைக் கவனித்து அளவிடுவதில் நிகழக்கூடிய பிரச்சினைகளைப்பற்றி இந்த அதிகாரத்தில் கூறுவோம். பல பொருளாதார, சமூகவியல் ஆய்வுகளில் இத்தகைய ஏற்ற இறக்கங்கள்தாம் முக்கியமான பகுதிகளாக இருக்கும். இவைகளை அளவிடுவதைக் காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வுகளின் மையப் பகுதியாகப் பலர் கருதுகிறார்கள்.

இங்கு நாம் தனித்த (individual) காலத் தொடர்வரிசைகளின் சுழல் ஏற்ற இறக்கங்களையே கவனிப்போம். பொதுவாக, பொருளாதாரத் துறையில் நிகழும் சுழல்களுக்கும் இவைகளுக்கும் தொடர்பு இல்லாமலிருக்காது என்பது தெளிவு. பொருளாதாரத் துறையில் பொதுவாக ஏற்படும் சுழல் மாற்றங்களுக்கேற்றவாறே பல தனித்த பொருளாதாரத் தொடர்வரிசைகளிலும் சுழல் ஏற்ற இறக்கங்கள் நிகழ்கின்றன என்றே கூறவேண்டும்; ஆனால், அவை சற்றே பின்னடைவுடனோ முன்னேற்றத்துடனோ (lag and lead) அல்லது சற்றே வேறுபட்ட வீச்சுடனோ இருக்கலாம்.[1] ஆனால், ஒவ்வொரு

[1] தனித்த வரிசைகளில் நிகழும் சுழல் மாற்றங்களைக் கருதும்பொழுது, பொதுவாகப் பொருளாதாரத்துறைகளிலுள்ள சுழல்களின் தன்மையையும் மனத்தில் கொள்ளவேண்டும். பர்ன்ஸ், மற்றும் மிச்சல் (Burns and Mitchell) என்பவர்கள், இத்தகைய பொது அசைவுகளின் தனிச் சிறப்புகளை இவ்வாறு கூறியுள்ளனர்: ‘தங்கள் வேலைகளை முக்கியமாக வியாபாரத் துறையிலேயே நிகழ்த்தும் நாடுகளின் மொத்தப் பொருளாதாரச் செயல்களில் (economic activity) காணப்பெறும் ஏற்ற இறக்கங்களின் ஒருவகைதான் வியாபாரச் சுழல்கள் (business cycles); பல பொருளாதாரச் செயல்களில் ஒரே சமயத்தில் நிகழும் விரிவுகளையும் (expansions), அதற்குப்பின் நிகழும் அதே வகையான பின்னிறக்கங்களையும் (recessions), சுருக்கங்களையும் (contractions), மற்றும் அடுத்த சுழலின் விரிவுடன் ஒன்றுசேரும் முன்னேற்றங்களையும் (revivals) தன்னுள் கொண்டதுதான் ஒரு சுழல்; இத்தகைச் சுழல்கள் அடிக்கடி ஏற்படுமாயினும், காலச்சுழற்சியுடையன (periodic) அல்ல; சுழல்கள் ஓராண்டுக்கும் மேற்பட்ட காலத்திலிருந்து பத்து அல்லது பன்னிரண்டு ஆண்டுவரை கால இடைவெளியுள்ளவைகள்; அவைகளின் வீச்சுகளுடன் தோராயமான வீச்சுகளையுடையனவும், அதே தன்மையுடையனவுமான குறுகிய காலச் சுழல்களாக அவைகளைப் பிரிக்கமுடியாது.’ (பர்ன்ஸ், மற்றும் மிச்சல், து.நூ.ப. 13.)

பொருளாதார, சமூகத் தொடர்வரிசைக்கும் காலவழியில் அதற்கே தனித்தான ஒரு தோரணி (pattern) இருக்கும். அத்தகைய தனித்த தோரணிகளைக் கண்டுபிடிப்பதே நமது வேலையாகும். இதுபோன்ற கண்டுபிடிப்புகள் அந்தந்தத் தொடர்வரிசைகளை—எடுத்துக்காட்டாக, வட்டி வீதங்களின் சுழல் அசைவுகள், மொத்த விற்பனை விலைகளின் அசைவுகள், மோட்டார் கார் விற்பனைகளின் அசைவுகள்—பற்றிச் சிந்திப்பவர்களுக்குப் பயன்படக்கூடும்; அல்லது, பொதுவாக வியாபாரச் சுழல்களில் நிகழும் சிக்கலான முறைகளை அறிந்துகொள்வதற்குப் பயன்படக்கூடும்.

மீதிகளைச் 'சுழல்'களாகக் கொள்ளுதல்

நெடுங்காலமாக, சுழல் ஆய்வு முறைகளில் ஒன்று வார்ரன் பர்ஸன்ஸ் (Warren Persons, து.நூ.ப. 127) என்பவரின் பெயருடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. 1926-53 ஆண்டுகளுக்கிடையே அமெரிக்காவில் உற்பத்தியான தேனிரும்பு (pig iron) உற்பத்தி விவரங்களைக் கொண்டு இந்த முறையை விளக்குவோம். [28 ஆண்டுகளுக்கான மொத்தக் காலத்திற்கு ஆண்டுச் சராசரிகளை அட்டவணை 12-1-ல் காணலாம். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பன்னிரண்டு ஆண்டுகளுக்கான மாத விவரங்கள் அட்டவணை 12-2-ல் (2)ஆம் பத்தியில் உள்ளன.] காலவாரியான ஒரு தொடர்ச்சியில் போக்குப் பகுதியையும், பருவ காலப் பகுதியையும் 'நீக்குவது'தான் இந்த முறையின் சாரம். மீதியாக (residual) நிற்கும் அசைவுகளையே, நாம் கவனிக்க வேண்டிய சுழல் பகுதியினுடைய, ஏற்கக்கூடிய தோராயமாகக் கருதுவோம். மீதிகளில் ராண்டம் காரணிகளால் ஏற்படும் விளைவுகளும் இடம்பெற்றிருக்கும். ஆய்வு முறை முடிவுகளை விளக்கும் பொழுது அவைகளையும் கருதுவோம் [அவைகளை ஓரளவிற்கு இழைக்கலாம் (smooth)].

ஆய்வுக்காக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட தொடர்வரிசைக்குத் தகுந்த போக்குக் கோட்டை இணைப்பதே முதல் வேலை. போக்குக் கோட்டைத் தேர்ந்தெடுப்பதிலும் இணைப்பதிலும் நாம் எண்ணும் ஊகங்கள்—பிற்பாடு வரும் சுழல் தோரணிகளை விளக்குவதாகக் கருதப்படுகின்றன—அளவைகளைப் பெரிதும் பாதிக்கும். எனவே, இந்த வேலை, முடிவைத் தீர்மானிக்கின்றவாறு அமையும் முக்கியச் செயலாகும். இதைப்பற்றிப் பிற்பாடு கூறுவோம். இப்பொழுதைய நிலையில் கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு இணைப்பதற்கான தகுந்த போக்குக் கோட்டைத் தேர்ந்தெடுத்துவிட்டதாகக் கொள்வோம். ஆய்வில் மாதாந்தர விவரங்களையே பயன்படுத்தினாலும், ஆண்டு விவரங்களுக்கே போக்கை இணைப்பது நல்லதாகும்;

பிறகு மாதங்களுக்கான விவரங்களை இடையே வைத்தல் முறையினால் (interpolation) பெறலாம்.

அட்டவணை 12-1

1926-1953 ஆம் ஆண்டுகளுக்கிடையே அமெரிக்க நாட்டின் தேனிரும்பு உற்பத்தி*

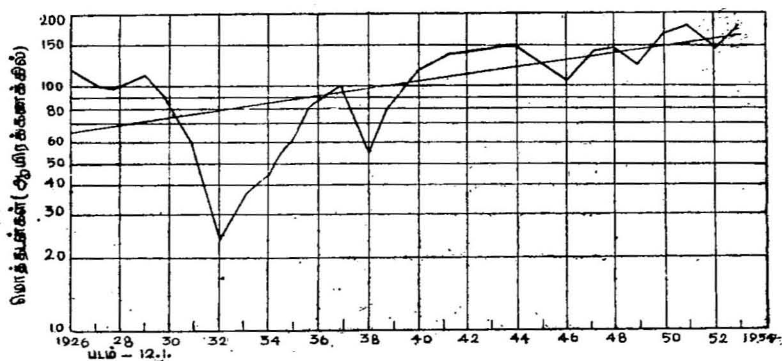
(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டு (1)	உண்மை வெளிப்பாடு (output) (2)	எக்ஸ்போனென்ஷியல் (exponential) போக்குக்கு ஏற்ற, மதிப்பிடப்பட்ட சாதாரணமான வெளிப்பாடு (3)
1926	107.0	65.4
1927	99.3	67.7
1928	103.3	70.2
1929	115.8	72.7
1930	86.1	75.4
1931	50.2	78.1
1932	23.8	80.9
1933	36.1	83.9
1934	43.6	86.9
1935	57.6	90.1
1936	83.6	93.4
1937	100.4	96.7
1938	51.4	100.3
1939	86.3	103.9
1940	114.5	107.7
1941	136.7	111.6
1942	146.3	115.6
1943	150.5	119.8
1944	151.1	124.2
1945	132.6	128.7
1946	110.8	133.3
1947	145.2	138.2
1948	148.1	143.2
1949	132.8	148.4
1950	160.0	153.8
1951	174.2	159.4
1952	151.6	165.2
1953	185.6	171.2

* 1877-லிருந்து இந்த வரிசைக்கான மாதவாரித் தகவல்களை 'ஹிஸ்டாரிகல் ஸ்ட்டாடிஸ்டிக்ஸ் ஆஃப் தி யுனைடெட் ஸ்டேட்ஸ்', (Historical Statistics of the United States), 1877—1945 என்ற நூலின் 332-3 பக்கங்களில் காணலாம்; வெளியிட்டோர்: U.S. Bureau of the Census.

போக்கு, மற்றும் பருவகாலப் பகுதிகள்: 1926-1953ஆம் ஆண்டுகளிடையே தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான ஆண்டு விவரங்

களையும், அவைகளோடு இணைக்கப்பெற்ற எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டையும் படம் 12.1-ல் காணலாம். நாட்களின் வெளிப்



அமெரிக்காவில் தேனிரும்பு உற்பத்தி, 1926-53; (நாட்களின் சராசரி) போக்குக் கோட்டுடன்.

பாடுகளின் சராசரிதான் ஆண்டு விவரங்கள் என்பதனைக் கவனிக்க வேண்டும். போக்குச் சார்பலனின் சமன்பாடு $y = 65.35537$ $(1.0363)^x$ என்பதாகும். (சார்பலன் $y = ar^x$ என்ற வகையைச் சார்ந்தது.) மூலம் 1926ஆம் ஆண்டில் கருதப்பட்டுள்ளது.[2] இத் தொடர்வரிசை, கருதப்பட்ட 28 ஆண்டுகளில், ஆண்டிற்கு 3.63 சதவீத அளவில் அதிகரித்துள்ளது என்பதனை r-ன் மதிப்பு குறிக்கிறது. அட்டவணை 12–1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உண்மையான, மற்றும் போக்கு மதிப்புகளை ஒப்பிட்டாலோ, அல்லது படத்தை நோக்கினாலோ, சராசரி வீதத்திலிருந்து ஆண்டுக்கு ஆண்டு நிகழ்ந்துள்ள மாற்றங்கள் பெரிதும் வித்தியாசப்பட்டுள்ளன என்பது தெளிவாகும்; கருதப்பட்ட கால இடைவெளி குழப்பமுள்ளதாகும். குறிக்கப்பட்ட போக்குடன், தேனிரும்பு உற்பத்தியின் இந்த இடைவெளியின் அடிப்படை அசைவுகள் சுமாராக ஒத்தாற்போல் உள்ளன.

மாதாந்தர விவரங்களைக் கூர்ந்து நோக்கினால், 1926-லிருந்து 1938 வரையுள்ள (இதற்கும் முந்திய ஆண்டுகளைக் கருதவில்லை) காலத்தில் ஒரே வகையான பருவகாலத் தோரணி யுள்ளதைக்

[2] இதுபோன்ற சார்பலனைக் குறைந்த வர்க்க முறையில் இணைக்கலாம் என்பதை 10ஆம் அதிகாரத்தில் பார்த்திருக்கிறோம்; ஆனால், சமன்பாட்டை லாகரிதமிக் முறையில்—அதாவது, $\log y = \log a + (\log r)\, x$ என்று எழுதவேண்டும். இங்கு நாம் குளோவரின் (Glover's) அட்டவணையைக்கொண்டு சற்று எளிதாக்கப்பட்டு, பாகம் I, பக்கம் 439-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடிக்குறிப்பில் உள்ள முறையைப் பின்பற்றியுள்ளோம்.

காணலாம்; இதற்குப் பிறகுள்ள காலத்தில் அத்தகைய தோரணி தென்படுவதில்லை. எனவே, முதற்பகுதிக்குமட்டும் நாம் பருவகால அசைவுகளுக்கான திருத்தங்களைச் செய்வோம். (இந்தக் காலத்திற்கான பருவகாலக் குறியீடுகளைப் பின்வரும் அட்டவணை 12–2-ல் காணலாம்.)

சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களை அளவிடுதல்

இப்பொழுது போக்கு, மற்றும் பருவகால மாற்றங்களைச் சேர்த்து, பிறகு தேனிரும்பு உற்பத்தியின் சுழல் மாற்றங்களை அளவிடும் வேலை யுள்ளது. இதற்குத் தகுந்த ஒரு முறையை அட்டவணை 12–2 விளக்கும். முறை எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் ஒன்றே ஆதலால் (பருவகாலத் திருத்தம் செய்யவேண்டுமா, வேண்டாமா என்பதைத் தவிர), எடுத்துக்காட்டில் 12 ஆண்டுகளையே கருதியுள்ளோம்; இதில் 4 ஆண்டுகளுக்குப் பருவகாலத் திருத்தங்களைச் செய்துள்ளோம். அட்டவணை 12–2-ன் (2)ஆம் பத்தியில் தேனிரும்பு உற்பத்தி மாதவாரியாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1935-38 என்ற நான்கு ஆண்டுகளின் எல்லா மாதங்களுக்கும் பருவகாலத் திருத்தம்—அந்த மாதத்தின் உண்மையான உற்பத்தியை, பருவகாலக் குறியீட்டால் (விகிதமுறை) வகுத்து—அமைத்துள்ளோம். ஆக, 1935ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாதத்தின் உண்மைச் சராசரி உற்பத்தி 47.7 ஆயிரம் டன்கள்; இது பருவகாலத் திருத்தம் செய்தபிறகு 48.2 ஆக மாறுகிறது. ஜனவரி மாதத்தின் விவரம் சாதாரணமாகக் குறைவாகவே உள்ளதால், பருவகால மாற்றங்களுக்கான திருத்தத்தின் (குறியீடு = .99) விளைவு உற்பத்தியைப் பெருக்குகிறது; பருவகால அசைவுகள் நீக்கப்பெறுகின்றன. இதற்கு மாறாக, மார்ச்சு மாதத்திற்கான பருவகாலக் குறியீடு அதிகமாக உள்ளது (1.11). எனவே, திருத்தம் செய்யும்பொழுது, உண்மையான உற்பத்தியான 57.1 ஆயிரம் டன்கள், 51.4 ஆயிரம் டன்களாகக் குறைந்துவிடுகின்றன. பருவகாலத் திருத்தங்கள் செய்யப்பட்ட அளவைகளை A_a என்ற அடையாளத்தால் குறித்து, அட்டவணை 12–2, பகுதி I-ன் (4)ஆம் பத்தியில், 1935-38 ஆண்டுகளுக்குக் கொடுத்துள்ளோம். அட்டவணை 12–2-ன் பகுதி II-ல் 1946-53 என்ற எட்டு ஆண்டுகளுக்கான விவரங்கள் உள்ளன. இவைகளுக்குப் பருவகாலத் திருத்தம் செய்யப்படவில்லை. இதற்குப் பிறகு வரும் கணக்குகளில், பகுதி II-ன் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள உண்மை உற்பத்திகளைப் பகுதி I-ன் திருத்தப்பெற்ற அளவைகளுக்குச் சமமாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

அடுத்தபடியாக, உண்மை வெளிப்பாட்டைப் (தேவையான இடங்களில் பருவகாலத் திருத்தம் செய்து) போக்கிலிருந்து வித்தியாசமானதாகக் குறிக்கவேண்டும். ஆண்டுகளுக்கான போக்கு

மதிப்புகளிலிருந்து, இடைவைத்தல் முறைகளால் (interpolation) மாதங்களுக்கான போக்கு மதிப்புகளைப் பெறுவோம். இவைகளை அட்டவணை 12-2-ன் பகுதி I-ல் (5)ஆம் பத்தியிலும், பகுதி II-ல் (3)ஆம் பத்தியிலும் காணலாம். [இந்த எடுத்துக்காட்டில், இடைவைத்தலுக்கான மாதாந்தர வீதம் 1·00298 என்பது; இஃது ஆண்டு தோறும் நிகழும் அதிகரிப்பின் பன்னிரண்டாம் அடுக்கு மூலமாகும் (twelfth root)]. போக்கிலிருந்து வரும் வித்தியாசங்களை மொத்த அளவில், அட்டவணை 12-2 பகுதி I-ன் (6)ஆம் பத்தியிலும், பகுதி II-ன் (4)ஆம் பத்தியிலும் காண்கிறோம். கடைசியாக, வித்தியாசங்களை, போக்கு மதிப்புகளின் சதவீதங்களாகக் காட்டி அட்டவணை 12-2 பகுதி I-ன் (7)ஆம் பத்தியிலும், பகுதி II-ன் (5)ஆம் பத்தியிலும் எழுதியுள்ளோம். போக்கிலிருந்து பருவகாலத் திருத்தம் செய்யப்பட்ட விவரங்களின் சதவீத விலக்கங்களை (திருத்தம் தேவையில்லாத நிலைகளில், போக்கிலிருந்து உண்மையான விவரங்களின் சதவீத விலக்கங்களை), சுழல் ஏற்ற இறக்கங்கள், மற்றும் தற்செயலாக நேரும் காரணிகளினால் ஏற்பட்டவைகள் என்று

அட்டவணை 12-2 பகுதி I

1935–38 ஆண்டுகளில் தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான காலத் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுகளை விளக்குதல்

(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டும் மாதமும்	உண்மை வெளிப்பாடு	பருவகாலக் குறியீடு (விகிதமாக)	பருவகாலத் திருத்தம் செய்த வெளிப்பாடு (A/S)	போக்கு மதிப்பு	போக்கிலிருந்து திருத்தமான வெளிப்பாட்டின் வித்தியாசம்	தேனிரும்பு உற்பத்தியில் 'சுழல்கள்'
	A	S	A_a	T	$A_a - T$	$\frac{A_a - T}{T} \times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1935						
ஜனவரி	47.7	.99	48.2	88.6	— 40.4	— 45.6
பிப்ரவரி	57.4	1.03	55.7	88.9	— 33.2	— 37.3
மார்ச்சு	57.1	1.11	51.4	89.2	— 37.8	— 42.4
ஏப்ரல்	55.4	1.09	50.8	89.4	— 38.6	— 43.2
மே	55.7	1.06	52.5	89.7	— 37.2	— 41.5
ஜூன்	51.6	1.00	51.6	90.0	— 38.4	— 42.7
ஜூலை	49.0	.93	52.7	90.2	— 37.5	— 41.6
ஆகஸ்டு	56.8	.94	60.4	90.5	— 30.1	— 33.3
செப்டம்பர்	59.2	.94	63.0	90.8	— 27.8	— 30.6
அக்டோபர்	63.8	.98	65.1	91.0	— 25.9	— 28.5
நவம்பர்	68.9	.98	70.3	91.3	— 21.0	— 23.0
டிசம்பர்	68.0	.95	71.6	91.6	— 20.0	— 21.8

அட்டவணை 12-2 பகுதி I—(தொடர்ச்சி)

1935-38 ஆண்டுகளில் தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான காலத் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுகளை விளக்குதல்

(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டும் மாதமும்	உண்மை வெளிப்பாடு	பருவ காலக் குறியீடு (விகிதமாக)	பருவ காலத் திருத்தம் செய்த வெளிப்பாடு (A/S)	போக்கு மதிப்பு	போக்கிலிருந்து திருத்தமான வெளிப்பாட்டின் வித்தியாசம்	தேனிரும்பு உற்பத்தியில் 'சுழல்கள்'
	A	S	A_a	T	$A_a—T$	$\frac{A_a-T}{T}\times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1936						
ஜனவரி	65.4	.99	66.1	91.8	— 25.7	— 28.0
பிப்ரவரி	62.9	1.03	61.1	92.1	— 31.0	— 33.7
மார்ச்சு	65.8	1.11	59.3	92.4	— 33.1	— 35.8
ஏப்ரல்	80.1	1.09	73.5	92.7	— 19.2	— 20.7
மே	85.4	1.06	80.6	92.9	— 12.3	— 13.2
ஜூன்	86.2	1.00	86.2	93.2	— 7.0	— 7.5
ஜூலை	83.7	.93	90.0	93.5	— 3.5	— 3.7
ஆகஸ்டு	87.5	.94	93.1	93.8	— 0.7	— 0.7
செப்டம்பர்	91.0	.94	96.8	94.1	+ 2.7	+ 2.9
அக்டோபர்	96.5	.98	98.5	94.3	+ 4.2	+ 4.5
நவம்பர்	98.2	.98	100.2	94.6	+ 5.6	+ 5.9
டிசம்பர்	100.5	.95	105.8	94.9	+ 10.9	+ 11.5
1937						
ஜனவரி	103.6	.99	104.6	95.2	+ 9.4	+ 9.9
பிப்ரவரி	107.1	1.03	104.0	95.5	+ 8.5	+ 8.9
மார்ச்சு	111.6	1.11	100.5	95.7	+ 4.8	+ 5.0
ஏப்ரல்	113.1	1.09	103.8	96.0	+ 7.8	+ 8.1
மே	114.1	1.06	107.6	96.3	+ 11.3	+ 11.7
ஜூன்	103.6	1.00	103.6	96.6	+ 7.0	+ 7.2
ஜூலை	112.9	.93	121.4	96.9	+ 24.5	+ 25.3
ஆகஸ்டு	116.3	.94	123.7	97.2	+ 26.5	+ 27.3
செப்டம்பர்	113.7	.94	121.0	97.5	+ 23.5	+ 24.1
அக்டோபர்	93.3	.98	95.2	97.8	— 2.6	— 2.7
நவம்பர்	66.9	.98	68.3	98.0	— 29.7	— 30.3
டிசம்பர்	48.1	.95	50.6	98.3	— 47.7	— 48.5
1938						
ஜனவரி	46.1	.99	46.6	98.6	—52.0	—52.7
பிப்ரவரி	46.4	1.03	45.0	98.9	—53.9	—54.5
மார்ச்சு	46.9	1.11	42.3	99.2	—56.9	—57.4
ஏப்ரல்	45.9	1.09	42.1	99.5	—57.4	—57.7
மே	40.5	1.06	38.2	99.8	—61.6	—61.7
ஜூன்	35.4	1.00	35.4	100.1	—64.7	—64.6
ஜூலை	38.8	.93	41.7	100.4	—58.7	—58.5
ஆகஸ்டு	48.2	.94	51.3	100.7	—49.4	—49.1
செப்டம்பர்	56.0	.94	59.6	101.0	—41.4	—41.0
அக்டோபர்	66.2	.98	67.6	101.3	—33.7	—33.3
நவம்பர்	75.7	.98	77.2	101.6	—24.4	—24.0
டிசம்பர்	71.3	.95	75.1	101.9	—26.8	—26.3

அட்டவணை 12-2 பகுதி II

1946-53 ஆண்டுகளில் தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான காலத் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுகளை விளக்குதல்

(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டும் மாதமும்	உண்மை வெளிப்பாடு A	போக்கு மதிப்பு T	போக்கிலிருந்து உண்மை வெளிப்பாட்டின் வித்தியாசம் A—T	தேனிரும்பு உற்பத்தியில் 'சுழல்கள்' $\frac{A-T}{T} \times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1946				
ஜனவரி	76.2	131.2	— 55.0	— 41.9
பிப்ரவரி	36.6	131.6	— 95.0	— 72.2
மார்ச்சு	127.4	132.0	— 4.6	— 3.6
ஏப்ரல்	107.6	132.4	— 24.8	— 18.7
மே	70.4	132.8	— 62.4	— 47.0
ஜூன்	109.6	133.2	— 23 6	— 17.7
ஜூலை	135.5	133.6	+ 1.9	+ 1.4
ஆகஸ்டு	141.1	134.0	+ 7.1	+ 5.3
செப்டம்பர்	139.5	134.4	+ 5.1	+ 3.8
அக்டோபர்	138.7	134.8	+ 3.9	+ 2.9
நவம்பர்	132.0	135.2	— 3.2	— 2.4
டிசம்பர்	115.0	135.6	— 20.6	— 15.2
1947				
ஜனவரி	146.5	136.0	+ 10.5	+ 7.7
பிப்ரவரி	145.1	136.4	+ 8.7	+ 6.4
மார்ச்சு	147.5	136.8	+ 10.7	+ 7.8
ஏப்ரல்	143.7	137.2	+ 6.5	+ 4.7
மே	146.4	137.6	+ 8.8	+ 6.4
ஜூன்	143.2	138.0	+ 5.2	+ 3.8
ஜூலை	132.1	138.4	— 6.3	— 4.6
ஆகஸ்டு	141.6	138.8	+ 2.8	+ 2.0
செப்டம்பர்	142.9	139.3	+ 3.6	+ 2.6
அக்டோபர்	155.6	139.7	+ 15.9	+ 11.4
நவம்பர்	149.3	140.1	+ 9.2	+ 6.6
டிசம்பர்	149.1	140.5	+ 8.6	+ 6.1
1948				
ஜனவரி	147.7	140.9	+ 6.8	+ 4.8
பிப்ரவரி	147.2	141.3	+ 5.9	+ 4.2
மார்ச்சு	144.6	141.8	+ 2.8	+ 2.0
ஏப்ரல்	114.3	142.2	— 27.9	— 19.6
மே	146.2	142.6	+ 3.6	+ 2.5
ஜூன்	148.5	143.0	+ 5.5	+ 3.8
ஜூலை	141.1	143.5	— 2.4	— 1.7
ஆகஸ்டு	151.4	143.9	+ 7.5	+ 5.2
செப்டம்பர்	155.0	144.3	+ 10.7	+ 7.4
அக்டோபர்	159.0	144.7	+ 14.3	+ 9.9
நவம்பர்	160.7	145.2	+ 15.5	+ 10.7
டிசம்பர்	161.2	145.6	+ 15.6	+ 10.7

அட்டவணை 12-2 பகுதி II—(தொடர்ச்சி)

1946-53 ஆண்டுகளில் தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான காலத் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுகளை விளக்குதல்

(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டும் மாதமும்	உண்மை வெளிப்பாடு A	போக்கு மதிப்பு T	போக்கிலிருந்து உண்மை வெளிப்பாட்டின் வித்தியாசம் A—T	தேனிரும்பு உற்பத்தியில் 'சுழல்கள்' $\frac{A-T}{T} \times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1949				
ஜனவரி	164.9	146.0	+ 18.9	+ 12.9
பிப்ரவரி	166.5	146.5	+ 20.0	+ 13.7
மார்ச்சு	167.6	146.9	+ 20.7	+ 14.1
ஏப்ரல்	164.6	147.3	+ 17.3	+ 11.7
மே	158.9	147.8	+ 11.1	+ 7.5
ஜூன்	143.4	148.2	— 4.8	— 3.2
ஜூலை	120.2	148.7	— 28.5	— 19.2
ஆகஸ்டு	128.9	149.1	— 20.2	— 13.5
செப்டம்பர்	129.5	149.5	— 20.0	— 13.4
அக்டோபர்	17.6	150.0	—132.4	— 88.3
நவம்பர்	81.0	150.4	— 69.4	— 46.1
டிசம்பர்	150.7	150.9	— 0.2	— 0.1
1950				
ஜனவரி	152.5	151.3	+ 1.2	+ 0.8
பிப்ரவரி	133.1	151.8	— 18.7	— 12.3
மார்ச்சு	132.5	152.2	— 19.7	— 12.9
ஏப்ரல்	166.0	152.7	+ 13.3	+ 8.7
மே	168.6	153.1	+ 15.5	+ 10.1
ஜூன்	167.6	153.6	+ 14.0	+ 9.1
ஜூலை	169.3	154.1	+ 15.2	+ 9.9
ஆகஸ்டு	166.2	154.5	+ 11.7	+ 7.6
செப்டம்பர்	169.6	155.0	+ 14.6	+ 9.4
அக்டோபர்	170.6	155.4	+ 15.2	+ 9.8
நவம்பர்	160.3	155.9	+ 4.4	+ 2.8
டிசம்பர்	164.0	156.4	+ 7.6	+ 4.9
1951				
ஜனவரி	169.7	156.8	+ 12.9	+ 8.2
பிப்ரவரி	165.0	157.3	+ 7.7	+ 4.9
மார்ச்சு	173.3	157,8	+ 15.5	+ 9.8
ஏப்ரல்	175.2	158.2	+ 17.0	+10.7
மே	177.8	158.7	+ 19.1	+12.0
ஜூன்	177.9	159.2	+ 18.7	+11.7
ஜூலை	174.8	159.6	+ 15.2	+ 9.5
ஆகஸ்டு	174.6	160.1	+ 14.5	+ 9.1
செப்டம்பர்	175.3	160.6	+ 14.7	+ 9.2
அக்டோபர்	178.5	161.1	+ 17.4	+10.8
நவம்பர்	175.9	161.6	+ 14.3	+ 8.8
டிசம்பர்	172.2	162.0	+ 10.2	+ 6.3

அட்டவணை 12·2 பகுதி II—(தொடர்ச்சி)

1946 - 53 ஆண்டுகளில் தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான காலத் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுகளை விளக்குதல்

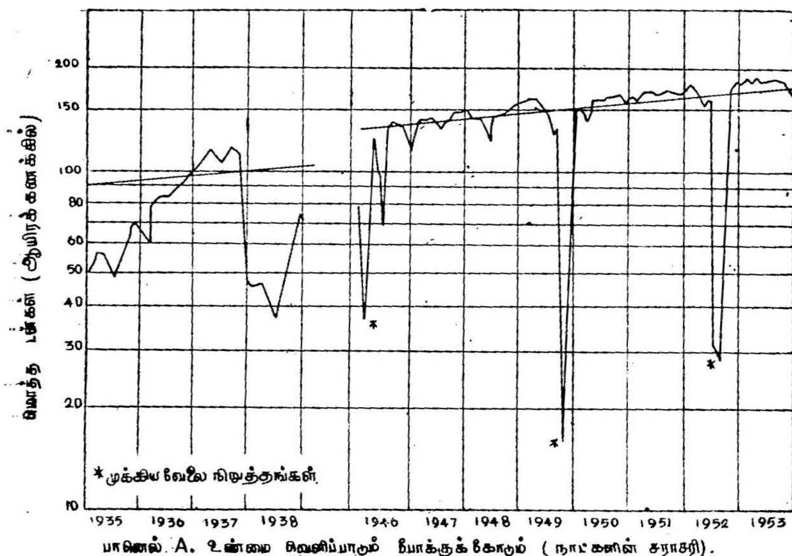
(நாட்களின் சராசரி, ஆயிரம் மொத்த டன்கள் கணக்கில்)

ஆண்டும் மாதமும்	உண்மை வெளிப்பாடு A	போக்கு மதிப்பு T	போக்கிலிருந்து உண்மை வெளிப்பாட்டின் வித்தியாசம் A—T	தேனிரும்பு உற்பத்தியில் 'சுழல்கள்' $\frac{A-T}{T} \times 100$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1952				
ஜனவரி	174.0	162.5	+ 11.5	+ 7.1
பிப்ரவரி	178.1	163.0	+ 15.1	+ 9.3
மார்ச்சு	181.5	163.5	+ 18.0	+11.0
ஏப்ரல்	155.5	164.0	— 8.4	— 5.2
மே	158.2	164.5	— 6.3	— 3.8
ஜூன்	31.8	165.0	—133.2	—80.7
ஜூலை	28.9	165.4	—136.5	—82.5
ஆகஸ்டு	167.9	165.9	+ 2.0	+ 1.2
செப்டம்பர்	183.5	166.4	+ 17.1	+10.3
அக்டோபர்	187.6	166.9	+ 20.7	+12.4
நவம்பர்	185.3	167.4	+ 17.9	+10.7
டிசம்பர்	187.5	167.9	+ 19.6	+11.7
1953				
ஜனவரி	189.1	168.4	+ 20.7	+12.3
பிப்ரவரி	187.6	168.9	+ 18.7	+11.1
மார்ச்சு	192.3	169.4	+ 22.9	+13.5
ஏப்ரல்	185.4	169.9	+ 15.5	+ 9.1
மே	189.7	170.4	+ 19.3	+11.3
ஜூன்	189.7	170.9	+ 18.8	+11.0
ஜூலை	187.7	171.4	+ 16.3	+ 9.5
ஆகஸ்டு	186.4	172.0	+ 14.4	+ 8.4
செப்டம்பர்	184.6	172.5	+ 12.1	+ 7.0
அக்டோபர்	187.2	173.0	+ 14.2	+ 8.2
நவம்பர்	180.4	173.5	+ 6.9	+ 4.0
டிசம்பர்	166.5	174.0	— 7.5	— 4.3

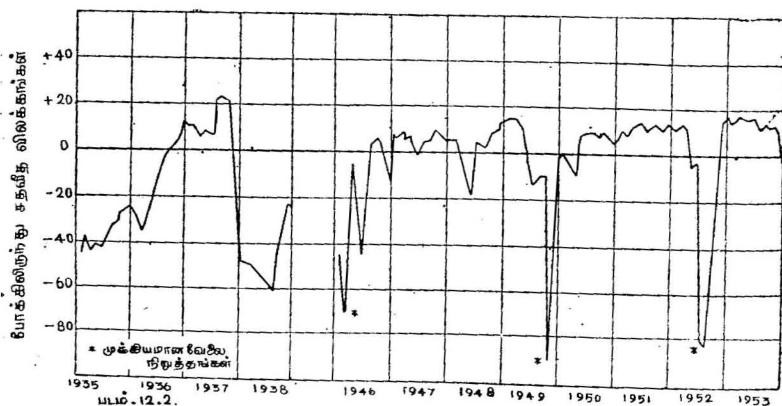
கருதுவோம். [சில சமயங்களில், மூன்று அல்லது ஐந்து மாதங் களுக்கான நகரும் சராசரியைப் (moving average) பயன் படுத்தியோ, 'கையாலேயே' இழைத்தோ, தற்செயலான காரணி களின் விளைவுகளைக் குறைப்பதும் உண்டு.] இந்த முறையில் ஆய்வு செய்யப்பட்டுக் கிடைக்கும் வித்தியாசங்களைச் 'சுழல்கள்' என்று குறிப் பிடுவோம்; இங்குச் சுழல் விளைவுகளே அன்றி மற்ற வகை விளைவு களும் உள்ளதால், மேற்கோள் குறிகளைப் பயன்படுத்துதல் நல்லது.

காலத் தொடர்வரிசையை இந்த முறையில் பகுப்பதில் உள்ளடங்கிய கருதுகோள்களைக் (assumptions) கவனிக்கவேண்டும். ராண்டம் காரணங்களோ, பருவகால விளைவுகளோ, சுழல் விளைவு களோ இல்லாமலிருந்தால், அடிப்படையான போக்கு நமக்குத் தருகிற T என்ற மதிப்புதான் உண்மையான மதிப்பாக இருக்கும் என்று எண்ணுவதாகிறது. சுழல், மற்றும் ராண்டம் காரணங் களால் ஏற்படும் விளைவுகள், இந்தப் போக்கு மதிப்புகளுடன் கூடுதல் செய்யப்பெற்று உண்மையான மதிப்புகளான (பருவகால விளைவுகள் இல்லாமலிருந்தால்) A-களையோ, அல்லது (பருவகால விளைவுகள் இருப்பின்) A_o-களையோ தரும் எனக் கருதுகிறோம். இரண்டாவது நிலையில், பருவகாலக் காரணியானது A_oஐ ஒரே சதவீத அளவால் கூட்டியோ குறைத்தோ அந்த மாதத்தின் கண்டறிந்த மதிப்பைத் தரும் என்றும் கருதுகிறோம். நம் ஆய்வு முறை, இந்த அமைப்பைத் தலைகீழாக ஆக்குகிறது—எனவே, A-யிலிருந்து A_oஐப் பெறுகிறோம்; போக்குச் சார்பலனிலிருந்து கிடைக்கும் எதிர்பார்க்கப்படுகிற மதிப்பொன்றிலிருந்து A_o-ன் விலக்கத்தைக் காண்கிறோம். குறித்த பல விசைகள் எவ்வாறு இயங்குகின்றன என்பதைப்பற்றி வேறு பல கருதுகோள்களை அமைத்துக்கொண்டால், மேற்கண்ட ஆய்வு முறையிலும் மாற்றம் ஏற்படக்கூடும். ஆனால், செய்முறையின் இந்தப் பகுதியில் ஏற்படும் மாறுதல்கள், முடிவான அளவைகளை வெகுவாகப் பாதிக்காது.

மேலே விளக்கப்பட்ட முறைகளை வரைபடமாக, படம் 12.2-ல் காணலாம். மேற்பகுதியான பானெல் A-யில் (Panel A) தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட இரண்டு காலங்களுக்குமான உண்மை மாதாந்தர விவரங்களும் போக்குக் கோடும் உள்ளன. (1926–1953 ஆண்டு களின் விவரங்களைக்கொண்டுதான் போக்குக் கோடு கணக்கிடப் பட்டது என்பதை அறிவோம்; படம் 12.1-ஐப் பார்க்க). கீழே இருக்கும் பானெலில், அட்டவணை 12-2-ன் கடைசிப் பத்தியில்



பானெல் A. உண்மை வெளிப்பாடும் போக்குக் கோடும் (நாட்களின் சராசரி).



படம். 12.2.

பானெல் B. தேனிரும்பு உற்பத்தியில் ' சுழல்கள் ': போக்கிலிருந்து விலக்கங்கள் (பருவகாலத் திருத்தங்களுக்குப் பிறகு, 1935-38)

மாதாந்தரத் தேனிரும்பு உற்பத்தி, 1935-1938, 1946-1953.

இருக்கும்—போக்கிலிருந்து சதவீத வித்தியாசங்களான—இறுதி அளவைகளைக் காணலாம்.[3]

போக்கிலிருந்து தேனிரும்பு உற்பத்தியின் சதவீத விலக்கங்களைக் கவனிப்போம்; 1935-லும், 1936ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்திலும் வெகு குறைவான நிலையிலிருந்து ஒரு மறுமலர்ச்சி (revival) தோன்றுவதைக் காணலாம். இந்த மறுமலர்ச்சி, காலத் தொடர்வரிசையை 1936ஆம் ஆண்டு செப்டம்பரில் போக்குக் கோட்டிற்கும் மேலே கொண்டுசென்றுள்ளது. 1937ஆம் ஆண்டு ஆகஸ்டு மாதம் ஒரு பெருமம் நிகழ்ந்துள்ளது; அப்பொழுது தேனிரும்பு உற்பத்தி சராசரிக்குச் சுமார் 27 சதவீதம் அதிகம். இதற்குப் பிறகு, திடீரென்று நிகழ்ந்த தீவிரமானதொரு பின்னிறக்கம் (recession) ஏற்பட்டு, உற்பத்தியானது 1938ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்தில் ஒரு சிறுமத்தை எட்டியது; அப்பொழுது ‘ சராசரி ’யிலிருந்து 67 சதவீதம் குறைவான உற்பத்தி இருந்தது. பிறகு மீண்டும் ஒரு மறுமலர்ச்சி தொடங்கியுள்ளது. யுத்தத்திற்குப் பிறகு தேனிரும்பு உற்பத்தியைக் கவனிப்போம். 1946ஆம் ஆண்டு தொடக்கத்திலும், 1949 அக்டோபரிலும், 1952ஆம் ஆண்டு நடுக்கோடைக்காலத்திலும் நிகழ்ந்த மூன்று முக்கியமான—ஆனால் சீக்கிரம் முடிவுற்ற—வேலை நிறுத்தங்களினால், உற்பத்தி மிகக் குறைவான நிலைகளுக்கு இறங்கிவிட்டது. இவைகளை நீக்கிவிட்டால்—மற்றபடி 1945ஆம் ஆண்டு இறுதியிலும், 1946ஆம் ஆண்டு துவக்கத்திலும் ஏற்பட்ட குறுகிய காலப் பின்னிறக்கத்திற்குப் பிறகு நிகழ்ந்த மறுமலர்ச்சியின் காரணத்தால் செயல்திறனின் ‘ நிலை ’ அதிகமாகவேயுள்ளது; இந்த நிலையையொட்டியே சிறு அளவுகள்கொண்ட ஏற்றவிறக்கங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. வேலை நிறுத்தங்களும் தற்செயலாக நேரும் காரணங்களுடன் சேர்க்கப்பட வேண்டியவை. இவைகளின் விளைவுகளை விட்டுவிட்டால், சராசரிக்குக் குறைவான செயல் ஏற்பட்ட காலம் 1949ஆம் ஆண்டில் மட்டும்தான் ஆகும்.

இதே கால இடையில், பொதுவாக வியாபாரத் துறையில் நிகழ்ந்த அசைவுகளுடன் இந்தத் தகவல்களை ஒப்பிட்டுப்பார்ப்பது பயனளிக்கும். ஒவ்வொரு தனித் தொடர்வரிசைக்கும், குறிப்பான இயக்கத் தோரணி (behaviour pattern) இருக்கும் என்பதனை

[3] மற்றக் காலத் தொடர்வரிசைகளின் ‘ சுழல் ’களுடன் ஒப்பிடுவதற்கு ஏற்றவாறு போக்கிலிருந்து சதவீத விலக்கங்களை மாற்றி அமைப்பது நல்லது. நிறுவப்பெற்ற சதவீத விலக்கங்கள் ஒரு தொடர்வரிசைக்கு அதிகமான வீச்சுடனும், மற்றதற்குக் குறைவான வீச்சுடனும் அமையலாம்; இரண்டிற்கும் பொதுவான ஓர் அடிப்படையில்லாவிட்டால் ஒப்பிடுவது சிரமமாகும். தரவிலக்கத்தை (standard deviation) அத்தகைய பொதுவான அடிப்படையாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியிலுமுள்ள மாதாந்தர விலக்கங்களை (போக்கிலிருந்து) அத் தொடர்ச்சியின் தரவிலக்கத்தை அலகாகக்கொண்டு மதிப்பிடுவதால், ஒப்பிடக்கூடிய அளவைகளைப் பெறலாம்.

முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். எனவே, தேனிரும்பு உற்பத்தியில் நிகழ்ந்துள்ள ' சுழல்கள் ', பொது வியாபாரத்தில் காணப்படும் மாற்றங்களுக்குத் தோராயமாக ஒத்தனபோல் இருந்தால்தான் அவைகள் செல்லுபடியாகும் என்று கூறுவதாகாது. என்றாலும், பொதுத் தோரணியுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பது—ஒற்றுமைகளைக் காட்டினாலும், வேற்றுமைகளைக் காட்டினாலும்—நமக்குப் பயனளிப்ப தாகவே இருக்கும். இந்த எடுத்துக்காட்டில், சுமாராக நெருங்கிய ஒற்றுமையுள்ளது.[4] பொது வியாபாரத்தில், 1937 மே மாதத்தில் ஒரு பெருமம் ஏற்பட்டது; 1938ஆம் ஆண்டில் திடீரென்று ஓர் இறக்கம் ஏற்பட்டு, அந்த ஆண்டின் மே மாதத்தில் ஒரு சிறுமம் நிகழ்ந்தது; பிறகு மறுமலர்ச்சிதான். 1946-53ஆம் ஆண்டுகளுக்கான பதிவேடு, அதிகமான செயலையே பொதுவாகக் காட்டுகிறது; இது 1949-ல் தடைப்பெற்று, தேனிரும்பு தொடர்வரிசையைப்போலவே, 1953ஆம் ஆண்டு நடுவிற்குப் பிறகு குறைந்துவிடுகிறது.

1926ஆம் ஆண்டுக்கும் 1953ஆம் ஆண்டுக்கும் இடையேயுள்ள காலத்தின் மாதாந்தரத் தேனிரும்பு உற்பத்தித் தகவல்களின் முழு விவரங்களின் வடிவத்தை மேற்கண்ட, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 12 ஆண்டுகளுக்குமட்டுமான போக்கு விலக்கங்களின் வடிவ விளக்கம், முழுமையாக எடுத்துக்காட்டாது என்பதனைப் படிப்பவர் உணர்வார். குறுகிய இந்தப் பதிவேடு, முறையின் தன்மையை ஆராயத் தகுதியான அடிப்படையை ஏற்படுத்தாது. இருந்தாலும், இங்குக் கிடைக்கும் தகவல்களுடன், 14ஆம் அதிகாரத்தில் இதே பொது முறையையொட்டி அமெரிக்கன் டெலிபோன் அண்ட் டெலிகிராப் கம்பெனியாரால் (American Telephone and Telegraph Company) கணக்கிடப்பட்ட தொழிற் செயல் குறியீட்டைப்பற்றிய விவாதத்தையும் சேர்த்து நோக்கலாம். கணக்கிடப்பட்ட நெடுங் காலப் போக்கிலிருந்து நிகழும் சதவீத விலக்கங்களை—தொழிற் செயல்களின் ஏற்றவிறக்கங்களுக்கானவை—படம் 14·2 காட்டு கிறது; அதை நன்கு கவனிக்கவும்.

மீதிகளைச் ' சுழல் 'களாகக் கொள்வதைப்பற்றிய குறிப்பு

அட்டவணை 12-2-ன், பகுதி I-ன் (7)ஆம் பத்தியில், 1937ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதத்திற்கான விவரத்தைப் பார்க்க. எடுத்துக் காட்டில் கணக்கிடப்பெற்ற போக்கு, சார்பலனால் குறிக்கப்பட்ட ' சராசரி'யிலிருந்து, உண்மையான தேனிரும்பு உற்பத்தி—பருவ காலத் திருத்தத்திற்குப் பிறகு—5 சதவீதம் அதிகமாயுள்ளதைக் காட்டுகிறது. தேனிரும்பு உற்பத்தித் தொடர்வரிசையில் சுழல்

[4] அட்டவணை 12-3-ல் (பக்கம் 42) பொதுவாக வியாபாரத்தின் சுழல் பெருமசிறுமங்களுக்கான காலங்களைக் காணலாம்.

பகுதியை இது காட்டுவதாக நாம் கருதியுள்ளோம்; அதே சமயம், இதில் ராண்டம் காரணிகளின் இயக்கமும் இடம்பெற்றிருக்கலாம் என்பதையும் கவனித்துள்ளோம். எனவே, இப்பொழுது இந்த வகையைச் சார்ந்த ஏனைய மீதிகளைப்பற்றியும் ஆராய்தல் முறையாகும்.

போக்கினை விளக்க தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சார்பலனாலும், இணைப்பதற்குக் கருதப்படும் கால இடைவெளியாலும், இணைப்பு முறை (குறைந்த வர்க்கமுறை போன்றவை)களாலும், இந்த நிறுவப்பெற்ற அளவைகள் ஒவ்வொன்றும் பாதிக்கப்படவே செய்யும். மற்றும், பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடக் கருதப்பட்ட கால இடைவெளியாலும், கணக்கிடும் முறைகளாலும், மாருத பருவகாலக் குறியீடுகளா, மாறும் குறியீடுகளா என்பதைப்பற்றிய ஆய்வாளரின் முடிவினாலும்கூட இவை பாதிக்கப்பெறும். இறுதியாக, கண்டறிந்த விவரங்களைப் பருவகாலப் போக்கு, மற்றும் சுழல்-ராண்டம் பகுதிகளாக எந்த வழியில்—அதாவது, கண்டறிந்த, உண்மையான உற்பத்தியை விளைவிக்க அடிப்படையான விசைகள் எவ்வாறு ஒன்றோடொன்று மோதுகின்றன என்ற கருதுகோள்களாலும்—பிரிக்கிறோம் என்பதனாலும் அவை பாதிக்கப்பெறும்.

இவையெல்லாவற்றையும் மனத்தில் வைத்துக்கொண்டு, தேனிரும்பு உற்பத்தியில் உண்மையான—ஆனால் நமக்குத் தெரியாத—போக்கு ஒன்று இருப்பதாகவும், பருவகாலத் தோரணியொன்று இருப்பதாகவும், தற்போதைக்குக் கருதுவோம். அப்பொழுது மேலே எடுத்துக்காட்டாகக் கருதப்பெற்ற மார்ச்சு 1937-க்குகந்த மீதி கீழ்க்கண்டவைகளால் ஏற்பட்டது என்று குறிக்கலாம் :

(*a*) சுழற் பகுதி;

(*b*) ராண்டம் பகுதி—போக்கு, பருவகால, சுழல் விசைகளல்லாத மற்ற எல்லா விசைகளின் ஆக்கம்;

(*c*) போக்கு விளக்கத்தில் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய பிழைகளைக் குறிப்பிடும் பகுதி;

(*d*) பருவகாலத் தோரணியைத் தீர்மானிப்பதில் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய பிழைகளைக் குறிப்பிடும் பகுதி;

(*e*) முதல் நிலை (original) வரிசையைப் பிரிவுகளாக்குவதில் ஏற்பட்டிருக்கும் பிழைகளைக் குறிப்பிடும் பகுதி.

(*c*), (*d*) என்ற பகுதிகளை விளைவிக்கும் தனிப்பட்ட காரணிகளைப் பற்றி முன்பே விளக்கியுள்ளோம். போக்குச் சார்பலன் தேர்ந்தெடுப்பது ஒரு வகையில் தன்னிச்சை (arbitrary) ஆனதே; குறிப்

பிட்ட ஒரு சார்பலனுங்கூட, அஃது எந்தக் கால இடைவெளிக்கு இணைக்கப்படுகிறது என்பதையொட்டியும், இறுதியாண்டுகளாக எவைகளைக் கருதுகிறோம் என்பதையொட்டியும் வெவ்வேறு போக்கு மதிப்புகளை ஒரு குறித்த மாதத்திற்கோ, ஆண்டிற்கோ கொடுக்கும். படம் 12.1ஐக் கூர்ந்து நோக்கவும்; முதல் ஆண்டை 1926 ஆகக் கொள்ளாமல், 1932 ஆக எடுத்துக்கொண்டிருப்பதால் வேறு இணைப்பு கிடைத்திருக்கும் என்பது தெரியவரும்.[5]

எனவே, மீதிகளும், அவைகளைப் போலவே நிறுவப்பட்ட அளவைகளும் போக்குச் சார்பலன் தேர்ந்தெடுப்பினாலும், இணைப்பைப் பொறுத்துக் கொள்ளப்படும் காலத்தினாலும் பாதிக்கப்படும் என்பது தெளிவு. சொல்லப்போனால், இணைப்பினால் எத்தகைய சுழல்கள் நிகழும் என்பதைக் கொண்டு ஆய்வாளர், சார்பலன் மற்றும் அதை இணைக்கும் முறைகளுக்கான தம் முடிவை மாற்றிக் கொள்வார். பருவகால விளைவுகளுக்கான திருத்தங்கள் அமைப்பதற்கான பல முடிவுகளும் தம்மிச்சையானவைகளே. பருவகால விளைவுகள் சிக்கலானவை; ஏனென்றால், பல தொடர்வரிசைகளுக்கு அவை திடீரென்று மாறிவிடக் கூடும். (*b*), (*c*), (*d*) என்ற பகுதிகளின் அளவு தீர்மானிக்க முடியாதவைகளாதலால், பட்டியலில் (*a*) பகுதிக்கான ‘ சுழல் ’களைப்பற்றிய விளக்கங்கள் சற்றே உறுதியற்றவைகளாகவே தாம் அமையும்.

(*e*) என்ற பகுதியால் குறிக்கப்படும் பிரச்சினை இவைகளைக் காட்டிலும் அடிப்படைத் தன்மையுடையதாகும். உண்மையான கண்டறிந்த விவரங்களைச் சிந்தனையற்ற முறையில் (mechanical) பிரிப்பதைத்தான் இந்தப் பகுதியில் விளக்கியுள்ள முறை செயலாக்குகிறது. இந்த முறையைக் கையாளும்பொழுது நம் மனத்தில் இருக்கும் கருத்து—காலவரிசையின்மேல் இயங்கும் பல விசைகளின் விளைவுகள் சிந்தனையின்றிச் சேர்க்கப்பெற்றுள்ளன என்பதே. அதாவது, சார்பற்ற (independent) போக்கின் மேல், சுழல்-ராண்டம் விளைவொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது; மற்றும் இவைகளின் கூட்டானது சார்பற்ற பருவகால விசையின் இயக்கத்திற்குட்பட்டது என்பதே.[6] காலமாற்றங்கள் இத் தன்மையுடையனவாக

[5] இணைக்கப்பட்டிருக்கும் போக்குக் கோடு 1927ஆம் ஆண்டைச் சராசரிக்கு அதிகமான தேனிரும்பு உற்பத்திக்கான செயலுள்ளதாகக் குறிப்பிடுகிறது என்பதையும், நேஷனல் பியூரோ (National Bureau) நிறுவனத்தாரின் சுழல்வரிசைகளில் அதே ஆண்டு டிசம்பரில் ஒரு சுழற் பள்ளம் இருப்பதையும் கவனிக்கலாம். (அட்டவணை 12-3-ஐப் பார்க்க.) ஆனால், அந்தச் சுழல் மிகச் சிறிதானதே.

[6] ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் தனியான ஒரு மதிப்பைக் கூட்டுவதாலோ, குறைப்பதாலோ, பருவகாலத் திருத்தங்கள் அமைக்கப்படுமானால், பருவகாலக் காரணியும் சார்பற்றதே என்று பொருள்படும். மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டியுள்ளதைப்போல், பெருக்கல் வழியில் கருதினால், மிக எளிய முறையில் அமைந்த சார்பைக் குறிப்பதாகும்; ஏனென்றால், திருத்தத்தின் மொத்த அளவு எந்த அடிப்படைக்கு அது பொருத்தப்படுகிறதோ அதன் அளவைப் பொறுத்து இருக்கும்.

இல்லாதிருப்பது சாத்தியமானதும் நிகழக்கூடியதுமான ஒன்று. ஒன்ருேடொன்று தொடர்பற்ற பல விசைகள் இயங்கி, எளிதில் பிரிக்கமுடியாத ஒரு கலவையை (amalgam) சமூகப் பொருளாதார முன்னேற்றங்களிலும், தனித்த தொடர்வரிசைகளின் வளர்ச்சியிலும், சிதைவிலும் நிகழ்த்தக்கூடும். அதுபோன்ற கலவையைச் சிந்தனையின்றிப் பல பகுதிகளாகப் பிரிப்பது, பற்பல விசைகளின் இயக்கங்களின் முடிவுகளான விவரங்களுக்குத் தீங்கு செய்வதாகும்.

காலவழியில் அமைந்த தொடர்வரிசைகளில் இயங்குகின்ற காரணிகளிடையே தொடர்பு உள்ளது என்பதை எடுத்துக்காட்ட பல சான்றுகள் உள்ளன. வில்லர்ட் தார்ப் (Willard Thorp) [து.நூ.ப. 157] என்பவர் கீழ்க்கண்ட விவரங்களைத் தந்துள்ளார்; இவை மொத்த விற்பனை விலைகளின் போக்கிற்கும், அமெரிக்காவின் வியாபாரச் சுழல்களின் அமைப்பிற்குமுள்ள பொருத்தத்தை நன்கு எடுத்துக்காட்டும் :

காலம்	மொத்த விற்பனை விலை மட்டத்தின் போக்கு	ஒரு மந்த ஆண்டுக்கான செழுமையான ஆண்டுகள்
1790—1815	ஏறும் விலைகள்	2.6
1815—1849	இறங்கும் விலைகள்	0.8
1849—1865	ஏறும் விலைகள்	2.9
1865—1896	இறங்கும் விலைகள்	0.9
1896—1920	ஏறும் விலைகள்	3.1

வியாபாரச் சுழலின் மைய நிலையும்—ஒவ்வொரு சுழலையும் செழுமைத் (prosperity) தோற்றம், மந்தத் (depression) தோற்றங்களாகப் பிரிவாக்குதலையும்—விலை மட்டத்தின் போக்கால் அடிப்படையாகவே பாதிக்கப்படுகிறது. ரயில்வேத் தொழிலின் வளர்ச்சியின் போக்கில் மாற்றம் ஏற்பட்டபொழுதெல்லாம், அத் தொழிலின் முதலீட்டுச் (investment) சுழல் தோரணியிலும் மாற்றங்கள் நிகழ்ந்துள்ளதை ஏ. எஃப். பர்ன்ஸ் (A. F. Burns) என்பவர் குறிப்பிட்டுள்ளார். ரயில்வேத் தொழிலில் வளர்ச்சி வேகமாக இருக்கும்பொழுது, அத் தொழில் முதலீடானது, அமெரிக்காவின் மறுமலர்ச்சியைக் காட்டிலும் கணிசமான இடைவெளியுடன் முன்னேட்டத்தில் (lead) இருந்தது. வளர்ச்சியின் வேகம் குறையக் குறைய—இந்தத் தொழில் வியாபாரச் சுழல்களில் செயல் நிலையிலிருந்து செயற்படா நிலைக்கு மாறும்பொழுது—முன்னேட்ட அளவும் குறைந்துகொண்டேவந்து, இறுதியில் மறைந்துபோயின. போக்குகளுக்கும் சுழல்களுக்குமுள்ள தொடர்பைப் போலவே, பருவகாலத் தோரணிகளுக்கும் சுழல்களுக்கும் தொடர்புள்ளதைக் காட்டலாம். எனவே, பருவகாலக் காரணிகளும் சுழல் காரணிகளும் நெருங்கிய

தொடர்புடையனவாக இருக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, 1941-க்கு முன்புள்ள காலங்களில் எஃகு கட்டிகளின் உற்பத்தியிலுள்ள பருவகாலத் தோரணியானது, செழுமைக் காலங்களிலும் மந்த காலங்களிலும் வெவ்வேருக இருந்தது. எஃகு தொழில் 95 சத வீத ஆற்றலுடன் (capacity) இயங்கிக்கொண்டிருந்தபொழுது மிக அதிகமான மாத உற்பத்திக்கும், மிகக் குறைவான மாத உற்பத்திக்கு மிடையே உள்ள எஃகுகட்டி வெளிப்பாட்டின் வீச்சு, அந்த ஆண்டுச் சராசரியின் 11·50 சதவீதமாயிருந்தது; 40 சதவீத ஆற்றலுடன் இயங்கும்பொழுது, வீச்சு அந்த ஆண்டுச் சராசரியின் 25·75 சதவீதமாக இருந்தது. வியாபாரம் மந்த நிலையில் இருக்கும் பொழுது, பருவகாலத் தோரணி சிறப்பாகிறது.[7]

எனவே, காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வு முடிவுகளைக் கூறுகையில் மிகுந்த ஜாக்கிரதையுடன் இருத்தல் சரியானதே. இப்படிக் கூறு வதால், மேற்கண்ட முறைகளைத் தள்ளிவிடவேண்டும் என்ருே நிறுவப்பட்ட அளவைகளையெல்லாம் ஏற்க மறுக்கவேண்டுமென்ருே பொருளாகாது. அலைபோன்ற உயர்தல் தாழ்தல்களின் கழிவான முன்னேற்ற அசைவுகளையோ (அல்லது இறக்கச் சரிவுகளையோ) அல்லது தொடர்ச்சியான அடிப்படை அசைவுகளையோ குறிப்பவை யாக அமையும் போக்குகள் உண்மையானவைகளே. எல்லாச் செய் முறைகளிலுமே பருவகால ஏற்றவிறக்கங்கள் ஆழமாகப் பதிந் துள்ளன. சமூக, பொருளாதார மாற்றங்களின் பல தோற்றங் களில் எடுத்துக்காட்டத்தக்க அளவில் சுழல்களும் உள்ளன. இந்த அதிகாரத்திலும், முன் இரண்டு அதிகாரங்களிலும் நாம் ஆய்வு முறைகளைக் கூறியுள்ளோம்; விரிவடைதல்—சுருங்குதல், வளர்ச்சி—அழிதல் முதலான சிக்கல் நிறைந்த பிரச்சினைகளை அறிந்துகொள்வதற்கும் விவரிப்பதற்கும் பயன்படும் எளிய முறைகளே இவைகள். இவைகளை மிகத் திருத்தமான அளவை களாகக் கருதாமல், தோராயங்களாகவே கருதுவதால், ஆராய்ச்சி களிலும் நிர்வாகத் துறைகளிலும் இந்த முறைகள் பெரிதும் பயன் தருபவைகளாக அமையலாம்.

வியாபாரச் சுழல்களை அளவிடுதல்: நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச்சாரின் முறை

நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் (National Bureau of Economic Research) நிறுவனத்தார் பொருளாதாரக் காலத்தொடர் வரிசைகளின் அசைவுகளிலேற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கு

[7] ஜூலிபர், ஜி. எஸ். (Juliber, G. S.), 'Relation between Seasonal Amplitudes and the Level of Production,' Journal of the American Statistical Association, Dec. 1941.

மற்றுமொரு முறையை நிறுவியுள்ளனர். இதன் முழு விளக்கத்தையும் ஆர்தர் எஃப். பர்ன்ஸ், மற்றும் வெஸ்லி ஸி. மிச்சல் என்பவர்களின் நூலில் (து.நூ.ப.13) காணலாம். இந்த முறை முக்கியமாகக் காலத் தொடர்வரிசைகளில் சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களை ஆராய்வதற்கே ஏற் பட்டது. அந்த முறை பயனுடையது என்பது நிருபிக்கப்பட்டுள்ள தால் அது பொதுவான புள்ளியியல் முறைகளில் ஒரு கருவியாகிறது.

நேஷனல் பியூரோவினரின் முறை, தனிப்பட்ட காலத் தொடர் வரிசைகளுக்கான கீழ்க்கண்ட இரு கேள்விப் பிரிவுகளுக்கு விடை யளிப்பதற்கு முனைகிறது:

(a) பொதுவாக வியாபாரத்திலுள்ள அடுத்தடுத்த சுழல்களில் (குறைவான அல்லது அதிகமான மாற்றங்களுடன்) திரும்பத் திரும்ப நிகழ்கின்ற மாற்றங்களின் தோரணி குறிப்பிட்ட இந்தத் தொடர்வரிசையிலும் உள்ளதா? இருப்பின், அதன் தனித் தன்மைகள் யாவை ?

(b) இந்தத் தொடர்வரிசைக்குமட்டும் சிறப்பான அலை அசைவுகள் உள்ளனவா ? இருப்பின், அவற்றின் தனித்தன்மைகள் யாவை ?

பொதுவாக, பொருளாதாரத்தில் அடுத்தடுத்து ஏற்படும் விரிவு—சுருக்கங்களின் அலைகள் நிகழும்பொழுது, குறித்த தொடர் வரிசைகளின் நடக்கையைப் (behaviour) பற்றிய பிரச்சினைகள் (a)-ல் உள்ளன. வேறு விரிவான எந்தச் சட்டத்திற்கும் (framework) ஒப்பிடாது, அந்தத் தனித்த தொடர்வரிசையில்மட்டும் நிகழும் காலச்சுழற்சியுடைய அல்லது சுமாராகக் காலச்சுழற்சி யுடைய (periodic and semiperiodic) அசைவுகளுக்கானவை (b)-ல் இடம் பெறுகின்றன. [இதுபோன்ற குறிப்பிட்ட 'சுழல்' களைக் (specific cycles) கண்டுபிடிக்கும்பொழுது, பொதுப் படையான வியாபாரத்தையும் சற்றுக் கருதியது போலாகிறது— ஏனென்றால், நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தாரின் வியாபாரச் சுழல்களின் கருத்துடன், இந்தக் குறிப்பிட்ட சுழல்களும் ஒத்த வாறு அமையவேண்டும்; அதாவது, தோராயமாக, ஓராண்டுக்கு மேலான காலத்திலிருந்து பத்து அல்லது பன்னிரண்டு ஆண்டு வரை சுழலின் காலம் இருக்கவேண்டும்.] இந்த அதிகாரத்தின் முதற் பகுதியில் விளக்கப்பட்டுள்ள தரமான (standard) செய் முறையின் நோக்கம், இங்கு இரண்டாம் பிரிவுக் கேள்விகளுக்கு விடை காண்பதன் நோக்கத்திற்கு மிக நெருங்கியுள்ளது. (a)- யினடியில் இருக்கும் பிரச்சினைகள் புதுமையான, மற்றும் வேற்றுமை யான நோக்கத்தையுடையவை. முதலில் இவைகளைப்பற்றி ஆராய் வோம்.

குறிப்புச் சுழல்களை அளவிடுதல்; குறிப்புச் சட்டம்
(Measurement of Reference Cycles; the Reference Framework)

(a)-யினடியில் இருக்கும் கேள்விகளுக்கு விடை காண முதல்படி, பொதுவான வியாபாரச் செயலில் நிகழ்கின்ற காலவழிப் பள்ளங்களையும் ஏற்றங்களையும் காட்டுகின்ற ஒரு குறிப்புச் சட்டத்தைத் தயாரித்தலே. இஃது அமெரிக்கா, பிரிட்டன், ஃபிரான்ஸ், மற்றும் ஜெர்மனி என்ற நான்கு நாடுகளில் செய்யப் பட்டுள்ளது. கருதிய நான்கு நாடுகளின் அளவின, பண்பின வியாபாரப் பதிவேடுகளை விரிவாக ஆராய்ந்த பின்பே, பொருளா தாரச் செயலின் (economic activity) திரும்பு முனைகளாகிய (turning points) இவைகளுக்கு விளக்கங்கூற முடிந்தது. வியா பாரத்தைப்பற்றிய விவரங்கள் குறிக்கப்பெற்ற அந்தந்தக் காலத்திய செய்தித்தாள், வியாபார வெளியீடுகள், மற்றும் பல பதிவேடுகள் விரிவாக ஆராயப்பட்டன.[8] இந்த ஆராய்ச்சிகளை அடிப்படை யாகக் கொண்டு தாற்காலிகமாகப் (provisional) பள்ளங்களின் மற்றும் ஏற்றங்களின் காலங்களைக் குறித்தார்கள். புள்ளியியல் வரிசைகளைப்பற்றிய விரிவான தொகுப்புகளைக் கொண்டு இவை களைத் திருத்தப் பார்த்தனர்; மேன்மேலும் விவரங்கள் கிடைத்த பொழுது இவைகளைத் தேவைப்பட்டபொழுது மாற்றியும் திருத்தியும் அமைத்தனர். எனவே, ஒவ்வொரு நாட்டிற்கும் ஏற்படுத்தியுள்ள வியாபாரச் சுழல்களின் காலவரிசைப் பட்டியைச் (chronology) 'சட்ட' மாகக் கொண்டு, தனித்த காலத் தொடர்வரிசைகளின் சுழல் நடக்கை களை ஆராய முடியும். காலவரிசைகள், மாதாந்தர அல்லது காலாண்டுக்கான அல்லது வருடாந்தர வழிகளில் இருக்கக் கூடுமாதலால், இந்தக் காலவரிசைப் பட்டியும் அதே கால அளவு களில் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. மாதாந்தர விவரங்கள்தாம் மிகத் திருத்தமான பகுப்பாய்வுக்குப் பயன்படுபவை; அவைகளே பல தகவல்களைத் தருபவையுங்கூட. அட்டவணை 12-3-ல், 1854-1954ஆம் காலத்திற்கான மாதாந்தர, வருடாந்தரக் குறிப்புக் காலங்களைக் காணலாம்.[9]

வியாபாரச் சுழல்களின் காலவரிசைப் பட்டியலையே தனியாகவும் ஆராயலாம். அமெரிக்காவில் 1854ஆம் ஆண்டு டிசம்பரிலிருந்து, 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபர்வரை 23 சுழல்கள் நடந்து முடி வடைந்தன என்பதை, இப் பட்டியலிலிருந்து அறிகிறோம். இந்தக்

[8] டபிள்யூ. எல். தார்ப் அவர்களின் நூலைப் பார்க்க (து.நா.ப. 157).

[9] அமெரிக்க நாட்டில் காலாண்டுகளுக்கான குறிப்புக் காலங்களை, பர்ன்ஸ் மற்றும் மிச்சல் என்பவர்களின் நூலின் (து.நா.ப. 13) 78ஆம் பக்கத்தில் காணலாம்.

குறிப்புச் சுழல்களின் சராசரிக் காலம் 49 மாதங்கள்.[10] விரிவுக்கான காலங்களின் சராசரி 29 மாதங்கள்—அல்லது, முழுச் சுழலின் 59 சதவீதம்; சுருக்கங்களின் சராசரிக் காலம் குறைவாகவே—20 மாதங்களாகவே—இருந்தன; அல்லது சுழலின் 41 சதவீதம். இந்தச் சராசரிகளிலிருந்து தனித்த சுழல்கள் பெரிதும் மாறுபட்டிருந்தன. ஆக, மொத்தச் சுழல்களுக்கான காலங்கள் 29 மாதங்களிலிருந்து (1919ஆம் ஆண்டு ஏப்ரல் மாதத்தின் பள்ளத்திலிருந்து 1921ஆம் ஆண்டு செப்டம்பர் பள்ளம்வரை) 99 மாதங்கள்வரை (1870ஆம் ஆண்டு டிசம்பர், 1879ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதங்களுக்கான பள்ளங்களினிடையே) வேறுபட்டிருந்தன.[11]

[10] குறிப்புச் சுழல் (Reference Cycle) என்பது அடுத்தடுத்து நிகழும் பள்ளங்களினிடையே (அல்லது ஏற்றங்களினிடையே) உள்ள கால இடைவெளியைக் குறிப்பிடும். ஒரு தனித்த வரிசையில்—தேனிரும்பு உற்பத்தி வரிசையில் என்போம்—அந்த இரு காலங்களுக்குள் நிகழும் பகுதிக்கும் இதே சொற்றொடரை ஏற்றதாகப் பயன்படுத்துவோம்.

[11] பிரிட்டன் நாட்டின் கால வரிசைப்படி 1938 வரை அமைக்கப் பெற்றுள்ளது. இதன் சுழல்களின் சராசரிக் காலம், அமெரிக்காவினுடையதை விடச் சற்று அதிகமானது.

பிரிட்டன் நாட்டில் 1854-1938-க்கிடையே நிகழ்ந்த வியாபாரச் சுழல்களின் குறிப்புக் காலங்களும், அளவு காலங்களும்

மாதாந்தரக் குறிப்புக் காலங்கள்				மாத அளவில் காலங்களின் அளவு			குறிப்பு ஆண்டுகள்	
ஏற்றம்		பள்ளம்		விரிவு*	சுருக்கம்†	முழுச் சுழல்	ஏற்றம்	பள்ளம்
		டிசம்.	1854				1854	1855
செப்.	1857	மார்ச்சு	1858	33	6	39	1857	1858
செப்.	1860	டிசம்.	1862	30	27	57	1860	1862
மார்ச்சு	1866	மார்ச்சு	1868	39	24	63	1866	1868
செப்.	1872	ஜூன்	1879	54	81	135	1873	1879
டிசம்பர்	1882	ஜூன்	1886	42	42	84	1883	1886
செப்.	1890	பிப்ரவரி	1895	51	53	104	1890	1894
ஜூன்	1900	செப்.	1901	64	15	79	1900	1901
ஜூன்	1903	நவம்பர்	1904	21	17	38	1903	1904
ஜூன்	1907	நவம்பர்	1908	31	17	48	1907	1908
டிசம்பர்	1912	செப்.	1914	49	21	70	1913	1914
அக்டோ.	1918	ஏப்ரல்	1919	49	6	55	1917	1919
மார்ச்சு	1920	ஜூன்	1921	11	15	26	1920	1921
நவம்பர்	1924	ஜூலை	1926	41	20	61	1924	1926
மார்ச்சு	1927	செப்.	1928	8	18	26	1927	1928
ஜூலை	1929	ஆகஸ்டு	1932	10	37	47	1929	1932
செப்.	1937	செப்.	1938	61	12	73	1937	1938

* முன்வரிசையின் பள்ளத்திலிருந்து ஏற்றத்திற்கு.

† அதே வரிசையின் ஏற்றத்திலிருந்து பள்ளத்திற்கு.

தனித்த தொடர்வரிசைகளின் குறிப்புச் சுழல் தோரணிகளின் விளக்கம் (The Description of Reference Cycle Patterns in Individual Series).

1904-லிருந்து 1953 வரைக்கான ரயில்வே சரக்கு ஏற்றங்களை (freight) டன்-மைல் (ton-miles) அளவுகளில் மாதவாரியாக அட்டவணை 12-4-ல் காணலாம். பகுப்பாய்வில் முதலாவதாகச் செய்ய வேண்டியது என்னவென்ருல், பருவகால அசைவுகள் தொடர்வரிசையில் இருப்பின், அவைகளை அளவிட்டு நீக்குவதாகும்.

சரக்கு ஏற்ற டன்-மைல்களின் பருவகால மாறுபாட்டுத் தோரணி, ஆய்வுக்குக் கருதப்படுகிற 50 ஆண்டுகளில் மாறியுள்ளது. இலையுதிர் கால மாதங்களில்தான் (fall months) அதிகமான போக்குவரத்து உள்ளது; குளிர்காலங்களில் குறைவு. ஆனுல், தனித்த மாதங்களின் அளவுகளில் மிகுந்த வேறுபாடுகள் உள்ளன. அட்டவணை 12-5-ல் நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தாரால் பயன்படுத்தப்பட்ட பருவகாலக் குறியீடுகளைக் காணலாம்; அங்குப் பருவகால மாற்றங்களுக்கான திருத்தங்கள் அமைக்கப்பட்ட முறையும் விளக்கப்பெற்றுள்ளது.

தனித்த ஒரு மாதத்தின் மதிப்பை, அதே மாதத்தின் பருவகாலக் குறியீட்டால் (தசமப் புள்ளியை இரண்டு எண்கள் இடப் பக்கத்திற்குத் தள்ளியபிறகு) வகுப்பதே பருவகாலத் திருத்தங்களை நிகழ்த்துவது; இதனை நாம் முன்பே படித்துள்ளோம். அதாவது, 1948ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாதத்திற்கான திருத்தப்பெற்ற அளவைப் பெற, 51.266 என்பதை 0.95ஆல் வகுத்து 53.96 என்று கண்டுபிடிக்கிறோம். இந்தப் பருவகாலத் திருத்தங்கள் செய்வதால் பருவகால அசைவுகளே இல்லாமலிருந்தால் பதிவாகியிருக்கக்கூடிய விவரங்கள் கிடைக்குமென்று எதிர்பார்க்கக்கூடாது என்று நிறுவனம் எச்சரிக்கை செய்கிறது. அதுபோன்று தொடர்வரிசையைப் பிரிப்பது சாத்தியமில்லை என்று நினைக்கின்றனர். எனினும், அவ்வகைத் திருத்தங்களைத் தகுந்த இடங்களில் செய்வதால், சுழல் அசைவுகளை ஆய்வதற்கும் ஒப்பிடுவதற்கும் உதவக்கூடிய அளவைகளைப் பெறுவோம்; இவைகளில் முதனிலைத் தொடர்வரிசையில் இருந்ததைக் காட்டிலும் நன்கு விளங்கக்கூடிய வகையில் அசைவுகளைக் காணமுடியும். பருவகாலத் திருத்தங்கள் அமைக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையைப் பின்பு ஆராய்வோம்.

அட்டவணை 12-3-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பள்ளம், ஏற்றங்களின் காலங்களால் அமைந்த சட்டத்தை வைத்துக்கொண்டு, குறிப்பிட்ட காலத் தொடர்வரிசையின் நடக்கையை ஆராயவேண்டும். இதனை முதலில் படமூலமாகச் செய்வது நல்லது; குறிப்புச் சட்டத்தில், இது போன்ற பருவகாலத் திருத்தம் அமைக்கப்பெற்ற (பருவகாலத்

அட்டவணை 12-3

அமெரிக்காவில் 1854-1954களுக்கிடையே நிகழ்ந்த வியாபாரச் சுழல்களின் குறிப்புக் காலங்களும் அளவு காலங்களும்

மாதாந்தரக் குறிப்புக் காலங்கள்* முதலாவது பள்ளம்		ஏற்றம்		இறுதியான பள்ளம்		மாத அளவில் காலங்களின் அளவு விரிவு	சுருக்கம்	முழுச்சுழல்	குறிப்பு ஆண்டுகள் பள்ளம்	ஏற்றம்	பள்ளம்
டிசம்பர்	1854	ஜூன்	1857	டிசம்பர்	1858	30	18	48	1855	1856	1858
டிசம்பர்	1858	அக்டோ.	1860	ஜூன்	1861	22	8	30	1858	1860	1861
ஜூன்	1861	ஏப்ரல்	1865	டிசம்பர்	1867	46	32	78	1861	1864	1867
டிசம்பர்	1867	ஜூன்	1869	டிசம்பர்	1870	18	18	36	1867	1869	1870
டிசம்பர்	1870	அக்டோ.	1873	மார்ச்சு	1879	34	65	99	1870	1873	1878
மார்ச்சு	1879	மார்ச்சு	1882	மே	1885	36	38	74	1878	1882	1885
மே	1885	மார்ச்சு	1887	ஏப்ரல்	1888	22	13	35	1885	1887	1888
ஏப்ரல்	1888	ஜூலை	1890	மே	1891	27	10	37	1888	1890	1891
மே	1891	ஜனவரி	1893	ஜூன்	1894	20	17	37	1891	1892	1894
ஜூன்	1894	டிசம்பர்	1895	ஜூன்	1897	18	18	36	1894	1895	1896
ஜூன்	1897	ஜூன்	1899	டிசம்பர்	1900	24	18	42	1896	1899	1900
டிசம்பர்	1900	செப்.	1902	ஆகஸ்டு	1904	21	23	44	1900	1903	1904
ஆகஸ்டு	1904	மே	1907	ஜூன்	1908	33	13	46	1904	1907	1908
ஜூன்	1908	ஜனவரி	1910	ஜனவரி	1912	19	24	43	1908	1910	1911
ஜனவரி	1912	ஜனவரி	1913	டிசம்பர்	1914	12	23	35	1911	1913	1914
டிசம்பர்	1914	ஆகஸ்டு	1918	ஏப்ரல்	1919	44	8	52	1914	1918	1919
ஏப்ரல்	1919	ஜூன்	1920	செப்.	1921	9	20	29	1919	1920	1921
செப்.	1921	மே	1923	ஜூலை	1924	20	14	34	1921	1923	1924
ஜூலை	1924	அக்டோ.	1926	டிசம்பர்	1927	27	14	41	1924	1926	1927
டிசம்பர்	1927	ஜூன்	1929	மார்ச்சு	1933	18	45	63	1927	1929	1932
மார்ச்சு	1933	மே	1937	மே	1938	50	12	62	1932	1937	1938
மே	1938	பிப்ரவரி	1945	அக்டோ.	1945	81	8	89	1938	1944	1946
அக்டோ.	1945	நவம்பர்	1948	அக்டோ.	1949	37	11	48	1946	1948	1949
அக்டோ.	1949	ஜூலை	1953*	ஆகஸ்டு	1954†				1949	1953†	1954†

* அண்மையில் குறிப்புக் காலங்களில் கீழ்க்கண்ட திருத்தங்களைச் செய்துள்ளனர்: 1921ஆம் ஆண்டு செப்டம்பருக்குப் பதிலாக ஜூலை, 1927-ல் டிசம்பருக்குப் பதிலாக நவம்பர்; 1938-ல் மேயுக்குப் பதிலாக ஜூன்.

† முதனிலை அளவுகள் : இவைகள் திருத்தப்படவேண்டியதாதலால், இவைகளை அடிப்படையாகச் சுழல்களுக்கான அளவைகளாக அமைக்கவில்லை.

அட்டவணை 12–4

ரயில்வே சரக்கு ஏற்றங்கள்; 1904 - 1954 ஆண்டுகளின் மாதாந்தர டன்-மைல்கள்*
(பில்லியன் டன்-மைல் கணக்கில்)

	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919
ஜனவரி	14.55	15.69	18.55	19.89	18.03	18.69	20.58	21.17	21.33	26.43	23.93	21.76	28.87	31.51	28.78	31.00
பிப்ரவரி	14.80	15.24	19.08	20.19	17.71	18.62	21.33	20.81	22.53	26.88	23.12	22.53	29.87	31.76	29.91	28.75
மார்ச்சு	14.92	15.66	18.68	20.03	17.38	18.97	21.90	20.49	23.19	25.52	23.61	22.88	30.74	30.01	34.18	26.54
ஏப்ரல்	14.80	16.38	17.87	20.55	17.23	19.10	22.13	20.66	22.10	24.22	23.48	22.90	29.44	31.06	36.71	27.89
மே	14.84	16.53	17.93	21.36	17.02	19.00	21.79	21.16	22.01	25.27	22.17	23.26	27.43	34.95	36.43	30.16
ஜூன்	14.85	16.70	18.49	21.37	16.98	19.24	21.71	21.16	22.56	25.65	22.33	23.62	26.49	36.40	35.34	
ஜூலை	14.73	16.55	18.54	21.18	17.61	19.78	21.30	20.69	22.95	24.75	23.08	24.09	27.61	34.85	33.59	
ஆகஸ்டு	14.84	16.65	18.68	21.12	18.02	20.22	21.08	20.82	23.08	24.80	23.10	24.00	28.66	32.29	33.45	
செப்டம்பர்	15.33	17.08	18.56	20.49	18.37	20.63	21.18	21.22	22.90	24.18	23.22	24.84	28.64	30.22	34.12	
அக்டோபர்	15.45	17.20	18.57	20.12	18.73	20.91	20.89	21.16	23.48	24.26	23.13	26.44	28.40	30.01	32.41	
நவம்பர்	15.46	17.48	18.84	19.87	18.61	21.18	20.81	21.12	24.89	24.65	22.14	28.33	29.73	31.13	31.29	
டிசம்பர்	15.85	17.89	19.15	18.80	18.72	20.72	21.10	21.33	25.84	24.52	21.68	29.64	30.60	30.84	31.41	

	1919	1920	1921	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932
ஜனவரி		35.0	29.8		23.74	34.02	30.61	33.12	33.65	34.80	32.32	35.26	32.90	27.29	20.40
பிப்ரவரி		33.0	24.9		25.45	29.46	32.13	30.56	31.88	33.42	32.14	34.67	31,16	24.55	19.52
மார்ச்சு	28.8	37.9	26.8		29.47	35.30	32.97	31.91	35.35	37.62	35.43	36.04	31.65	27.13	21.19
ஏப்ரல்	28,6	28.6	25.6		22.29	34.79	29.09	30.35	32.93	33.49	32.15	34.92	31.46	25.96	19.06
மே	32.3	37.9	28.2		25.06	35.99	30.52	33.16	35.70	36.17	35.62	37.80	32.99	26.90	17.88
ஜூன்	31.9	38.2	28.1		26.48	34.23	28.76	32.78	35.72	34.83	33.80	36.67	31.16	25.75	16.81
ஜூலை	34.9	40.4	28.4		24.69	34.52	29.92	34.47	37.93	34.43	35.39	38.10	32.38	27.64	17.10
ஆகஸ்டு	36.4	42.7	30.4	27.53	27.88	36.20	32.63	37.67	39.74	38.16	38.57	41.05	34.04	26.90	18.09
செப்டம்பர்	38.7	41.0	30.9	27.85	31.67	35.44	35.45	37.99	40.66	39.01	39.63	40.42	33.61	25.72	20.83
அக்டோபர்	40.4	42.6	36.7	32.62	36.01	38.28	39.27	40.37	43.93	41.58	44.93	44.03	36.23	27.62	24.15
நவம்பர்	32.5	37.3		26.85	34.72	34.69	34.76	37.24	40.36	34.28	38.59	35.38	29.62	23.00	19.90
டிசம்பர்	33.4	34.7		23.26	32.81	30.59	33.05	34.91	36.65	31.37	34.66	32.87	26.65	20.66	19.22

	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948
ஜனவரி	18.01	21.53	22.40	25.04	29.86	23.81	25.56	29.68	32.94	42.96	55.13	60.49	56.81	48.23	53.29	51.27
பிப்ரவரி	17.31	20.92	21.81	26.31	29.05	21.07	23.11	27.16	31.19	40.81	54.42	59.31	55.42	45.08	48.49	50.20
மார்ச்	17.37	24.94	24.59	25.30	33.41	23.59	26.03	28.20	37.24	48.25	61.23	62.66	64.38	52.39	56.15	49.83
ஏப்ரல்	17.79	21.09	21.32	25.22	29.46	20.69	21.66	27.43	28.96	49.99	59.04	60.29	61.37	37.41	50.70	46.48
மே	19.81	22.69	22.08	26.91	30.99	21.50	23.29	30.31	39.72	54.29	62.15	61.10	64.18	39.46	56.13	56.40
ஜுன்	21.54	22.68	23.13	26.23	29.15	21.81	25.88	30.12	40.68	53.85	57.96	61.71	62.53	49.78	53.42	54.92
ஜுலை	24.10	21.86	20.83	28.31	30.60	23.82	27.26	31.17	42.85	56.96	63.74	62.54	60.68	51.92	51.03	52.73
ஆகஸ்ட்	24.14	22.81	23.38	29.17	30.75	25.24	28.73	33.50	45.49	58.63	65.10	64.45	56.79	55.84	58.01	56.31
செப்டம்பர்	23.83	23.36	25.42	30.21	31.98	26.72	33.36	34.19	44.31	58.16	62.54	61.15	52.66	52.92	56.11	55.42
அக்டோபர்	24.18	24.26	28.50	34.08	33.72	30.03	37.29	36.02	47.73	62.16	65.22	63.84	49.78	57.39	61.06	59.06
நவம்பர்	21.75	21.70	25.12	31.12	26.88	26.27	32.55	33.14	42.63	56.98	59.86	59.38	49.77	51.93	56.16	53.27
டிசம்பர்	19.95	20.98	23.71	31.03	24.82	25.60	28.69	32.28	41.31	55.04	60.61	57.18	46.29	49.57	54.13	49.40

	1949	1950	1951	1952	1953	1954
ஜனவரி	45.90	39.24	53.85	52.23	48.97	43.75
பிப்ரவரி	42.51	34.28	45.91	51.46	45.60	41.34
மார்ச்சு	44.10	47.88	55.93	53.20	50.77	44.72
ஏப்ரல்	46.96	46.72	53.97	49.76	50.30	43.52
மே	48.01	48.35	56.12	51.72	53.43	46.90
ஜுன்	45.01	48.98	53.75	45.02	52.69	46.20
ஜுலை	41.83	49.04	50.57	42.34	51.31	45.06
ஆகஸ்டு	45.33	56.51	57.26	54.14	54.64	
செப்டம்பர்	41.81	54.94	55.23	55.70	51.94	
அக்டோபர்	38.24	58.92	59.44	55.79	54.69	
நவம்பர்	43.33	52.19	54.31	54.35	47.91	
டிசம்பர்	42.85	51.46	50.20	49.13	43.54	

* இந்தத் தொகுப்பையும், அதனின்று நிறுவிய அளவைகளையும் உதவிய நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் நிறுவனத்தாருக்கு எனது நன்றி உரித்தாகும்.

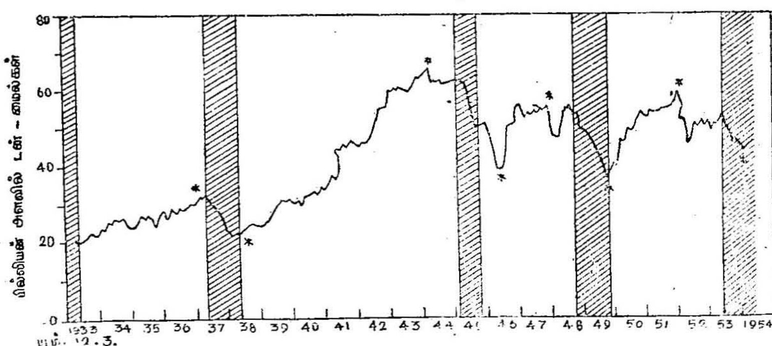
நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் பயன்படுத்திய முதன்மை விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட நான்கு மூலங்களிலிருந்து கிடைத்தவை : தி பாப்ஸன் ஸ்டாடிஸ்டிகல் ஆர்கெனிஸேஷன் (The Babson Statistical Organisation), (1866-1922); தி அமெரிக்கன் ரெயில்வே அஸோஸியேஷன் (The American Railway Association), (1907-14); தி பியூரோ ஆஃப் ரெயில்வே எக்கனமிக்ஸ் அண்ட் தி இன்டர்ஸ்டேட் காமர்ஸ் கமிஷன் (The Bureau of Railway Economics and the Interstate Commerce Commission), 1916-24 தி இன்டர்ஸ்டேட் காமர்ஸ் கமிஷன்; (The Interstate Commerce Commission, 1920-54. இரண்டாம், மூன்றும் பிரிவுகளில் மட்டும் வருவாயற்ற (non-revenue) சரக்கு ஏற்றங்களும் சேர்ந்துள்ளன; ஆனால், இந்த வித்தியாசம் பகுதிகளை ஒப்பிடுவதைப் பாதிப்பதாக இல்லை. அட்டவணை 12-4-ன் சில இடங்களில் ஒரே ஆண்டு விவரங்கள் இருமுறை கொடுக்கப்பெற்றிருக்கும்; இது பகுதிகளை (ஒன்றின்மேல் ஒன்றாக வைத்து)ப் பிணைப்பதற்கு உதவும்.

அட்டவணை 12-5

சரக்கு டன்-மைல்களின் பருவகாலத் திருத்தங்கள், 1918ஆம் ஆண்டுக்கு

		உண்மையான சரக்கு டன்-மைல்கள் (பில்லியன்களில்)	பருவகாலக் குறியீடு	பருவகாலத் திருத்தம் செய்யப்பெற்ற சரக்கு டன்-மைல்கள் (பில்லியன்களில்)
ஜனவரி	...	51.266	95	53.96
பிப்ரவரி	...	50.204	88	57.05
மார்ச்சு	...	49.830	104	47.91
ஏப்ரல்	...	46.476	96	48.41
மே	...	56.396	103	54.75
ஜூன்	...	54·918	100	54 92
ஜூலை	...	52.735	95	55.51
ஆகஸ்டு	...	56.308	107	52.62
செப்டம்பர்	...	55.425	104	53 29
அக்டோபர்	...	59.064	112	52.74
நவம்பர்	...	53·269	101	52 74
டிசம்பர்	...	49.400	96	51.46

தோரணியில்லையானால், திருத்தம் செய்யாத) விவரங்களைக் குறிக்கலாம். 1933-54 காலங்களுக்கான இத்தகைய குறிப்புகளைப் படம் 12.3-ல் காணலாம். [படத்தில் 1954வரை தொடர்ச்சியாகக் கொடுக்கப்



படம் 12.3.

ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள், அமெரிக்காவில் 1933-54 ஆண்டுகளுக்கிடையே சுருக்கங்கள், விரிவுகளுக்கான குறிப்புத் தோற்றங்களுடன்.

பட்டிருந்தாலும், இந்த நூலை எழுதும்பொழுது (1955-ல்), 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபரின் பள்ளத்திற்கப்பால் குறிப்பு ஆண்டுகள் திட்டமாக்கப்பெறவில்லை.] குறிப்பு, பள்ளங்கள், ஏற்றங்களுக்கான ஆண்டு

களைச் செங்குத்துக் கோடுகளால் காட்டியுள்ளது; வெள்ளைப் பகுதிகள் (white areas) பொது வியாபார விவரத் தோற்றங்களையும், வரை கோட்டுப் பகுதிகள் (shaded areas) பொது வியாபாரச் சுருக்கத் தோற்றங்களையும் குறிக்கும். (படம் 12.3-ல் உள்ள * குறிகள், சரக்கு டன்-மைல் தொடர்வரிசைக்குமட்டும் சிறப்பான பள்ளங் களையும் ஏற்றங்களையும் குறிக்கும்; இவைகளைக் கீழே விளக்குவோம்.) இவ்வாறு படத்தில் அமைப்பதால், பொது வியாபாரச் சுழல்களுக்கும், சரக்கு டன்-மைல்களுக்கும் பொருத்தம் நன்ருகவே உள்ளது என அறியலாம். சரக்கேற்றங்களின் பருமத்தில் (volume) அதிகமாகி வரும் போக்கு ஒன்று தெரியவருகிறது என்பது உண்மை; இந்த முன்னேற்றம் அடுத்தடுத்து வரும் அலைகளாக அமைந்துள்ளது; அந்த அலைகளின் ஏற்றவிறக்கங்கள், பொது வியாபாரச் செயலின் திரும்புமுனைகளுடன் (turning points) காலவழியில் ஒத்தவாறு அமைந்துள்ளன எனத் துணியலாம். இந்தக் குறிப்புச் சட்டத்தில் சரக்கு டன்-மைல்களின் நடக்கையைப்பற்றிய தற்சார்பற்ற (objective) அளவைகள் தேவையாஞல், இதுபோன்ற பொதுப் படையான கருத்துகளைவிட அதிகத் திட்பம் (precise) உடையன தேவைப்படும்.

குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளும், கட்டச் (stage) சராசரிகளும்: பொது வியாபாரத்தில் அடுத்தடுத்த பள்ளங்களைக் காட்டும் குத்துக் கோடுகள் சரக்கு டன்-மைல்களின் வரிசையைப் பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. இவை ஒவ்வொன்றும் சரக்கு டன்-மைல்களின் 'குறிப்புச் சுழல்'கள் என அழைக்கப்பெறும். இஃது 'ஒரு குறிப்புச் சுழலினுளுள்ள சரக்கு டன் - மைல்களின் பதிவேடு' என்ற தொடரின் சுருக்கமாகும். எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட கால இடையில், இந்தத் தொடர்வரிசையின் மொத்த நடக்கையின் ஓர் அனுபவ அலகு தான் (unit of experience) ஒவ்வொரு பகுதியும். இந்த அலகு களைத் தனியே விளக்கவேண்டும்; அப்படிச் செய்யும்பொழுது வெவ் வேறு அலகுகளின் அளவைகளை ஒப்பிடுவதற்கு ஏற்றவாறும், அவை களைத் தொகுப்பதற்கு ஏற்றவாறும் அமைக்கவேண்டும்.

ஒரு குறித்த குறிப்புச் சுழலை—1945ஆம் ஆண்டு அக்டோபரின் பள்ளத்திலிருந்து 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபர் பள்ளம்வரை இருப்பதை — எடுத்துக்கொள்வோம். அச் சுழலில் காணப்பெறும் மாதாந்தர அளவைகளை முதலில் சராசரியாக்குவதே குறித்த சுழலை விளக்குவதன் முதல் படியாகும். இந்தச் சராசரி 'சுழல் அடிப்படை' யைத் (cycle-base) தரும். (துவக்கப் பள்ளத்திலும் இறுதிப் பள்ளத்திலுமுள்ள விவரங்களுக்கு ½ஐ நிறையாகக் கொடுத்துச் சராசரியாக்குவோம். ஏற்றங்களைவிடப் பள்ளங்களுக்கு அதிகமான நிறை ஏற்படாது தடுப்பதே இதன் நோக்கம்.) குறித்த சுழலின்

சரக்கு டன்-மைல்களின் மாதாந்தர சராசரி 50.52 பில்லியன்கள். அச் சுழலிலுள்ள ஏனைய மாதாந்தர அளவைகளைச் சுழல் அடிப்படையின் ஒப்புமைகளாக்க (relatives) வேண்டும். குறிப்புச் சுழற் பள்ளங்களான 1945ஆம் ஆண்டு அக்டோபர், 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபர்— இரண்டு காலங்களிடையே உள்ள கால இடைவெளியில் சரக்கு டன்-மைல்களின் நடக்கையின் முழுத் தோரணியையும் இந்தக் குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகள் தரும். இவைகளின் சராசரி 100; எனவே, சுழல் என்பது அனுபவத்தின் ஓர் அலகு என்ற கருத்திற்கு இவை ஒத்திருக்கின்றன. அவைகள் கருத்தியலான (abstract) வழியிலிருப்பதால், வேறு சுழல்களின் இதே வகை அளவைகளுடன் ஒப்பிடுவது சாத்தியமாகும். ஆனால், அவைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமானதால், அவைகள் தரும் தோரணியும் வெகு விவரமாக அமைகிறது. மற்றும், வெவ்வேறு சுழல்களில் இருக்கும் மாதங்களின் எண்ணிக்கையும் வெவ்வேருக இருக்குமாதலால், அந்த அளவைகளை ஒப்பிடுவதும் கடினமாகிறது. ஒவ்வொரு குறிப்புச் சுழலின் தோரணியையும், அதன் முக்கியமான சிறப்புகளைச் சுருக்கமாகக் காட்டுவதான ஒருசில அளவைகளால் குறிப்பிட முடிந்தால், ஆய்வுக்கு அவை வெகுவாகப் பயன்படும்.

இந்த நோக்கத்தை அடைய 'கட்டச் சராசரிகளை'க் (stage averages) கணக்கிடுகிறோம். ஒவ்வொரு குறிப்புச் சுழலையும்— அதன் கால இடைவெளியைக் கருதாமல்—ஒன்பது கட்டங்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு கட்டத்திற்கும் சராசரி கண்டுபிடிப்போம். துவக்கப் பள்ளத்தை, குறிப்புச் சுழலின் முதல் கட்டமாக (I) எடுத்துக் கொள்வோம். Iஆம் கட்டத்தில் தொடர்ச்சியின் தன்மையைக் காட்டுவதற்கும், பள்ளத்தில் மையமாக அமையும் மூன்று குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரியைக் கண்டுபிடிப்போம். (அதாவது, 1945ஆம் ஆண்டு அக்டோபரிலிருந்து 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபர்வரை இருக்கும் குறிப்புச் சுழலின் Iஆம் கட்ட அளவை, 1945ஆம் ஆண்டு செப்டம்பரிலிருந்து 1949ஆம் ஆண்டு நவம்பர்வரையுள்ள மூன்று மாதத்திய குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரியாகும். இந்த முறையில், முந்திய சுழலிலிருந்து ஒரு மாத அளவையையும் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.) Vஆம் கட்டம் குறிப்புச் சுழலின் ஏற்றத்தைக் குறிப்பிடும். அந்த ஏற்றத்தை மையமாகக் கொண்ட மூன்று மாதத்திய குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரி, Vஆம் கட்டத்திற்கான அளவையாகும். IXஆம் கட்டம் இறுதிப் பள்ளத்தைக்கொண்டது; அந்தப் பள்ளத்தின் மையமான மூன்று மாதத்திய குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரிதான் அந்தக் கட்டத்திற்கான அளவை. பொது வியாபாரச் செயலின் மூன்று முக்கியமான திரும்புமுனைகளில், இந்தத் தொடர்வரிசையின்

தன்மையை இவை காட்டுகின்றன. எனவே, இந்த மூன்று கட்ட சராசரிகள் ஒரு குறிப்புச்சுழல் தோரணியின் சில சிறப்பான தோற்றங்களை விளக்குகின்றன. பொது வியாபாரம் விரிவடையும் முதலாவது, ஐந்தாவது கட்டங்களிடையே இந்தத் தொடர் வரிசையில் என்ன நிகழ்கிறது? ஐந்தாவது, ஒன்பதாவது கட்டங்களிடையே உள்ள சுருக்கத்தின்பொழுது என்ன நிகழ்கிறது? இவைகள் அதிக கால அளவு உடையனவாக—50, 60 மாதங்களுக்கு மேலும்—இருக்கலாம். எனவே, இந்த மூன்று சராசரிகளைவிட அதிகமான விவரங்கள் ஆராய்ச்சியாளருக்குத் தேவைப்படும். இங்கு எவ்வளவு விவரம் வேண்டும் என்பதைத் தன்னிச்சையாகவே (arbitrary) முடிவு செய்யவேண்டும். நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் தங்கள் ஆராய்ச்சியில், விரிவு காலத்தை மூன்று சமப் பகுதிகளாகவும் (அல்லது தோராய சமப் பகுதிகளாக), அதேபோல் சுருக்கத்திற்கான காலத்தையும் மூன்று பகுதிகளாகவும் பிரித்துள்ளனர். இந்த ஒவ்வொரு கட்டத்திற்கும் ஒரு தனிச் சராசரி கணக்கிடப்படும். விரிவு காலத்திற்கான கட்டங்கள் II, III, IV என்றும், சுருக்க காலக் கட்டங்கள் VI, VII, VIII என்றும் குறிக்கப் பெறும்.

விரிவு பாகத்தை மூன்று கட்டங்களாகப் பிரித்தோம்; தாழ்வுக்கு அடுத்துள்ள மாதத்தில் விரிவு பாகம் தொடங்கி, ஏற்றத்திற்கு முந்திய மாதத்தில் முடிவடைவதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தக் காலம் மூன்றினால் மீதியின்றி வகுபடுமாயின், மூன்று கட்டங்களிலும் ஒரே எண்ணிக்கை மாதங்கள் இருக்கும். மீதி ஒன்ருக இருந்தால், அந்த அதிகமான மாதத்தை நடுக் கட்டத்தில் (III-ல்) சேர்ப்போம்; மீதி இரண்டானால், ஒரு மாதத்தை IIஆம் கட்டத்திலும், மற்ருென்றை IVஆம் கட்டத்திலும் சேர்ப்போம். இந்த ஒவ்வொரு கட்டத்திலுமுள்ள மாத விவரங்களின் சராசரியே குறிப்புச் சுழலில் குறித்த தொடர்வரிசையின் நடக்கையை அளவிடும். விரிவு காலத்திற்கு விளக்கப்பட்ட முறையே சுருக்க காலத்தை மூன்று கட்டங்களாகப் பிரிக்கவும் பயன்படும்.

சரக்கு டன்-மைல்களின் ஒரே ஒரு குறிப்புச் சுழலிற்கு மேற்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்திய விவரங்கள் அட்டவணை 12-6-ல் உள்ளன. குறிப்புச் சுழலின் மொத்தத்திற்குமான, மாதச் சராசரி 50.52; இதைச் சுழல் அடிப்படையாக வைத்தே குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளைக் கணக்கிட்டுள்ளோம். கடைசிப் பத்தியிலுள்ள கட்டச் சராசரிகள் யுத்தத்திற்குப் பிறகு நேர்ந்த முதல் குறிப்புச் சுழலில், சரக்கு டன்-மைல்களின் நடக்கையை விளக்குகின்றன. குறிப்பு விரிவுக்கான பகுதியில் (Iஆம் கட்டத்திலிருந்து

அட்டவணை 12-6

1945ஆம் ஆண்டு அக்டோபரிலிருந்து 1949ஆம் ஆண்டு அக்டோபர் வரையுள்ள சரக்கு டன்-மைல்களின் குறிப்புச் சுழலில் கட்ட சராசரிகளைக் கணக்கிடுவதை விளக்குவது.

(சரக்கு டன்-மைல்களின் மாதச் சராசரி=50.52 பில்லியன்கள்)

கட்டம்	கால இடைவெளி	மாதங்களின் எண்ணிக்கை	சுழல் ஒப்புமைகளில் மாதச் சராசரி நிலைகள்
I	செப். 45—நவம். 45	3	99.5
II	நவம். 45—அக்டோ. 46	12	96.8
III	நவம். 46—அக்டோ. 47	12	106.3
IV	நவம். 47—அக்டோ. 48	12	105.9
V	அக்டோ. 48—டிசம். 48	3	104.3
VI	டிசம். 48—பிப். 49	3	96.4
VII	மார்ச் 49—ஜூன் 49	4	92.6
VIII	ஜூலை 49—செப். 49	3	81.6
IX	செப். 49—நவம். 49	3	77.1

Vஆம் கட்டம் வரை) ஒரு கழிவான (net) ஏற்றமும், குறிப்புச் சுருக்கப் பகுதியில் (Vஆம் கட்டத்திலிருந்து IXஆம் கட்டம் வரை) ஒரு கழிவான இறக்கமும் இருப்பதை இந்தச் சராசரிகளின் தோரணி காட்டுகின்றது. ஆனால், கால அளவில் வேறுபாடுகளுள்ளன. பொது வியாபாரத்தின் முதல் தாழ்வுக்குப் பிறகே, சரக்கு டன்-மைல்களின் முதல் தாழ்வு நேர்ந்துள்ளது. (அதாவது, Iஆம் கட்டத்திலில்லாமல் IIஆம் கட்டத்திலுள்ளது); மற்றும், சரக்கு டன்-மைல்களின் ஏற்றம், பொது வியாபாரத்தின் ஏற்றத்தைக் காட்டிலும் முன்பே நிகழ்ந்துள்ளது (Vஆம் கட்டத்திலில்லாமல், ஏற்றம் IIIஆம் கட்டத்திலேயே உள்ளது).

அட்டவணை 12-6-ல் எடுத்துக்காட்டப்பட்ட முறைகளையே பயன்படுத்தி அங்கு விளக்கப்பட்ட சுழலுக்கு முன்பு உள்ள 10 குறிப்புச் சுழலுக்கும் கட்ட சராசரிகளைக் கணக்கிடலாம். இந்த 11 கட்ட சராசரிகளையும் அட்டவணை 12-7-ன் முதல் 11 வரிசைகளில் காணலாம். இப்படி விளக்கப்பெற்ற குறிப்புச் சுழல் தோரணிகளை படம் 12.4-ல் காணலாம். ஒப்புமைக்கு ஏற்றவாறு, அவைகளை ஒரே அச்சின்மேல்—ஏற்றத்திற்கான அல்லது Vஆவது கட்டத்திற்கான விவரங்களை அச்சாக வைத்து—குறித்துள்ளோம்.

அடுத்தடுத்த குறிப்புச் சுழல்களில் சரக்கு டன்-மைல்களின் நடக்கைத் தோரணிகளை, இந்த வரைபடம் வெகு நேர்த்தியாகப் படமாக்குகிறது. பொதுப்படையாக நோக்கின், சரக்கு டன்-மைல்

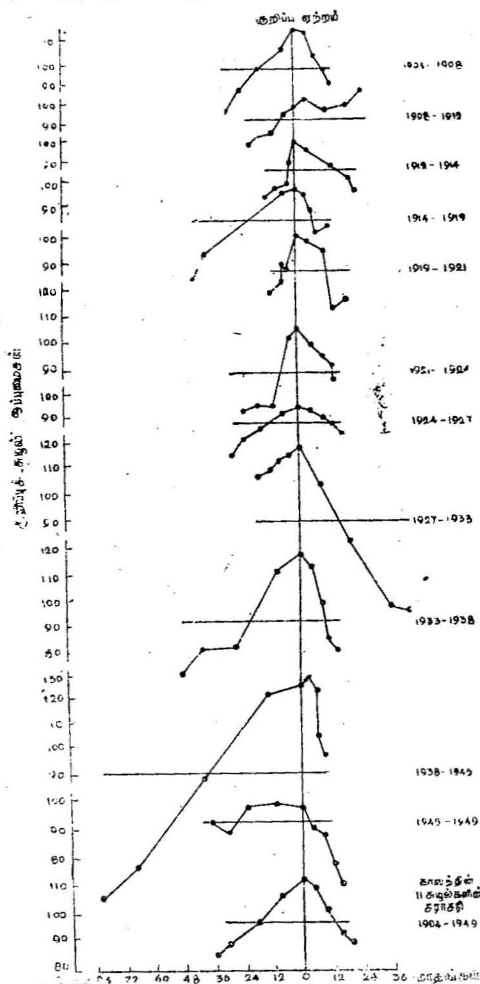
அட்டவணை 12-7

குறிப்புச் சுழல் தோரணிகளின் ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள், 1904-1949*

	குறிப்புச் சுழல் காலங்கள்			சுழல் அடிப்படை	சுழல்களின் ஒன்பது கட்டங்களுக்கான, குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரிகள்								
				பில்லியன் டன்-மைல் களில்	I துவக்கப் பள்ளத் தில் மைய மான மூன்று மாதங்கள்	II மூன்றில் முதலா வது	III விரிவு மூன்றில் இரண் டாவது	IV மூன்றில் மூன்று வது	V ஏற்றத் தில் மைய மான மூன்று மாதங்கள்	VI மூன்றில் முதலா வது	VII சுருக்கம் மூன்றில் இரண் டாவது	VIII மூன்றில் மூன்று வது	IX இறுதிப் பள்ளத் தில் மைய மான மூன்று மாதங் கள்
	தாழ்வு	ஏற்றம்	தாழ்வு										
	(1)			(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	ஆக.04	மே07	ஜூன்08	18.10	82.7	87.9	98.6	106.2	116.6	116.3	106.1	95.8	95.1
2	ஜூன்08	ஜன.10	ஜன.12	20.32	84.7	90.3	93.2	101.2	102.7	106.1	102.6	103.7	106.9
3	ஜன.12	ஜன.13	டிச.14	23.76	91.5	94.5	96.2	102.2	111.1	106.5	100.9	95.7	92.0
4	டிஸ.14	ஆக.18	ஏப்.19	29.51	74.1	85.5	101.0	111.5	114.3	112.7	105.8	93.7	95.6
5	ஏப்.19	ஜன.20	செப்.21	33.60	93.0	95.1	102.0	101.0	112.9	111.4	105.9	82.3	86.7
6	செப்.21	மே.23	ஜூலை24	31.06	84.5	86.9	87.2	112.4	120.0	111.2	105.8	102.5	98.3
7	ஜூலை24	அக்.26	டிச.27	35.36	86.3	93.7	98.8	104.1	106.2	105.8	102.1	99.9	96.5
8	டிஸ.27	ஜூன்29	மார்ச்33	29.72	114.8	118.2	124.1	126.2	127.5	116.0	90.5	66.2	62.5
9	மார்ச்33	மே37	மே38	25.17	73.8	88.2	91.2	116.3	127.3	119.4	106.0	93.9	90.9
10	மே38	பிப்.45	அக்.45	45.33	50.5	61.3	96.1	134.4	135.2	137.3	133.4	116.0	110.9
11	அக்.45	நவ.48	அக்.49	50.52	99.5	96.8	106.3	105.9	104.3	96.4	92.6	81.6	77.1
1904-49-க்கான 11 சுழல்களின் சராசரி					85.0	90.8	99.5	111.0	116.2	112.6	104.7	93.8	92.0
சராசரி விலக்கம்					10.9	8.1	6.4	8.3	8.3	7.0	6.3	9.3	9.3

* நேஷனல் பியூரோவின் தரக் குறியீட்டின்படிக்கு இது அட்டவணை B1 ஆகும்.

களும், பொது வியாபாரத்தின் முக்கிய சுழல் அசைவுகளை ஒத்திருக்கின்றன. எல்லாக் கால இடைவெளிகளிலுமே சரக்குப் பருமம் Iஆம் கட்டத்திலிருந்து Vஆம் கட்டம்வரை அதிகமாகியுள்ளது ;



ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள் 1904-1949.
அடுத்தடுத்த குறிப்புச்சுழல்களின் தோரணி
களும், அவைகளின் சராசரித் தோரணியும்.

ஒரே ஒரு கால இடைவெளியைத் தவிர, மற்றக் காலங்களில் Vஆம் கட்டத்திலிருந்து IXஆம் கட்டம்வரை சரக்குப் பருமம் குறைந்துமுள்ளது. ஆனால், குறிப்புச் சுழல்களினிடையே சரக்கு டன்-மைல்களின் நடக்கை ஒரே வகையான தோற்றமளிப்பதில்லை என்பது

தெளிவாகும். சரக்குப் பருமத்தின் ஏற்றங்களும் தாழ்வுகளும் பொது வியாபாரச் செயலலேயின் மாற்றங்களுடன் ஒத்து அமைவ தில்லே. எனவே, குறித்த இந்தத் தொடர்வரிசையானது, பொதுப் படையாக வியாபாரச் சுழல்களுடன் ஒத்து இருந்தாலும், சுழலுக்குச் சுழல் திட்டமான வேறுபாடுகளுடன் காட்சியளிக்கிறது.

சுழலுக்குச் சுழல் நிகழும் வேறுபாடுகளேயும் நாம் தெரிந்து கொள்ளவேண்டும் என்ருலும், ஆய்வுமுறையின் இந்தக் கட்டத்தில் நாம் பொது வியாபாரச் சுழல்களில் சரக்கு டன்-மைல் களின் சராசரி நடக்கையைமட்டும் கருதுகிருேம். அட்டவணே 12-7-லுள்ள வெவ்வேறு சுழல்களுக்கான கட்ட சராசரிகளே—தனித்த அளவைகளாதலால்—எளிதில் ஒன்று சேர்க்கலாம். 11 விவரங்களேயும் மொத்தமாக்கி, 11ஆல் வகுத்தால் Iஆம் கட்டத்தின் சராசரி 85.0 என்று வருகிறது ; இது குறிப்புச் சுழல்களின் துவக்கத் தாழ்வில், சரக்கு டன்-மைல்களின் சராசரி நிலேயைக் காட்டு கிறது ; IIஆம் கட்டத்தின் சராசரி, 90.8 ; IIIஆம் கட்டத்தினது 99.5—இதுபோலவே மற்றக் கட்டங்களுக்கும். இவைகளே அட்டவணே 12-7-ன் கடைசி வரிசைக்கு மேல் வரிசையில் காண லாம். இவைகள் விளக்கும் குறிப்புச் சுழல்களின் சராசரி தோரணி, படம் 12-4-ன் கடைசி வரைபடத்திலுள்ளது. தனித்த 11 தோரணிகளில் காணப்படும் மிகையான ஒழுங்கின்மை, அவைகளின் மொத்தமான இந்தத் தோரணியில் மறைந்துவிட்டது. தாழ்வி லிருந்து ஏற்றத்திற்குச் செல்லும் அசைவு மிகவும் ஒழுங்கானது; அதுபோலவே ஏற்றத்திலிருந்து இறுதித் தாழ்விற்கு—VIIIஆம் கட்டத்திலிருந்து IXஆம் கட்டத்திற்குச் செல்வதைத் தவிர—செல்லும் அசைவும் ஒழுங்காகவே உள்ளது. எனவே, பொது வியாபாரத்தில் நிகழும் விரிவு, சுருக்கங்களின் அலேகளுடன் சரக்கு டன்-மைல்களின் சராசரி நடக்கையும் வெகுவாக ஒத்துள்ளது.

சராசரிகளில் மறைந்துவிடுகின்ற, சுழலுக்குச் சுழல் நிகழும் வேறுபாடுகளேயும் ஆராய்ச்சியாளர் கவனிக்கவேண்டும் என்று முன்பே கூறினேம். குறிப்புச் சுழலின் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் இருக்கும் வேறுபாட்டின் ஓர் எளிதான அளவையாக—ஒவ்வொரு கட்ட சராசரியிலும் இடம் பெற்றுள்ள விவரங்களின்—சராசரி விலக் கத்தைக் கணக்கிடலாம். இந்தச் சராசரி விலக்கங்கள் அட்டவணே 12-7-ன் கடைசி வரிசையில் கட்ட சராசரிகளுக்குக் கீழே உள்ளன. Iஆம் கட்டத்தில்தான் சுழலுக்குச் சுழல் வேறுபாடு வெகு அதிகமா யுள்ளது ; குறிப்புச் சுழல் ஏற்றங்களில், தாழ்வுகளில் உள்ளதைக் காட்டிலும் குறைவாக உள்ளது; III, VIIஆம் கட்டங்களில் மிகக் குறைவாக உள்ளது என்பதைக் கவனிக்கவும். பொது வியாபார

விரிவுகளின் மையக் கட்டங்களிலும், சுழல்களை ஒப்பிட்டால், சரக்குப் போக்குவரத்துக்கான அலைகள் மிகவும் சீராக அமையும் என்பதை இது காட்டுகிறது. எனவே, இது வியாபாரச் சுழல்களை ஆராய்பவருக்கு வெகு சிறப்பான ஓர் உண்மையாகும்.

கட்டங்களிடையே மாற்றங்களின் வீதங்கள் : குறிப்புச் சுழல் சட்டத்திற்குள், தனித்த தொடர்வரிசைகளின் நடக்கையை விவரிப்பதான பல வருவித்து உருவாக்கப்பெற்ற (derived) பல அளவைகளை நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் பயன்படுத்துகிறார்கள்.[12] இவைகளில் கட்டங்களிடையே உள்ள மாற்றங்களின் அளவைகளே மிகப் பயன்படுபவை; மாற்றங்கள், குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளில் சராசரி மாத வீதங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். (அட்டவணை 12-7-ல் காணப்படும்) அடுத்தடுத்த கட்டங்களிடையேயுள்ள மொத்த வித்தியாசத்தை, இரண்டு கட்டங்களின் நடுப் பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள மாதங்களால் வகுத்து, கட்டங்களிலேயே இருக்கும் மாற்ற வீதத்தைக் கணக்கிடுவோம். அவ்வாறு, சரக்கு டன்-மைல்கள் விவரங்களுக்குக் கணக்கிடப்பெற்ற வீதங்களை அட்டவணை 12-8 தருகிறது.

குறித்த எந்தக் கட்ட-இடைப்பகுதிகளுக்கான வீதங்களினிடையே வேறுபாடு அதிகமாகவே உள்ளதை நாம் எதிர்பார்த்தது போலவே காண்கிறோம். IV-லிருந்து Vஆம் கட்டத்திற்கான மாற்றம் மாதத்திற்கு +6.0-லிருந்து (1919-21 குறிப்புச் சுழலுக்கானது) —0.2 வரை (1945-49 சுழலுக்கானது) உள்ளது. ஒவ்வொரு கட்ட-இடைப் பகுதிக்கான வீதங்களைச் சராசரியாக்குவதால், ராண்டம் ஒழுங்கின்மையை ஓரளவு தவிர்க்கலாம். அட்டவணை 12-8-ன் கீழ்ப்பகுதியிலிருந்து பெற்ற இரு சராசரிகளைக் காண்கிறோம். இவைகளில் முதலானதைக் (நிறையிடாதது) கணக்கிடும்பொழுது இடைக்கட்ட மாற்ற அளவைகள் எல்லாவற்றிற்கும் —கட்ட இடைவெளி 3 மாதமானாலும், 10 மாதங்களானாலும்— ஒரே நிறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டாம் அடைவிலுள்ள அளவைகள், ஒரு குறித்த இடைக்கட்ட இடைவெளியிலுள்ள மாதங்களின் எண்ணிக்கையால், அந்த இடைக்கட்ட மாற்றத்தை நிறையாக்கிக் கணக்கிடப்பட்டவை. (அட்டவணையில் ஒவ்வொரு கட்ட இடைவெளியிலுமுள்ள மாதங்களின் எண்ணிக்கையும் உள்ளது.) ஒவ்வொரு நிறையிடாத சராசரியுடன், சுழலுக்குச் சுழல் நிகழும்

[12] *இந்த அளவைகளின் முழு விளக்கங்களையும், மற்றும் பல பயன் தரும் எடுத்துக்காட்டுகளையும் பர்ன்ஸ் மற்றும் மிச்சல்* (Burns and Mitchell) *என்பவர்களின்* 'Measuring Business Cycles' (*நு. நா. ப. 13*) *என்ற நூலிலும், டபிள்யூ. ஸி. மிச்சலின்* (W. C. Mitchell) 'What Happens during Business Cycles' *என்ற நூலிலும் (நு. நா. ப. 107) வாசகர் காணலாம்.*

அட்டவணை 12-8

1904-49ஆம் ஆண்டுகளுக்கிடையே ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்களின் குறிப்புச் சுழல்களில் கட்டத்திற்குக் கட்டம் மாற்றங்களின் சராசரி விதங்கள்*

குறிப்புச்சுழல் காலங்கள்			சுழல்களில் கட்டத்திற்குக் கட்டம் நிகழும் மாற்றங்களின் மாதாந்தர விதங்கள்—குறிப்புச்சுழல் ஒப்புமைகளில்							
			I-II	II-III	III-IV	IV-V	V-VI	VI-VII	VII-VIII	VIII-IX
			விரிவு				சுருக்கம்			
தாழ்வு	ஏற்றம்	தாழ்வு	தாழ்விலிருந்து மூன்றில் முதலானதற்கு	முதலானதிலிருந்து மூன்றில் நடுவானதற்கு	நடுவிலிருந்து மூன்றில் கடைசியானதற்கு	கடைசி மூன்றுவதிலிருந்து ஏற்றத்திற்கு	ஏற்றத்திலிருந்து மூன்றில் முதலானதற்கு	முதலானதிலிருந்து மூன்றில் நடுவானதற்கு	நடுவிலிருந்து மூன்றில் கடைசியானதற்கு	கடைசி மூன்றுவதிலிருந்து பள்ளத்திற்கு
(1)			(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1 ஆக.04	மே 07	ஜூன்08	+0.9	+1.0	+0.7	+1.7	—0.1	—2.6	—2.6	—0.3
2 ஜூன்08	ஜன.10	ஜன.12	+1.6	+0.5	+1.3	+0.4	+0.8	—0.5	+0.1	+0.7
3 ஜன.12	ஜன.13	டிஸ.14	+1.2	+0.5	+1.7	+3.6	—1.2	—0.7	—0.7	—0.9
4 டிஸ.14	ஆக.18	ஏப்.19	+1.5	+1.1	+0.7	+0.4	—1.1	—2.8	—4.8	+1.3
5 ஏப்.19	ஜன.20	ஸெப்.21	+1.0	+2.8	—0.4	+6.0	—0.4	—0.8	—3.6	+1.3
6 ஸெப்.21.	மே23	ஜூலை24	+0.7	0	+3.9	+2.2	—3.5	—1.2	—0.7	—1.7
7 ஜூலை24	அக்.26	டிஸ.27	+1.5	+0.6	+0.6	+0.4	—0.2	—0.8	—0.5	—1.4
8 டிஸ.27	ஜூன்29	மார்ச்33	+1.0	+1.1	+0.4	+0.4	—1.4	—1.8	—1.7	—0.5
9 மார்ச்33	மே37	மே38	+1.7	+0.2	+1.5	+1.3	—3.2	—3.8	—3.5	—1.2
10 மே38	பிப்.45	அக்.45	+0.8	+1.3	+1.4	+0.1	+1.4	—1.6	—7.0	—3.4
11 அக்.45	நவ.48	அக்.49	—0.4	+0.8	0	—0.2	—4.0	—1.1	—3.1	—2.2
1904-49-க்கான சுழல்களின் சராசரி			+1.0	+0.9	+1.1	+1.5	—1.2	—1.6	—2.6	—0.8
சராசரி விலக்கம்			0.4	0.5	0.8	1.4	1.4	0.8	1.7	1.1
சராசரி இடைவெளி, மாதங்களில்			5.7	10.2	10.2	5.7	3.2	5.5	5.5	3.2
நிறையிட்ட சராசரி			+1.0	+0.9	+1.1	+0.9	—1.1	—1.4	—2.0	—0.5

* நேஷனல் பியூரோவினரின் குறியீட்டின்படி இது B2 எனப்படும்.

கட்ட அசைவு வீதங்களிடையேயுள்ள ஒழுங்கு அளவைக் குறிக்கும் சராசரி விலக்கமும் கொடுக்கப்பெற்றுள்ளது.

விரிவுப் பகுதியைக் குறிக்கின்ற நான்கு இடைவெளிகளில், சரக்கு டன்-மைல்களின் மாத அதிகரிப்பு வீதங்களில்—ஒப்புமையாக நோக்கும்பொழுது—பொருத்தம் (consistency) உள்ளதை நிறையிட்ட சராசரிகள் காட்டுகின்றன. சுருக்க காலத்திற்கான தோரணி அவ்வளவு ஒழுங்காக இல்லை. துவக்கத்தில் பின்னிறக்கத்தின் (recession) வீதம், மாதத்திற்கு 1.1 சதவீதம் ஆகக் குறைய ஆரம்பித்து, பிறகு VI, VII கட்டங்களிடையே 1.4 சதவீதமாகவும் VII, VIII கட்டங்களிடையே 2.0 சதவீதமாகவும் மிகைப்படுகிறது. VIII, IXஆம் கட்டங்களிடையேதான் பொது வியாபாரத்தின் சுருக்கத்தின் இறுதிப் பகுதியுள்ளது. இங்குச் சரக்கு டன்-மைல்களின் சரிவில் (decline) திடீரென்று ஒரு நிறுத்தம் (check) ஏற்பட்டு, அது மாதத்திற்கு 0.5 சதவீதமாகிறது. (கட்டங்களிடையே உள்ள வீதங்களை, சதவீத அளவுகளில் விளக்குவது எளிதாகும்; ஆனால், வாசகர் நாம் குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளைப் பற்றி ஆராய்கிறோம் என்பதை நினைவில் வைக்கவேண்டும்; இந்த ஒப்புமைகளுக்கான அடிப்படை, ‘சுழல் அடிப்படையே’—அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட குறிப்புச் சுழலில் சரக்கு டன்-மைல்களின் சராசரி நிலையே.

வியாபாரச் சுழல் இணக்கத்தின் குறியீடுகள் (Indexes of conformity to business cycles): பொது வியாபாரச் செயலின் விரிவு, சுருக்கப் பகுதிகளுடன் சரக்கு டன்-மைல்களின் அசைவுகளும் தெளிவான முறையில் இணக்கம் பெற்றுள்ளதை முன்பே குறிப்பிட்டோம். ஆனால், அந்த முடிவை அடைய, நாம் கணக்கிடப்பட்ட அட்டவணைகளிலிருந்தும் வரைபடங்களிலிருந்தும் கிடைத்த திருத்தமற்ற கருத்துகளையே கையாண்டோம். இவைகளைக் காட்டிலும் திட்பமான, தற்சார்பற்ற அளவைகள் தேவை. ஒவ்வொரு தொடர்வரிசைக்கும் நேஷனல் பியூரோ மூன்று இணக்கக் குறியீடுகளை அமைக்கிறது—பொது வியாபாரத்துடன் இணக்கத்திற்கு ஒரு குறியீடும், விரிவுடன் இணக்கத்திற்கு ஒன்றும், சுருக்கத்துடன் ஒன்றுமாக மூன்று. இவைகளை இப்பொழுது விளக்குவோம்.

சரக்கு டன்-மைல்களுக்கான இணக்க அளவைகளைக் கணக்கிடுவதற்கான விவரங்கள் அட்டவணை 12-9-ல் உள்ளன. குறிப்பு விரிவுகளுக்கும், குறிப்புச் சுருக்கங்களுக்குமான கால இடைவெளிகளே இங்கு எடுத்துக்கொள்ளப்படும் காலங்கள். ஒவ்வொரு குறிப்புச் சுழலுக்கான (2)ஆம் பத்தியின் விவரம், அந்தத் தொடர்ச்சி

யின் I, Vஆம் கட்ட நிலைகளிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காட்டும். முன்பே உள்ள அட்டவணை 12-7-ல், 1904ஆம் ஆண்டு ஆகஸ்டிலிருந்து 1908ஆம் ஆண்டு ஜூன் வரைக்கான குறிப்புச் சுழலில், சரக்கு டன்-மைல்களின் நிலை Iஆம் கட்டத்தில் 82.7ஆகவும், Vஆம் கட்டத்தில் 116·6ஆகவும் இருப்பதைக் காணலாம். இரண்டாவது எண்ணிலிருந்து முதலாவதைக் கழிக்க +33.9 என்று வருகிறது. இதையே அட்டவணை 12-9-ல் (2)ஆம் பத்தியின் முதலாவது விவரமாக எழுதியுள்ளது. இந்த விரிவு தோற்றத்தில் சரக்கு டன்-மைல்களின் மொத்த மாற்றத்தை இந்த எண்ணிக்கை அளவிடும். அடுத்து வரும் சுருக்கத்தின் தோற்றத்தின் மொத்த மாற்றம் —21·5; இதனை அட்டவணை 12-9-ல் (5)ஆம் பத்தியின் முதல் விவரமாகக் காண்கிறோம். இதனைப் பெற நாம் 95.1-லிருந்து (குறிப்பிட்ட குறிப்புச் சுழலில், சரக்கு டன்-மைல்களின் IXஆவது கட்டத்தின் நிலை) 116·6 என்பதை (Vஆவது கட்டத்தின் நிலை) கழிக்கவேண்டும். பிற்பாடு வரும் கணக்குகளுக்காக (2), (5)ஆம் பத்திகளிலிருக்கும் மொத்த (absolute) வித்தியாசங்களை மாதச் சராசரியாகக் கணக்கெடுப்பது எளிதாகும். (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள விவரத்தை, குறிப்பு - விரிவு இடைவெளியிலுள்ள மாதங்களாலும், (5)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகளைக் குறிப்பு - சுருக்க இடைவெளிகளிலுள்ள மாதங்களாலும் வகுப்பதால், இந்தச் சராசரிகளைப் பெறுவோம். ஆக, விரிவின் மாற்றங்களின் மாதச் சராசரிக்கு +1·11 என்ற மதிப்பும், சுருக்கத்தின் மாற்றங்களின் மாதச் சராசரிக்கு —1·65 என்ற மதிப்பும் கிடைக்கின்றன. இவைகளை முறையே அட்டவணை 12-9-ன் (4)ஆம், (7)ஆம் பத்திகளில் காணலாம். இவைகளைக் கொண்டுதான் இணக்கக் குறியீடுகளை அமைப்போம்.

குறிப்பு விரிவிற்கான இணக்கக் குறியீட்டை ஓர் எளிய முறையில் வருவிப்போம். (4)ஆம் பத்தியிலுள்ள ஒவ்வொரு + விவரத்திற்கு +100 மதிப்பாகவும், ஒவ்வொரு —விவரத்திற்கு —100 மதிப்பாகவும் தந்து, இவைகளை மொத்தமாக்குவோம்; அதனைக் குறிப்பு -விரிவுகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைப்பது இணக்கக் குறியீடு. இந்த முறையைச் சரக்கு டன்-மைல் எடுத்துக்காட்டிற்குப் பயன்படுத்துவோம்; குறிப்பு-விரிவின் 11 விவரங்களும் + ஆகவே உள்ளன; எனவே, இணக்கக் குறியீடு = +1100 ÷ 11 = +100. இதே முறையைக் குறிப்பு - சுருக்கங்களுக்கும் பயனுக்கலாம் —ஆனால், அங்கு (7)ஆம் பத்தியில் —ஆன விவரம் நேர்முக இணக்கத்தைக் குறிப்பதால், அதற்கு +100 மதிப்பைத் தரவேண்டும்; + ஆன விவரங்கள் —100 மதிப்பைப் பெறும். இங்கு உள்ள 11 குறிப்பு-சுருக்கங்களில், 10 நேர்முக இணைப்பையும் (positive conformity), 1 எதிர்முக (negative) இணைப்பையும் குறிக்கின்றன. (எதிர்முக

அட்டவணை 12-9

வியாபாரச் சுழல்களின் இணக்க அளவைகள்; ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள், 1904-1949*

விரிவு I-V கட்டங்களிடையே . குறிப்பு-விரிவுகளுடன் இந்த விரிவுகளும் தொடர்புடையன.

குறிப்புச் சுழல்களின் காலங்கள்			இவைகளை ஒத்த கட்டங்களிடையே குறிப்புச்சுழல் ஒப்புமைகளின் மாற்றங்கள்						மாதச் சராசரி மாற்றங்களைக் குறிப்புச் சுருக்கத்தின் மாதச் சராசரி மாற்றத்திலிருந்து கழித்தது	
			குறிப்பு-விரிவு			குறிப்புச் சுருக்கம்				
தாழ்வு	ஏற்றம் (1)	தாழ்வு	மொத்த மாற்றம் (2)	இடைவெளி மாதங்களில் (3)	மாதச் சராசரி மாற்றம் (4)	மொத்த மாற்றம் (5)	இடைவெளி மாதங்கள் (6)	மாதச் சராசரி மாற்றம் (7)	முந்தைய குறிப்பு விரிவு (உண்மையான வித்தியாசம்) (8)	பிந்தைய குறிப்பு விரிவு (அதன் குறி + —) (9)
1. ஆகஸ்ட்04	மே07	ஜுன்08	+33.9	33.0	+1.03	—21.5	13.0	—1.65	—2.68	—
2. ஜுன்08	ஜனவரி10	ஜனவரி12	+18.0	19.0	+0.95	+ 4.2	24.0	+0.18	—0.77	—
3. ஜனவரி12	ஜனவரி13	டிஸம்பர்14	+19.6	12.0	+1.63	—19.1	23.0	—0.83	—2.46	—
4. டிஸம்பர்14	ஆகஸ்ட்18	ஏப்ரல்19	+40.2	44.0	+0.91	—18.7	8.0	—2.34	—3.25	—
5. ஏப்ரல்19	ஜனவரி20	ஸெப்.21	+19.9	9.0	+2.21	—26.2	20.0	—1.31	—3.52	—
6. ஸெப்.21	மே23	ஜுலை24	+35.5	20.0	+1.78	—21.7	14.0	—1.55	—3.33	—
7. ஜுலை24	அக்டோ.26	டிஸம்பர்27	+19.9	27.0	+0.74	— 9.7	14.0	—0.69	—1.43	—
8. டிஸம்பர்27	ஜுன்29	மார்ச்சு33	+12.7	18.0	+0.71	—65.0	45.0	—1.44	—2.15	—
9. மார்ச்சு33	மே37	மே38	+53.5	50.0	+1.07	—36.4	12.0	—3.03	—4.10	—

10. மே38	பிப்ரவரி45	அக்.45	+84.7	81.0	+1.05	—24.3	8.0	—3.04	—4.09	—	
11. அக்.45	நவம்பர்48	அக்.49	+ 4.8	37.0	+0.13	—27.2	11.0	—2.47	—2.60	—	
1904-1949-ன் 11 சுழல்களின் சராசரி			+31.2		+1.11	—24.1		—1.65	—2.76		
சராசரி விலக்கம்					0.42			0.78	0.81		
குறிப்பு விரிவிற்கு இணக்கக் குறியீடு					+100						
குறிப்புச் சுருக்கத்திற்கு இணக்கக் குறியீடு								+82			
தாழ்வுக்குத் தாழ்வு-சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு									+100		
ஏற்றத்திற்கேற்றம்-சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு											+100
இரு வழிகளிலும் சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு										+100	
1904-14, 1921-38-க்கான ஏழு சுழல்களின் சராசரி			+27.6		+1.13	—24.2		—1.29	—2.42		
சராசரி விலக்கம்					0.33			0.72	0.83		
குறிப்பு விரிவிற்கு இணக்கக் குறியீடு					+100						
குறிப்புச் சுருக்கத்திற்கு இணக்கக் குறியீடு								+71			
தாழ்வுக்குத் தாழ்வு-சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு									+100		
ஏற்றத்திற்கேற்றம்-சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு											+100
இருவழிகளிலும் சுழல்களின் இணக்கக் குறியீடு										+100	

* இது நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தாரின் குறியீட்டின்படி அட்டவணை B3 ஆகும்.

இணைப்பு 1910 ஜனவரியிலிருந்து 1912 ஜனவரி வரைக்கான சுருக்கத்திலுள்ளது; இங்குக் குறிப்பு-சுருக்கத்தில் ஓர் ஏற்றம் உள்ளது) இந்த 11-ன் மொத்தம் +900. இதை 11ஆல் வகுக்க, குறிப்பு-சுருக்கத்தின் இணக்கக் குறியீடு +82 என்று வருகிறது.

இணக்கக் குறியீடுகள் +100 விருந்து —100 வரை மதிப்புகள் பெறக்கூடும் என்பது தெளிவு. முதல்நிலை மதிப்பு நிறைவுபெற்ற நேர் (perfect positive) இணக்கத்தைக் காட்டும். இரண்டாவது, இணக்கமற்ற நிலையைக் காட்டுவதில்லை என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்; அஃது எதிர் இணக்கத்தையே காட்டுகிறது. வியாபார நஷ்டங்கள் போன்ற ஒரு தொடர்வரிசையைக் கருதினுல், அது வியாபார-விரிவு காலங்களில் பொதுவாகக் குறையும்; எனவே, இந்த நிலைக்கு எதிர் இணக்கமே பொருந்தும். ஆனுல், இதனைப் பொதுவாக வியாபார அசைவுகளுடன் இணக்கமற்ற நிலையைக் குறிக்கும் என்று கொள்வது கூடாது. உண்மையாகவே இணக்க மில்லாதுபோனுல், +100, —100 என்ற மதிப்புகள் ராண்டம் முறையில் வந்து, குறியீட்டைச் சுழியாகவோ (zero) அல்லது அதற்கு நெருங்கிய தோராயமாகவோ அமையச் செய்யும்.

விரிவுப் பகுதிக்கும், சுருக்கப் பகுதிக்கும் தனித்தனியே இணக்கக் குறியீடுகளை அமைக்கும்பொழுது, நாம் கருதுவது மாற்றத்தின் திசையுடன் (direction) இணக்கத்தின் பொருத்தத்தையே (consistency) ஆகும். முழு - சுழலுக்கான இணக்கக் குறியீடு வேறு வகையானதாகும். குறிப்பு - விரிவுப் பகுதியில் ஓர் ஏற்றமும், குறிப்பு-சுருக்கப் பகுதியில் ஓர் இறக்கமும் இருக்குமானுல், அது முழுக் குறிப்புச் சுழலுடன் இணக்கத்தைக் காட்டுவதாகும். இப்படி யல்லாமல், பொது வியாபார விரிவின்பொழுது ஓர் ஏற்றமும், சுருக்கத்தின்பொழுது சற்றே குறைவான வீதத்தில் ஏற்றமும் இருந்தாலும், அஃது இணக்கத்தைத்தான் குறிப்பிடும். உறுதியானதும் நிலைத்திருப்பதானதுமான (persistent) ஏற்றமொன்றை நெடுங்காலப் போக்காகக்கொண்ட ஒரு தொடர்வரிசையின் சிறப்பான சுழல் நடக்கையாகுமிது. அதுபோலவே, பொது வியாபார விரிவு காலங்களில் ஓர் இறக்கத்தையும், சுருக்க காலங்களில் அதைவிட அதிக இறக்க வீதத்தையும் கொண்ட வரிசையும் இணக்கமுள்ளதாகவே இருக்கும். இந்த இரண்டு நிலைகளிலும் குறித்த தொடர் வரிசைகள் பொது வியாபாரத்தில் நிகழும் சுழல் அசைவுகளுக்கு ஒரு தெளிவான எதிரொலி (response) தருகின்றன; ஆனுல், அந்த எதிரொலி திசை மாற்றத்தைக் குறிப்பிடாமல், ஏற்றத்தின் அல்லது இறக்கத்தின் வீத மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுவதாகிறது.

அட்டவணை 12-9-ன் (4), (7)ஆம் பத்தியிலுள்ள விவரங்கள் முழுச் சுழல் இணக்கத்தின் முதல் நிலை அளவைகளைக் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு-சுருக்கத் தோற்றத்தில் சராசரி மாத மாற்றத்தை C என்றும், அதற்கு முந்தின குறிப்பு-விரிவு தோற்றத்தில் சராசரி மாத மாற்றத்தை E_- என்றும் குறிப்பிடுவோம். (— என்ற ஒட்டுக் குறி, விரிவு தோற்றம், சுருக்கத் தோற்றத்திற்கு முந்தினது என்பதைக் காட்டும்.) அப்பொழுது $C-E_-$ என்பது ஒரு தாழ்வி லிருந்து மற்றொரு தாழ்விற்கு ஓடும் ஒரு முழுக் குறிப்புச் சுழலின் இணக்கத்தின் அளவையாகப் பயன்படும். எடுத்துக்காட்டாக, 1904 ஆகஸ்டிலிருந்து 1908 ஜூன் வரைக்கான குறிப்புச் சுழலுக் காக (7)-ஆம் பத்தியின் விவரத்திலிருந்து (4)-ஆம் பத்தியின் விவரத்தைக் கழிக்க

$$C-E_- = -1{\cdot}65-(+1{\cdot}03) = -2{\cdot}68$$

என்று வருகிறது. இதனை அட்டவணை 12-9-ன் (8)ஆவது பத்தியில் எழுதியுள்ளோம். (8)ஆம் பத்தியின் விவரம் —ஆக இருக்கவேண்டுமானால், சுருக்க காலத்தின் மாதாந்தர மாற்ற வீதம், அதற்கு முந்திய விரிவு காலத்தின் மாதாந்தர மாற்ற வீதத்தைவிடக் குறைவாக இருக்கவேண்டும்; இந்த விதி முழுச்சுழலின் நேர் இணக்கத்தைக் காட்டுவது. (8)ஆம் பத்தியின் ஒவ்வொரு — விவரத்திற்கும் +100-ஐ மதிப்பாக வைத்தும், + விவரத்திற்கு —100ஐ மதிப்பாக வைத்தும், இணக்கக் குறியீட்டைக் கணக்கிடுவோம்; இவைகளைச் சாதாரணமாகச் சராசரியாக்கினால் கிடைப்பதே இணக்கக் குறியீடு. அட்டவணை 12-9-ன் (8)ஆம் பத்தியில் 11 மதிப்புகளும் —ஆனதால், தாழ்விற்குத் தாழ்வு, முழுச் சுழல் இணக்கக் குறியீடு +1100 ÷11 அல்லது +100 ஆகிறது.

நிறைவுபெற்ற முறையில் சில வரிசைகள் விரிவு சுருக்கப் பகுதிகளில் இணக்கம் இல்லாமல் அமையலாம். அப்பொழுது நமக்கு இரண்டாம் நிலை முழுச்சுழல் இணக்க அளவைத் தேவைப்படும். இதில் பொது வியாபாரத்தின் ஓர் ஏற்றத்திலிருந்து மற்றோர் ஏற்றத்திற்கான சுழல்களில் தனித்த தொடர்வரிசைகளின் அசைவுகளையும் கணக்கிலெடுத்துக்கொள்வோம். குறித்த ஒரு தொடர்வரிசையின் மாதாந்தர மாற்றச் சராசரியை (குறிப்பிட்ட குறிப்பு-சுருக்கத்தில்) C என்பதாலும், அதே தொடர்வரிசையில் அடுத்த விரிவுப் பகுதியில் நிகழும் மாதாந்தர மாற்றச் சராசரியை E_+ என்பதாலும் குறிப்பிடுவோம். அப்பொழுது $C-E_+$ என்பது ஏற்றத்திற்கு ஏற்றம் இணக்கத்தைக் குறிக்கும் அளவையாகிறது. பொது வியாபாரத்தில் நிகழும் சுழல்களுக்கு, தனித்த தொடர்வரிசை களில் இணக்க எதிரொலி ஏற்படுவதற்கு மூன்று விதிகள் உண்டு— குறிப்பு-சுருக்கத்திலிருந்து குறிப்பு-விரிவுப் பகுதிக்குச் செல்லும் பொழுது, அந்தத் தொடர்வரிசையில், இறக்கத்திலிருந்து ஏற்றத் திற்கான ஒரு மாற்றம் நிகழலாம்; அல்லது, இறக்க வீதத்தில் ஒரு குறைவு நிகழலாம்; அல்லது, ஏற்ற வீதத்தில் ஓர் அதிகரிப்பு

நிகழலாம். இம் மூன்று நிலைகளிலும், இந்த அளவையானது —ஆக இருக்கும். இதற்கு நேர்மாறான நிலைகள் ஏற்பட்டால், இந்த அளவை +ஆக இருக்கும். முழுச்சுழலுக்கான இணக்கக் குறியீட்டிற்கு நமக்குத் தேவைப்படுவது $C—E_+$ என்ற தொகையின் +அல்லது —குறிகள் மாத்திரமே. ஏற்றத்திற்கு ஏற்றம், இந்தக் 'குறி'களை (signs), அட்டவணை 12-9-ன், (9)ஆம் பத்தியில் காணலாம். ஒவ்வொரு —ஐயும் +100 ஆகவும், ஒவ்வொரு +ஐயும், —100 ஆகவும் கொண்டு சராசரியாக்கினால், ஏற்றத்திலிருந்து ஏற்றத்திற்கான முழுச்சுழல் இணக்கக் குறியீடு கிடைக்கிறது. சரக்குடன்-மைல்கள் விவரங்களுக்கு இந்தக் குறியீட்டின் மதிப்பு +100; எனவே, நிறைவுபெற்ற நேர் இணக்கத்தை இது குறிப்பிடுகிறது.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் (8), (9)ஆம் பத்திகளின் விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்ட இரண்டு குறியீடுகளும் சமமாக உள்ளன; ஆனால், வேறு சில நடக்கை-தோரணிகளில் இதுபோல் சமமாக அமையா. தாழ்விலிருந்து-தாழ்விற்கும், ஏற்றத்திலிருந்து-ஏற்றத்திற்கும் ஆன இரு குறியீடுகளையும் சராசரியாக்கி, நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் முழுச்சுழல் இணக்கத்தின் பொது அளவையைப் பெறுகிறார்கள். இஃது அட்டவணை 12-9-ல் 'சுழல்களுக்கு இரு வழியிலும்' என்ற வரிசையில் இணக்கக் குறியீடாகக் காணப்படுகிறது.

குறிப்புச் சுழல்களின் I, V, IX என்ற கட்டங்களால் பிரிக்கப்பட்ட நிலைபெற்ற (fixed) கால இடைவெளிகளில், தனிப்பட்ட தொடர்வரிசைகளின் நடக்கைகளைப்பற்றியே இதுவரை—இணக்கக் குறியீடுகளை விளக்கும்பொழுது—கருதிவந்தோம். பொது வியாபாரத்தில் நிகழும் சுழல் அசைவுகளுடன் மிகுந்த ஒழுங்குடன் எதிரொலியுள்ள தனிப்பட்ட தொடர்வரிசைகள் இருக்கலாம்—ஆனால், இந்த ஒழுங்கான எதிரொலிகள், பொது வியாபாரத்தின் திரும்புமுனைகளுக்குச் சற்றே பின்தங்கியோ, முன்னேறியோ அமையலாம் என்று நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தாரின் ஆராய்ச்சிகள் முடிவு கூறுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, சாதாரண பங்குகளின் (common stock) விலைகளுக்கும், வியாபாரச் சுழல்களுக்கும் மிக அதிகமான நேர் இணக்கம் (positive conformity) உள்ளது; ஆனால், இந்த விலைகளின் திரும்புமுனைகள், பொதுவியாபாரத் திரும்புமுனைகளுக்கு முன்னதாகவே நிகழும். இந்த விதமான தொடர்வரிசைகளில் காணப்படுகின்ற இணக்கத்தின் அளவையை, I, V, IX என்ற கட்டங்களால் பிரிக்கப்பட்ட ஒரு 'தர'மான சட்டத்தின் அடிப்படையில் கண்டுபிடிக்கப்பெற்ற இணக்கக் குறியீடுகள், திட்டமாகக் குறைவுபடுத்திக் காட்டக்கூடும். எனவே, கால வித்தியாசம் தெளிவாகவும் நிலையாகவும் எங்குக் காணப்படுகின்றதோ, அங்கு மற்றுமொரு இணக்கக் குறியீடுகளின் அடைவு (set) கணக்கிடப்பெறும். குறித்த

தொடர்வரிசையில் நிகழ்ந்துள்ள காலத் தோரணிக்குத் தகுந்த விரிவு, சுருக்கத் தோற்றங்களைப் பயன்படுத்தி இவைகளைக் கணக்கிடுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, சாதாரணப் பங்குகளின் விலைகளின் விரிவுத் தோற்றம், குறிப்புச் சட்டத்தின் VIII ஆவது கட்டத்திலிருந்து IV ஆவது கட்டம் வரையிலும், சுருக்கத் தோற்றம் IV ஆவது கட்டத்திலிருந்து VIII ஆவது வரையிலும் இருந்தது. ரயில்வே பாண்டுகளின் (bond) வருவாய்களுக்கான (yield) விரிவு காலம் III ஆவது கட்டத்திலிருந்து VI ஆவது வரைக்கும்; சுருக்க காலம் VI ஆவதிலிருந்து III ஆவது வரைக்கும் இருந்தது. கால வித்தியாசங்களைக் கருதிக் கணக்கிடப்படும் இணக்க அளவைகளுக்கும், அவைகளைக் கருதாமலே கணக்கிடப்படும் அளவைகளுக்கும் அதிகமான வேறுபாடு இருக்கலாம். ரயில்வே பாண்டுகளின் வருவாய்கள் எடுத்துக் காட்டில், தரச் சட்டத்தின் (இருவகைகளிலும்) இணக்கக் குறியீடு —16 ஆகவும், கால வித்தியாசங்களையும் கவனித்து கணக்கிட்டபொழுது அது +68 ஆகவும் இருந்தது.[13]

இந்த அளவைகளின் பயன்களை அறிவதற்காக நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் அக் குறியீடுகளைப் பயனுக்கும்பொழுது பெற்ற ஒருசில முடிவுகளைக் கூறுவோம். அமெரிக்க நாட்டில் சுழல் அசைவுகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியிலிருந்து 794 மாதாந்தர, காலாண்டுகளுக்கான தொடர்வரிசைகளின் இணக்கக் குறியீடுகளை மிச்சல் (Mitchell) தம் கடைசி நூலான 'What Happens during Business Cycles' என்பதில் சுருக்கமாகக் குறிப்பிட்டுள்ளார். பொருளாதாரத் துறைகளின் ஒரு நல்ல பிரதிநிதியான மாதிரியாக இதைக் கருதவேண்டியதில்லை; வரிசைகளின் மொத்த அடக்கம் (coverage) வெவ்வேருக உள்ளதைத் தவிர்க்கமுடியாது. ஆனுல், இந்த மாதிரியில் பொருளாதார அமைப்பின் எல்லா முக்கியப் பிரிவுகளிலிருந்தும், பொருளாதாரச் செயலின் எல்லாத் தோற்றங்களிலிருந்தும் தொடர்வரிசைகள் இடம் பெற்றுள்ளன. இந்த 794 இணக்கக் குறியீடுகளையும் மொத்த மதிப்புவாரியாக (+ அல்லது — என்ற குறிகளைக் கவனிக்காது) ஒழுங்குபடுத்தினுல் கீழ்க்கண்ட இடைநிலை மதிப்புகள் (median values) கிடைக்கின்றன.

			இடைநிலை
குறிப்பு-விரிவுகளுக்கான இணக்கக் குறியீடுகள்			67
குறிப்பு-சுருக்கங்களுக்கான	,,	,,	60
முழுக் குறிப்பு-சுழல்களுக்கான	,,	,,	78

இவை, பொது வியாபாரத்தின் சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களுக்கும், பொருளாதாரத்தொடர்வரிசைகளுக்கும் அதிகமானதும், சிறப்பானது

[13] கால வித்தியாசங்களையும் கவனித்து, இணக்க அளவைகளை கண்டுபிடிக்கும் முறைகளைப்பற்றிய விரிவான விளக்கத்தை 'Measuring Business Cycles' (து. நா. ப. 13) என்ற நூலின் 185—197 பக்கங்களில் காணலாம்.

மான இணக்கம் உள்ளதை எடுத்துக்காட்டும். இந்த விவரங்களால் விளக்கப்பட்ட காலத்தில் அமெரிக்கப் பொருளாதார அமைப்பின் இயல்பான ஏற்றத்தின் போக்கை, விரிவு-சுருக்கங்களுக்கான இடைநிலை அளவைகளின் மதிப்புகள் நன்கு காட்டுகின்றன.

அட்டவணை 12-10

வியாபாரச் சூழல்களுக்கான சராசரி இணக்கங்கள் விவசாய, விவசாயமல்லாத தொழில்களின் உற்பத்தியும் விலைகளும்*

	விலைகள்		உற்பத்தி	
	தொடர் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை	இணக்கக் குறியீடுகளின் சராசரி மதிப்பு	தொடர் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை	இணக்கக் குறியீடுகளின் சராசரி மதிப்பு
விவசாயம்	51	51.6	47	41.8
விவசாயமல்லாத தொழில்கள்	96	64.2	141	84.2

பொருளாதார அமைப்பின் பல பகுதிகளில் இணக்க அளவைகளும் மாறுபடும் என்பது தெளிவு. அட்டவணை 12-10-லுள்ள அளவைகள் சிறப்பான வித்தியாசங்களைக் குறிக்கின்றன. இந்த அட்டவணை பல முக்கியமான பொருளாதார முடிவுகளை விளக்குகிறது. விவசாய உற்பத்தித் துறையில்தான் மிகக் குறைவான இணக்கத்தைப் பார்க்கிறோம்; பல விவசாயத் துறைகளில் வியாபாரத்தின் இயக்கங்களைவிட, தட்பவெப்ப நிலைகளே உற்பத்தியை நிர்ணயிக்கும். விவசாயமல்லாத தொழில்களின் உற்பத்திக்கான இணக்கக் குறியீடு தான் மிகப் பெரியது. இந்தத் துறையிலுள்ள எல்லாத் தொழில்களிலுமே குறுகிய கால அளவிற்குள் உற்பத்தியைக் கட்டுப்படுத்த முடியும்; மார்க்கெட் நிலவரங்களின் மாற்றங்களுக்குத் தக்கவாறு தொழிலில் மாற்றங்கள் அமைப்பதற்கு உற்பத்திக் கட்டுப்பாடே (production control) சிறந்த முறையாகக் கையாளப்படுகிறது. விவசாயமல்லாத துறைகளில் உற்பத்தியைவிட விலைகள் வியாபாரச் சூழல்களுக்குக் குறைவான இணக்கத்தையுடையன. குறிப்பாக, வியாபாரச் சுருக்க காலங்களில் விலைகளில் அவ்வளவாக இறக்கம் தெரிவதில்லை; அதேபோன்று விரிவு நிகழும்பொழுதும் அவைகளில் குறைவான ஏற்றமே தெரியும். அது, 'திட்டமான விலைகளை'யே கொண்டுள்ள தொழில்களில் பொதுவாகவே காணப்பெறும் நடக்கை தான். கடைசியாக, பொது வியாபாரச் செயல்களின் சூழல்களுக்கும், விவசாய உற்பத்திகளுக்குமுள்ள இணக்கத்தைக் காட்டிலும், விவசாயப் பொருள்களின் விலைகளுக்கு அதிகமான அளவு இணக்க

* 'Mesuring Business' என்ற (அ. நா, ப. 13) நூலின் 88ஆம் பக்கத்தின் அடிக்குறிப்பைத் தழுவியது.

மிருப்பதைக் காண்கிருேம். வெளிப்பாடு இணக்கமற்றிருக்கும் பொழுது, தேவைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவுகள் விலைகளின்மேல் படுவது இயல்புதான்.

மிச்சலால் (Mitchell) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மற்ற அளவைகள், பற்பல பொருளாதாரச் செயல்களில் அதிக வீச்சுடைய இணக்கங்களைக் காட்டுகின்றன. பொதுத்துறைக் கட்டுதல் (public construction) கன்டிராக்டுகளுக்கான முழுச் சுழல் இணக்கம் சராசரியாக 32 (+, — குறியைக் கவனிக்காமலே கணக்கிட்டது); பாண்டுகளின் வருவாய்கள், மற்றும் அதிக கால வட்டிவீதங்களுக்குச் சராசரி 66; பாங்கு கிளியரிங்குகளுக்கு (clearings) 83; தனித்துறைக் (private) கட்டுதல் கன்டிராக்டுகளுக்கு 87; நீடித்த (durable) பொருள் தொழில்களின் சம்பளப் பட்டியல்களுக்கு (pay-rolls) 100; வாரத்தில் வேலை நடைபெறும் கால மணிக்கு 100. இவ்வாறு மற்றும் பல துறைகளுக்கு மிச்சல் இணக்கக் குறியீடுகளைக் கொடுத்துள்ளார். அவைகளை ஒருங்கே நோக்குவதால், அவைகளின் தோரணிகளிலுள்ள பொருத்தத்தையும் (consistency), அசைவுகளிலுள்ள அதிக அளவு இணக்கத்தையும் நாம் காண்கிருேம். ஆனால், தனிப்பட்ட தொடர்வரிசைகளுக்கும், பொதுவான ‘சுழல்’களுக்குமுள்ள இணக்க அளவுகளில் மிகுந்த வேறுபாடு இருப்பதும், அவைகளின் அசைவுகளுக்கான காலங்களில் அதிக வித்தியாசமிருப்பதும் நமக்குப் புலனாகும்.

‘சிறப்பு’ச் சுழல்களின் விளக்கம் (The Description of Specific Cycles)

நேஷனல் பியூரோவினரின் சுழல்களைப்பற்றிய ஆராய்ச்சிகளைக் குறிப்பிடும்பொழுது இரு பகுதிகளைப்பற்றிக் கூறினேம். இதுகாறும் இவைகளில் முதலதை விளக்கினேம். அதாவது, பொது வியாபாரச் சுழல் திருப்பமுனைகளால் அமைக்கப்பெற்ற ஒரு குறிப்புச் சட்டத்தில் தனிப்பட்ட தொடர்வரிசைகளின் நடக்கையை விளக்கினேம். இப்பொழுது இரண்டாவது பகுதியைக் கவனிப்போம். இங்குக் குறித்த ஒரு தொடர்வரிசையின் சுழல்களை ஆராய்வோம்; அந்த வரிசையில் சுழல் அசைவுகள் இருக்குமானல், அதே வரிசையின் தாழ்வுகளாலும் ஏற்றங்களாலும் அமையக்கூடிய ஒரு சட்டத்தில் அவைகளை விளக்குவோம். அதாவது, இதுவரை வைத்ததைப்போன்று, குறிப்புத் திருப்பமுனைகளால் அமைக்கப்பெறும் பொதுச் சட்ட எடுகோளுக்குப் பதிலாக, அந்தத் தொடர்வரிசைக்கே ‘சிறப்பான’ சுழல்களின் திருப்பமுனைகளை விளக்கங் கூறுவதான பற்பல சட்டங்களைக் கருதுவோம். என்ருலும், இவைகளை ஆராய்வதால், பொதுவாக வியாபாரச் செயலில் பொதுவானதோர் அலை இயக்கம் உள்ளது என்ற அடிப்படை கருத்தைப் புறக்கணிப்பதாகாது. தனித்த தொடர்

வரிசைகளில் "சிறப்பான' சுழல்களைப்பற்றி ஆராய்பவர்—நேஷனல் பியூரோவினரின் கருத்திற்கிணங்க—ஓர் ஆண்டுக்கு மேல் பத்து அல்லது பன்னிரண்டு ஆண்டுகள்வரை நிகழும் சுழல்கள் இருப்பதனையே தேடுவார். தகுந்த ஏற்றவிறக்கங்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான இந்தப் பொதுவானதொரு வழிகாட்டியைத் தவிர, பொது வியாபாரச் சுழல்களைப்பற்றிய கருத்துகள், 'சிறப்பான' சுழல்களின் ஆராய்ச்சியைப் பாதிப்பதில்லை.

அடிப்படையாக நோக்குவோமேயானால், குறிப்புச் சுழல்களின் தன்மைகளை விளக்கும் முறையை யொட்டினாற்போலவே, சிறப்புச் சுழல்களுக்கும் முறை அமையும். சரக்கு டன்-மைல்கள் போன்ற மாதாந்தர விவரங்களுக்கு, (அட்டவணை 12-4) பருவகாலத் திருத்தங்கள் அமைக்கப்படும். பிறகு திருத்தப்பட்ட தொடர்வரிசைக்கு, சுழல் தாழ்வுகள், ஏற்றங்களுக்கான காலங்களை அமைப்பர். அப்படிச் செய்யுங்கால், ஓராண்டுக்குமேல் பத்து அல்லது பன்னிரண்டு ஆண்டுகள் நிகழும் சுழல்களைக் குறிக்கும் திருப்பமுனைகளையே ஆராய்ச்சியாளர் தேடுவார். பல தொடர்ச்சிகளுக்குச் 'சிறப்பான' சுழல் அசைவுகள் தெளிவாக விளங்குமாயினும் சுழல்களைக் குறிப்பதற்கான பல முடிவுகள் ஆராய்ச்சியாளர் தம் கருத்தைக் கொண்டே காணவேண்டியவையாகும். சில தொடர்ச்சிகளில் சுழல்களுக்கான சான்றுகள் ஒன்றும் கிடைக்காமலே போகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, எஃகு ரயில்வே கம்பிகளின் (rails) விலைகள், இந்த நூற்றாண்டுத் தொடக்கத்தில் பல ஆண்டுகளுக்கு மாறுமலேயே இருந்தன. ஆனால், நேஷனல் பியூரோவினர் சுமார் 830 மாதாந்தர, காலாண்டுக்கான தொடர்ச்சிகளை ஆராய்ந்துள்ளனர்; அவைகளில் 5 சதவீதத் தொடர்வரிசைகளில்தாம் சிறப்பான சுழல்கள் தென்படவில்லை. முதலில் அடுத்தடுத்த தாழ்வுகளையும், ஏற்றங்களையும் குறிப்பிட்டு (படம் 12.3-ல் * என்ற அடையாளத்தால் காட்டப்படுபவை), பிறகு அடுத்தடுத்து நிகழும் தாழ்வுகளைக்கொண்டு தொடர்ச்சியைப் பிரிவுகளாக்குவார்கள். (சுழல் அலைகளுக்கு எதிரிடை அசைவுகளுள்ள தொடர்வரிசைகளில்—எடுத்துக்காட்டாக, திவால்களுக்கான தொடர்வரிசைகளில்—ஏற்றத்திலிருந்து ஏற்றத்திற்குச் சிறப்புச் சுழற் பகுதிகள் கணக்கிடப்பெறும்.) பிறகு ஒவ்வொரு பகுதியிலுமுள்ள மாதாந்தர விவரங்களைச் சராசரியாக்கி, அவைகளை அந்தச் சராசரியின் ஒப்புமைகளாகக் கணக்கிடுவோம். குறிப்புச் சட்டத்தை அமைக்கும்பொழுது ஏற்படுத்தியவாறே இயங்கும் 9 கட்டங்களை ஏற்படுத்துவோம்; பிறகு 'சிறப்புச்-சுழல்' ஒப்புமைகளிலிருந்து கட்டச் சராசரிகளைக் கண்டுபிடிப்போம். இந்தக் கட்டச் சராசரிகள் சிறப்புச் சுழல் தோரணியை விளக்கும்—அதாவது, ஒவ்வொரு சிறப்புச் சுழலிலும் அந்தத் தொடர்வரிசையின் நடக்கைத் தோரணியை அவை விளக்கும்.

அட்டவணை 12–11

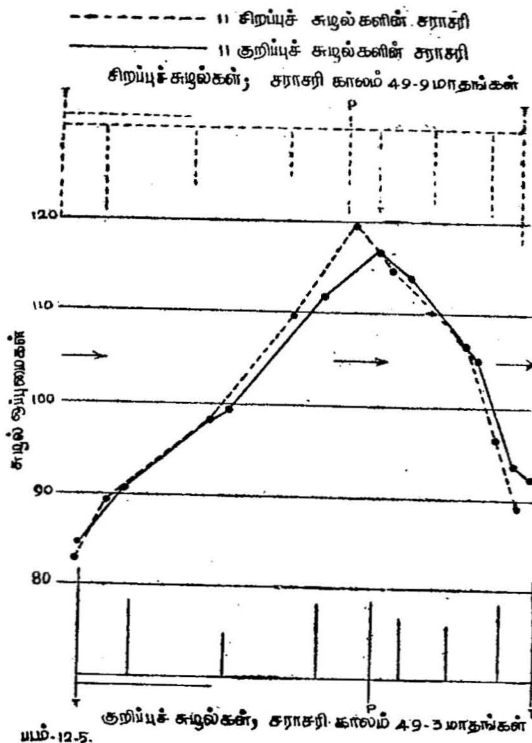
1904-1949* ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்களின் சிறப்புச் சுழல் தோரணிகள்

சிறப்புச் சுழல்களின் காலங்கள்			சுழலின் ஒன்பது கட்டங்களில் சிறப்புச்சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரிகள்								
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
தாழ்வு	ஏற்றம்	தாழ்வு	முதன்மைத் தாழ்வில் மையமான மூன்று மாதங்கள்	மூன்றில் முதலாவது	விரிவு மூன்றில் இரண்டாவது	கடைசியானது	ஏற்றத்தில் மையமான மூன்று மாதங்கள்	மூன்றில் முதலாவது	சுருக்கம் மூன்றில் இரண்டாவது	கடைசியானது	கடைசி தாழ்வில் மையமான மூன்று மாதங்கள்
	(1)		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1 ஜன 04	ஜூன்07	ஜூன்08	82 9	85.8	98.0	109.2	120.6	117.4	107.0	98.1	97.4
2 ஜூன்08	ஏப்.10	மார்ச்.11	85.5	91.5	95.8	104.6	109.1	107.4	104.4	104.6	102.7
3 மார்ச்.11.	பிப்.13	டிச.14	89.2	90 6	95.1	104.6	113.5	107.6	103.4	98.2	94.4
4 டிச.14	ஏப்.18	மார்ச்.19	74 0	84.1	99.1	107.9	121.0	118.8	111.0	102.8	93.8
5 மார்ச்.19	பிப்.20	ஜூலை21	91.7	93.0	100.3	103.6	116.4	108.6	107.4	83.7	80.4
6 ஜூலை21	ஏப்.23	ஜூன்24	80.2	85.0	86.6	107.1	120.9	116.0	105.1	108.0	100.1
7 ஜூன்24	ஜூலை26	டிச.27	87.3	93 2	97.3	102.4	107.6	106.6	104.1	99.5	96.8
8 டிச.27	ஆக.29	ஜூலை32	109.1	112.4	118.4	120.3	121.0	109.8	91.8	69.2	54.7
9 ஜூலை32	ஏப்.37	மே38	69.9	84 4	93.0	114.2	135.1	125.8	111.7	96.6	93.5
10 மே38	பிப்.44	மே46	50.3	59.6	82.9	127.9	139.4	133.6	134.2	108.5	95.2
11 மே46	டிச.47	அக்.49	85.1	100.7	106.4	105.7	108.9	103.8	100.3	87.1	76.5
1904-1949-ன் 11 சுழல்களினது சராசரி			82.3	89.1	97.5	109.8	119.4	114.1	107.3	96.0	89.6
சராசரி விலக்கம்			10.0	8.5	6.3	6.0	7.6	7.4	6.4	8.8	10.4

* இத [illegible] அட்டவணை A4 ஆகும்.

1904—1949 ஆண்டுகளுக்கான சரக்கு டன்-மைல்களின் மாதாந்தர விவரங்களுக்கு இம் முறையைப் பயன்படுத்தினால், அட்டவணை 12-11-ல் உள்ள விவரங்கள் கிடைக்கும். இந்தத் தொடர்ச்சிக்கான முதல் சிறப்புச் சுழல், 1904ஆம் ஆண்டு ஜனவரியின் தாழ்வில் துவக்கப்பெற்று, 1907ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்தில் ஏற்றமடைந்து, 1908ஆம் ஆண்டு ஜூனில் மற்றொரு தாழ்வை அடைந்தது. (இந்த மூன்று காலங்களில், கடைசியானதுமட்டும் குறிப்புச்சுழல் தாழ்வின் காலத்துடன் சமமாகிறது; மற்ற இரு காலங்களும் குறிப்புச் சுழல் திருப்பமுனைகளுடன் ஒத்தனவாக இல்லை என்பதை வாசகர் — அட்டவணை 12-7ஐப் பார்க்க—கவனிப்பார்.) இந்த முதல் சிறப்புச் சுழலில், சரக்கு டன்-மைல்கள், Iஆவது கட்டநிலை மதிப்பான 82.9 லிருந்து (சிறப்புச்சுழல் ஒப்புமைகளில்), Vஆவது கட்ட நிலைக்கான 120.6-க்கு ஏற்றமடைந்து, பிறகு IXஆவது கட்டத்தில் 97.4ஆகத் தாழ்வுறுகிறது. குறிப்பிட்ட 46 ஆண்டுகளில் 11 சிறப்புச் சுழல்களைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். அவைகளின் தோரணி, ஒன்பது கட்டச் சராசரிகளால் விளக்கப்பட்டு மாறுபட்டுள்ளன என்பது வெளிப்படை. இந்த வித்தியாசங்களை நீக்கக் குறிப்புச் சுழல்களுக்குச் செய்ததுபோலவே, ஒவ்வொரு கட்டத்திற்கும் சராசரியையும் சராசரி விலக்கத்தையும் கணக்கிடலாம். அப்பொழுது, காணப்படும் 11 சிறப்புச் சுழல்களிலும், சராசரியாக அத் தொடர்ச்சியின் நடக்கையை அறிவதற்கான அளவைகளைப் பெறலாம். அட்டவணை 12-11-ல் கடைசி வரிக்கு முதல் வரியில் இந்த 11 கட்டச் சராசரிகளையும் காணலாம். படம் 12.5-ல்......என்ற விடுபட்ட கோட்டினால் இவைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இந்த விடுபட்ட (broken) கோட்டிற்கான குத்துக் கோட்டின் அளவுத் திட்டமானது (scale), சிறப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளிலுள்ளது, கிடைக்கோட்டின் ஸ்கேல் மாதங்களிலுள்ளது. [தாழ்விலிருந்து தாழ்விற்கு — T-லிருந்து T-க்கு — படத்தின் மேல்பகுதியில் காட்டியிருக்கும் முழு கிடைத்தூரம், சரக்கு டன்-மைல்களின் சிறப்புச் சுழல்களின் சராசரி காலத்துடன் விகித சமமான (proportionate) முறையிலுள்ளது.] சிறப்புச் சுழல் தோரணியின் சாரசரி போக்கு முதல் தாழ்விலிருந்து பெருமளவில் ஒழுங்காக ஏற்றமடைந்து, அதேபோன்ற, ஆனால் சற்றுக் குறைவான இறக்கத்துடன் மறுபடியும் தாழ்வை அடைகிறது. (ஏற்றத்திற்கும் தாழ்விற்குமிடையேயுள்ள வித்தியாச அளவானது குறிப்பிட்ட காலத்தில், சரக்கு டன்-மைல்களின் நெடுங்காலப் போக்கைச் சுட்டிக்காட்டுகிறது.) மற்றும், படத்திலிருந்து நாம் மற்றொன்றையும் அறியலாம். அதாவது (கால அளவில், T-யிலிருந்து P வரையுள்ள) சிறப்புச் சுழல் விரிவின் தோற்றம், சுருக்கத் தோற்றத்தைவிட அதிகமான கால இடைவெளியுடையது என்பதே. இதனைப்பற்றிப் பின்பும் கூறுவோம்.

வெவ்வேருன பல அசைவுகளின் சராசரிதான், படம் 12.5-ல் காட்டப்பெற்றுள்ள சரக்கு டன்-மைல்களின் சிறப்புச் சுழல் தோரணி. இந்தத் தொடர்ச்சியில், சுழலுக்குச் சுழல் எவ்வளவு மாறுபாடு இருந்தது? இதற்கு விடை காண அட்டவணை 12-11-ன் கடைசி வரியிலுள்ள சராசரி விலக்கங்களைப் பார்க்கலாம். ஒவ்வொரு கட்டச் சராசரிக்கும் ஒரு விலக்கம் உள்ளதையும் காணலாம். தாழ்வில்தான் மிக அதிகமான மாறுபாடு இருந்தது; முழு விரிவுக்கான அலையிலும் (III, IVஆம் கட்டங்களில்) சுருக்கத்தின் மத்தியிலும்



படம்-12.5.

1904 – 1949-ல் அமெரிக்காவின் ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்களினது குறிப்புச் சுழல்களின், மற்றும் சிறப்புச் சுழல்களின் தோரணிகள். குறிப்பு, மற்றும் சிறப்புச் சுழல்கள் ஒன்பது கட்டங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன; இந்த ஒன்பது கட்ட நிலைகளின் சராசரி மதிப்புகள் குறிப்புச் சுழல்களுக்கு விடுபடாத கருப்புக் கோடுகளாலும், சிறப்புச் சுழல்களுக்கு விடுபட்ட (broken) கருப்புக் கோடுகளாலும் 9 புள்ளிகளில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

மூலம் : நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச்.

(கட்டம் VII) மிகக் குறைந்த மாற்றமே இருந்தது. பொதுவாக, ஏற்றத்தில், தாழ்விலிருப்பதைவிடக் குறைவான மாறுபாடே இருந்தது. இந்த விவரங்கள் சுழல் அசைவுகளை ஆராயும் மாணவருக்கு வெகு முக்கியமானவை ஆகும்.

படம் 12·5-ல் உள்ள கருப்புக் கோடு, சரக்கு டன்-மைல்களின் குறிப்புச் சுழல் சராசரி தோரணியைக் குறிப்பிடுகிறது. இதனை முற்பகுதியில் படித்தோம். குறிப்பு, சிறப்புச் சுழல்களிடையே உள்ள தொடர்பு, இந்த எடுத்துக்காட்டில் நெருங்கியுள்ளதைத் தெளிவாகக் காண்கிறோம்.

இந்தப் படத்தில் அமைந்துள்ள பற்பல தகவல்களைப் படிப்பவர் நன்கு கவனிக்கவேண்டும். சிறப்புச் சுழல்களின் கால இடைவெளிக்கான அளவுத் திட்டத்தைப் (scale) பற்றி முன்பே குறிப்பிட்டோம்; அஃது ஒரு தாழ்விலிருந்து மற்றொரு தாழ்விற்குப் படத்தின் மேல்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. படத்தின் அடிப் பகுதியில் அதே வகையைச் சேர்ந்த குறிப்புச் சுழல்களின் சராசரி கால இடைவெளிக்கான அளவுத் திட்டம் (scale) உள்ளது; இது நீளத்தில் குறிப்புச் சுழல்களின் சராசரி கால இடைவெளிக்கு விகித சமமாகும். அதே அளவுத் திட்டத்தின்படிக்கு, சிறப்புச் சுழல்களுக்கான கால அளவைகளின் சராசரி விலக்கத்தை, மேலேயுள்ள குட்டையான புள்ளிக் கோடு (dotted line) காட்டுகிறது; அதே போன்று படத்தின் கீழேயுள்ள குட்டையான கோடும், சரக்கு டன்-மைல்களின் குறிப்புச் சுழல்களுக்கான தகவலைக் காட்டுகிறது. படம் 12.5-ன் மேற்பகுதியில் புள்ளிக் கோட்டிலிருந்து கீழே செல்லுமாறு அமைந்துள்ள ஒன்பது செங்குத்தான புள்ளிக் கோடுகளும், சிறப்புச் சுழல்களின் I-லிருந்து IX வரையுள்ள கட்ட அளவைகளின் சராசரி விலக்கங்களுக்கு விகித சம முறையில் உள்ளன; அதேபோல் படத்தின் அடியிலுள்ள முழு கருப்புக் கோடுகள், சரக்கு டன்-மைல்களினது கட்டங்களின் சராசரி விலக்கங்களை அளவிடுகின்றன. சிறப்புச் சுழல்களுக்குச் சராசரி விலக்க அளவைகளும்—கட்டச் சராசரிகளைப்போல்—சிறப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளில் உள்ளன; குறிப்புச் சுழல்களுக்குக் குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளிலுள்ளன. சிறப்புச் சுழல் திருப்ப முனைகளுக்கும், குறிப்புச்சுழல் திருப்ப முனைகளுக்கும் இடையே உள்ள காலத்தொடர்புகளை, அம்புக்குறிகள் (arrow marks) காட்டுகின்றன. இவைகளைப்பற்றிப் பின்பு குறிப்பிடுவோம். ஒரே சீரான அளவுத் திட்டத்தைக்கொண்ட இதுபோன்றதொரு 'தர' மான (standard) விளக்கப் படத்தால், ஒரு குறித்த தொடர்ச்சியின் சுழல் நடக்கையைப்பற்றிய முக்கியத் தன்மைகளைத் தெளிவாக அறியவும், பல தொடர்வரிசைகளின் அளவைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் எளிதில் முடியும்.

அட்டவணை 12-12

சிறப்புச் சுழல்களின் கட்டத்திற்கான, மாதாந்தர மாற்றங்களின் சராசரி விதங்கள்; ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல் தகவல்கள், 1901—1949*

	கட்டத்திலிருந்து கட்டத்திற்கு நிகழும் மாற்றங்களின் மாதாந்தர விதங்கள் (சிறப்புச் சுழல் ஒப்புமைகள் அளவில்)							
	I-II	II-III	III-IV	IV-V	V-VI	VI-VII	VII-VIII	VIII-IX
	விரிவு				சுருக்கம்			
	தாழ்விலிருந்து மூன்றில் முதலானதற்கு	மூன்றில் முதலிலிருந்து இரண்டாவதற்கு	இரண்டாவதிலிருந்து மூன்றுவதற்கு	மூன்றில் மூன்றுவதிலிருந்து ஏற்றத்திற்கு	ஏற்றத்திலிருந்து மூன்றில் முதலாவதற்கு	முதலிலிருந்து இரண்டாவதற்கு	இரண்டாவதிலிருந்து மூன்றுவதற்கு	மூன்றுவதிலிருந்து தாழ்விற்கு
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1904–1949-க்கான 11 சுழல்களின் சராசரிகள்	+1.3	+0.9	+1.1	+2.0	—1.6	—1.4	—1.9	—1.9
சராசரி விலக்கம்	0.6	0.3	0.6	1.1	0.7	1.0	1.2	1.1
சராசரி இடைவெளி (மாதங்களில்)	5.6	10.2	10.2	5.6	3.3	5.8	5.8	3.3
நிறையிட்ட சராசரி	+1.2	+0.8	+1.2	+1.7	—1.6	—1.2	—1.9	—1.9

* நேஷனல் பியூரோவின் குறியீட்டின்படிக்கு இந்த அட்டவணை A5 எனப்படும்.

குறிப்புச் சுழல் தோரணிகளைப்பற்றி ஆராயும்பொழுது, சுழல் கட்டங்களிடையே உள்ள மாற்ற வீதங்களின் அளவைகள் பயன் படும் என்பதைக் கவனித்தோம். இதேபோன்ற வீதங்களைச் சிறப்புச் சுழல்களுக்கும் கணக்கிடலாம். அட்டவணை 12-12-ல் அது போன்ற வீதங்களின் சராசரிகளைக் காணலாம். குறிப்புச் சுழல் களுக்கான அட்டவணையில் (அட்டவணை 12-8) இருந்ததுபோலவே, இங்கும் கட்ட இடைகளுக்கான மாற்ற வீதங்களை—நிறையிட்டது, நிறையிடாதது—மாதத்திற்கு இவ்வளவு என்ற அளவுகளில் காண் போம். இந்த விவரப் பதிவேடுகளில் அமைந்த 11 சிறப்புச் சுழல் களின் காலத்தில் நிகழும் கட்டங்களிடையே உள்ள மாதாந்தர மாற்ற வீத அளவைகளின் சாதாரணச் சராசரிதான் நிறையிடாத சராசரி. ஒவ்வோர் அளவையையும், அதற்கான கால இடைவெளி மாதங்களின் எண்ணிக்கையால் நிறையாக்கிக் கணக்கிட்டால், கடைசி வரியிலுள்ள நிறையிட்ட சராசரிகள் கிடைக்கும். இந்த இரண்டு—நிறையிடாத, நிறையிட்ட—சராசரிகளும் சரக்கு டன்-மைல்களின் விரிவு வீதம் II ஆம் கட்டத்திற்குப் பிறகு குறை வதையும், அதற்குப் பின்பு அதிகமாவதையும் காட்டுகின்றன; சுருக்கம் VI ஆவது கட்டத்திற்குப் பிறகு சற்றே தடைப்படுகிறது; ஆனால், VII—IX ஆம் கட்டங்களிடையே அதிகமான வேகத்தை அடைந்து நிலைத்து நிற்கிறது.

சிறப்புச் சுழல்கள் நிகழும் நேரமும் அவைகளின் காலமும் (Timing and Duration of Specific Cycles) : வியாபாரச் சுழல்களில் தாழ்வுகளும் ஏற்றங்களும் ஏற்படும்பொழுது நேரும் மாற்றங்களின் தொடர்ச்சிகளைச் (sequence of change) சுழல்முறைகளை ஆராய் வோர் மிகுந்த அக்கறையுடன் கவனிப்பர். வேலைகள், உற்பத்தி, மொத்த விற்பனைகள், சில்லறை விற்பனைகள், பட்டியல்கள் (inventories), விலைகள், வட்டி வீதங்கள், மற்றும் ஏனைய பொரு ளாதாரச் செயலின் பல தொடர்வரிசைகளின் தொடர் அசைவுகளைக் கொண்டு குறிப்பிடப்படுவதே வியாபாரச் சுழல்களாகும். இந்தத் தொடர்ச்சிகளுக்கு விளக்கம் கூறி, அவைகளில் ஒழுங்குள்ளமையைக் (regularity) காணுவதே ஆராய்ச்சியாளரின் நோக்கம்.

தனித்த தொடர்வரிசைகளுக்கான நிகழும் நேர (timing) அளவைகளைக் கணக்கிடுவதற்கு நேஷனல் பியூரோவினர் சிறப்புச் சுழல்களின் தாழ்வுகளும் ஏற்றங்களும் நிகழ்கின்ற காலங்களையும், அவைகள் குறிப்புச் சுழற் சட்டத்தில் முறையே நிகழகின்ற காலங் களையும் ஒப்பிடுகிறார்கள். அட்டவணை 12-13-ல், சரக்கு டன்-மைல் களுக்கான விவரங்களைக்கொண்டு, முதல் ஐந்து பத்தி எண்களில் இந்த முறை விளக்கப்பெற்றுள்ளது. இந்த அட்டவணையிலுள்ள (3), (5)ஆம் பத்தி விவரங்கள் அட்டவணை 12-7-லிருந்த குறிப்புச்

அட்டவணை 12–13

சிறப்புச் சுழல்கள் நிகழும் நேரமும், அவைகளின் கால இடைவெளியும் ரயில்வே சரக்கு டன் - மைல்கள் 1904-49*

சிறப்புச் சுழல்களின் காலம்			முன்னோட்டம் (—) அல்லது பின்னடைவு (+)				சுழல் அசைவுகளின் கால இடைவெளிகள்				
			குறிப்பு ஏற்றத்தில்		குறிப்புத் தாழ்வில்		சிறப்புச் சுழல்கள்			சிறப்புச் சுழல்களின் சதவீத கால இடைவெளி	
தாழ்வு	ஏற்றம்	தாழ்வு	மாதங்களின் எண்ணிக்கை	குறிப்புக் காலம்	மாதங்களின் எண்ணிக்கை	குறிப்புக் காலம்	விரிவு	சுருக்கம் (மாதங்களில்)	முழுச்சுழல்	விரிவு	சுருக்கம்
	(1)		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1. ஜனவரி 04	ஜூன் 07	ஜூன் 08	+ 1	5/07	0	6/08	41	12	53	77	23
2. ஜூன் 08	ஏப்ரல் 10	மார்ச்சு 11	+ 3	1/10	—10	1/12	22	11	33	67	33
3. மார்ச்சு 11	பிப்ரவரி 13	டிசம்பர் 14	+ 1	1/13	0	12/14	23	22	45	51	49
4. டிசம்பர் 14	ஏப்ரல் 18	மார்ச்சு 19	— 4a	8/18	— 1a	4/19	40	11	51	78	22
5. மார்ச்சு 19	ஆகஸ்டு 20	ஜனவரி 22	+ 7a	1/20	+ 4a	9/21	17a	17a	34a	50a	50a
	ஏப்ரல் 18	மார்ச்சு 19	— 4	8/18	— 1	4/19					
6. மார்ச்சு 19	பிப்ரவரி 20	ஜூலை 21	+ 1	1/20	— 2a	9/21	11	11a	28	39	61
7. ஜூலை 21	ஏப்ரல் 23	ஜூன் 24	— 1a	5/23	— 1a	7/24	21a	17	35a	60a	40a
		ஜூலை 21			— 2	9/21		14a			
8. ஜூலை 21	ஏப்ரல் 23	ஜூன் 24	— 1	5/23	— 1	7/24	21	14	35	60	40
9. ஜூன் 24	ஜூலை 26	டிசம்பர் 27	— 3	10/26	0	12/27	25	17	42	60	40
10. டிசம்பர் 27	ஆகஸ்டு 29	ஜூலை 32	+ 2	6/29	— 8	3/33	20	35	55	36	64
11. ஜூலை 32	ஏப்ரல் 37	மே 38	— 1	5/37	0	5/38	57	13	70	81	19
12. மே 38	பிப்ரவரி 44	மே 46	—12	2/45	+ 7	10/45	69	27	96	72	28
13. மே 46	டிசம்பர் 47	அக்டோ. 49	—11	11/48	0	10/49	19	22	41	46	54
1904-49-க்கான 11 சுழல்களின் சராசரி			— 2.2		— 1.4		31.6	18.3	49.9	61	39
சராசரி விலக்கம்			3.9		2.9		14.6	6.0	13.7	13	13

* நேஷனல் பியூரோவினரின் குறியீட்டின்படி அட்டவணை A1-ன் ஒரு பகுதியாகும் இந்த அட்டவணை.

a இவைகள் சராசரிகளைக் கணக்கிடும்பொழுது நீக்கப்பெற்றவை.

சுழற் காலங்களே. இந்தத் தனிப்பட்ட தொடர் வரிசையின் சிறப்புச் சுழல்களின் தாழ்வுகள் ஏற்றங்களுக்கான காலங்களை (1)ஆம் பத்தியில் பார்க்கலாம். ஒரு தொடர்வரிசையின் சிறப்புச் சுழலின் திருப்பக் காலமொன்று, அதற்கான குறிப்புச் சுழலின் திருப்பக் காலத்திற்கு முன்பு வந்தால், அவைகளின் இடைவெளி மாதங்களை 'முன்னோட்டம்' (lead) என்று கருதி, அதற்கு ஒரு — குறியை (minus sign) அளிப்போம். சிறப்புச் சுழல் திருப்பம் நிகழ்வதற்கு முன்பே குறிப்புச் சுழல் திருப்பம் நிகழ்ந்திருந்தால், வித்தியாசத்தைப் (மாதங்களில்) 'பின்னடைவு' (lag) என்று அழைத்து, + குறியால் காட்டுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, அட்டவணை 12-13-ன் (2)ஆம் பத்தியில் முதல் எண்ணிக்கை +1. குறிப்புச் சுழலின் ஏற்றம் 1907ஆம் ஆண்டு மே மாதம் நிகழ்ந்தது; இதற்குப் பின் 1907ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்தில், சரக்கு டன்-மைல்களில் சிறப்புச் சுழலின் ஏற்றம் நிகழ்ந்ததை இது குறிப்பிடுகின்றது. அதே வரிசையின் (4)ஆம் பத்தியில் 0 என்பதுள்ளது; 1908ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்தில் சரக்கு டன்-மைல்களில் தாழ்வும், குறிப்புச் சுழலில் தாழ்வும் ஒருங்கே நிகழ்ந்ததை இது குறிக்கிறது. சரக்கு டன்-மைல்களின் அடுத்த தாழ்வு 1911ஆம் ஆண்டு மார்ச்சு மாதத்தில், அதாவது 1912ஆம் ஆண்டு ஜனவரியில் நிகழ்ந்த குறிப்புத் தாழ்விற்கு 10 மாதங்களுக்கு முன்பு வருகிறது. எனவே, (4)ஆம் பத்தியில் —10 என்ற எண்ணிக்கை உள்ளது.

சிறப்புச் சுழல்கள் முறையான குறிப்புச் சுழல்களுடன் தெளிவான முறையில் தொடர்புகொண்டிருக்கும் நிலைகளில் மேலே சுருக்கமாகக் கூறப்பட்ட முறை பயனுள்ளதாகும். ஆனால், வேறு வகையான சிக்கல்கள்—தலைகீழான தோரணிகளாலும் (அதாவது, பொது வியாபாரம் விரிவடையும்பொழுது இந்தத் தொடர்வரிசை சுருங்கியும், அது சுருங்கும்பொழுது இது விரிந்தும் காணப்படுகிற நிலை) தனிச் சிறப்புச் சுழல்கள் இடையே வருவதாலும், 'தாவுகின்ற' (skipped) சுழல்களாலும் (குறித்த ஒரு தொடர் வரிசை, குறிப்புச் சுழலைப் பிரதிபலிக்காது போகும்போது இவ்வாறு நேரும்) அல்லது மிக அதிகமான முன்னோட்டமோ அல்லது பின்னடைவோ ஏற்படுவதால் நிகழும் நேர (timing) ஒப்பிடுதல் செய்யலாமோ என்ற ஐயம் எழும்பொழுதும் (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குறிப்பு ஏற்றத்திற்கு 10 மாதங்கள் முன்பும், அதற்கு முந்திய குறிப்பு ஏற்றத்திற்கு 12 மாதங்களுக்குப் பிறகும், ஒரு சிறப்புச் சுழல் ஏற்றம் நிகழுமாயின், அதனைக் குறிப்புச் சுழலின் முதல் திருப்பத்திற்கு ஒப்பிடவேண்டுமா, அல்லது இரண்டாம் திருப்பத்திற்கா? என்பன போன்ற) சிக்கல்கள் ஏற்படாதிருக்க வேண்டும். நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார்

நிகழும் நேர ஆய்வுகளில் செயற்படுத்தியுள்ள பற்பல முறைகளைப் பற்றிய விளக்கங்களை, மாணவர் பர்ன்ஸ்-மிச்சல் (Burns Mitchell) அவர்களின் தனி நூலில் காணலாம்.[14]

தொடர்வரிசைகளில் சிறப்பான தொடர்ச்சிகளுக்கு அட்டவணை 12-13-ன் கடைசி இரண்டு வரிகளிலுள்ள சராசரிகளும் சராசரி விலக்கங்களும் விளக்கம் கூறும். தெளிவற்றனவும் இணக்கமற்றனவுமான அளவைகளை நீக்கிவிட்டே நேஷனல் பியூரோவினர் மேற்கண்ட சராசரிகளைக் கணக்கிட்டுள்ளனர்; பொது வியாபாரத்தின் மறுமலர்ச்சிகளுடனும் (revivals), பின்னிறக்கங்களுடனும் (recessions) தொடர்புள்ள திருப்ப அளவைகளையே பயனுக்கியுள்ளனர். சரக்கு டன்-மைல்களுக்கான நிகழும் நேர சராசரிகள், குறிப்பு ஏற்றங்களில் சராசரி 2·2 மாதங்கள் முன்னேட்டத்துடனும், குறிப்புத் தாழ்வுகளில் சராசரி 1·4 மாத முன்னேட்டத்துடனும் காணப்படுகின்றன.[15] சராசரி விலக்கங்களின் அளவுகளைக் கருதி நோக்கும்பொழுது, இந்த அளவைகளைப் பொது வியாபாரச் செயலிலிருந்து சிறப்பாக மாறுபட்ட தன்மையை—கால அளவில்—காட்டுகிறதில்லை என்றே கூறவேண்டும். பல நிலைகளில் மாற்றங்களின் தொடர்ச்சிகள் தெளிவாக இல்லாதுபோனுலும், பியூரோவினரின் செய்முறையானது, பொருளாதாரச் சிறப்புப் பெற்ற முக்கியமான நிகழும் நேரத் தொடர்புகளை விளக்கமாக்கியுள்ளது. ஆக, மிச்சல் என்பவர் (து.நூ.ப. 107, பக்கங்கள் 68-75) நீடித்தல் பொருள்களுக்கான புது ஆர்டர்களிலும், கட்டுதல் கன்டிராக்டுகளிலும், பத்திரங்களின் வெளியிடல்களிலும், வியாபார நஷ்டங்களின் கடன்களிலும் (தலைகீழான தொடர்ச்சி), ஸ்டாக் மார்க்கெட்டுகளின் பரிவர்த்தனைகளிலும், பத்திரங்களின் விலைகளிலும், மற்றப் பல தொடர்வரிசைகளிலும் குறிப்புத் தாழ்வுகளில் தெளிவான முன்னேட்டம் உள்ளதைக் குறிப்பிடுகிருர். இவைகளில் பெரும்பாலானவை, குறிப்பு ஏற்றங்களிலும் முன்னேட்டமாகவே

[14] பார்க்க, து.நூ.ப. 13, பக்கங்கள் 116-23.

[15] இந்தச் சராசரி நேரத் தொடர்ச்சிகளை—அவைகள் ஒழுங்காக நிகழும்பொழுது—படம் 12.5-ன் அம்புக் குறிகள் காட்டும். சரக்கு டன்-மைல் விவரங்களுக்கான அம்பு இடமிருந்து வலப்பக்கம் முனையாகியுள்ளது—இது சராசரி சிறப்புச் சுழல் தாழ்விலிருந்து சராசரி குறிப்புச் சுழல் தாழ்விற்கு வரையப்பட்டது. எனவே, இந்தத் தொடர்ச்சியில், பொது வியாபாரத்தில் நிகழ்வதைக் காட்டிலும் முன்பே—ஒரு மாதத்திற்கும் அதிகமாக—மறுமலர்ச்சி நிகழ்கிறது என்பதைக் காட்டுகின்றது. சிறப்புச் சுழல் ஏற்றத்திலிருந்து குறிப்புச் சுழல் ஏற்றத்திற்கு வரையப்பட்ட அம்பும் அவ்வாறே அமைந்துள்ளது. எனவே, முன்போலவே அங்கும், பொது வியாபாரத்தின் மேல் திருப்ப முனையிலும், முன்னேட்டம் உள்ளது என அறிகிருேம். (குறிப்பிட்ட ஒரு தொடர் வரிசை—ஒரு மாதத்திற்கும் மேலான—பின்னடைவைப் பொது வியாபார ஏற்றத்திலோ அல்லது தாழ்விலோ பெற்றிருப்பின், அம்புமுனை இடது பக்கமிருக்கும். முன்னேட்டமோ அல்லது பின்னடைவோ, ஒரு மாதம் அல்லது அதற்கும் குறைவாக இருப்பின், சராசரி திருப்பங்கள் ஏறக்குறைய ஒன்ருக உள்ளதைச் செங்குத்தான அம்புக் குறி வரைவதால் காட்டுவோம்.)

உள்ளன. பொது வியாபாரத்தில் நிகழும் இறக்கங்களுக்கு ஓரிரண்டு சுழல் கட்டங்கள் முந்துவனவாகச் சில தொடர்வரிசைகள்—நீடித்த பொருள்களுக்கான புது ஆர்டர்கள், கட்டுதல் கன்டிராக்டுகள், பாங்க் முதலீடுகள்; டிபாஸிட்டுகளின் தொடர்வரிசைகள், ஸ்டாக் எக்ஸ்சேன்ஜ் பரிவர்த்தனைகள், விலைகள் முதலியன—அமைந்துள்ளன. ஆனால், ஏற்றங்களில் காணப்படும் தொடர்ச்சிகள் தாழ்வு மாற்றங்களின் முறைகளைப்போல் இல்லை என்பது தெளிவு.[16]

எந்த ஒரு பொருளாதாரத் தொடர் வரிசையிலும், சிறப்புச் சுழல்களில், விரிவு, சுருக்கத் தோற்ற காலங்கள் மாறுபட்டிருக்கும். இந்தச் சுழல் நடக்கைகளின் விளக்கத்தை அட்டவணை 12-13-ன் (6)ஆம் பத்தியிலிருந்து (10)ஆம் பத்திவரையுள்ள விவரங்களால் அறியலாம். சரக்கு டன்-மைல்களின் சிறப்புச் சுழல்களின் காலம் 28 மாதங்களிலிருந்து 96 மாதங்கள்வரை யுள்ளது; சராசரி 49·9 மாதங்கள். குறிப்பாக, விரிவுக்கான காலம், இந்தத் தொடர் வரிசையின் முழுச் சுழற் காலத்தில் 61 சதவீதமாகவும், சுருக்கம் 39 சதவீதமாகவும் இருந்தது. சுழலுக்குச் சுழல் இந்த அசைவு களில் உள்ள பொருத்தத்தைச் சராசரி விலக்க அளவைகள் காட்டு கின்றன.

சிறப்புச் சுழல்களின் வீச்சுகள் (Amplitudes of Specific Cycles): தனிப்பட்ட தொடர் வரிசைகளில் காணப்படும் சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களின் அளவு அதிகமாயுள்ளதா, குறைவா யுள்ளதா? இந்தக் கேள்விக்கு விடை காண, நேஷனல் பியூரோ வினர் எளிதான வீச்சு அளவைகளைக் கணக்கிட்டுள்ளனர். அவை களில் இந்த அட்டவணையில் இருக்கும் சரக்கு டன்-மைல்களின் முதல் சிறப்புச் சுழலில், 1904ஆம் ஆண்டு ஜனவரிக்கான தாழ்வு நிலை 82·9-லிருந்து விரிவடையத் தொடங்கி, 1907ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்திற்கு 120·6 ஆகப் பெருகியது. இந்த நிலை அளவுகள் சிறப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளில் உள்ளன. (5)ஆம் பத்தியில் காண்கின்ற 37·7 புள்ளிகள் ஏற்றம், சுழல் விரிவினுடைய வீச்சின் ஒரு குறி யீடாகும். 1907ஆம் ஆண்டு ஜூனிலிருந்து சரக்கு டன்-மைல்கள் 1908 ஜூனில் 97·4 என்ற தாழ்விற்கு வந்துவிட்டன. இந்தச் சுழல் இறக்கத்தினுடைய வீச்சின் ஒரு குறியீடாக (6)ஆம் பத்தியிலுள்ள 23.2 புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்ளலாம். 1904ஆம் ஆண்டு ஜன வரியிலிருந்து 1908ஆம் ஆண்டு ஜூன்வரைக்கான சிறப்புச்

[16] ஒழுங்காக இருக்கிறது என்று கருதுகின்ற பல தொடர்ச்சிகளை, நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தில் வேலை பார்க்கும் ஜி. எச். மூர் என்பவர் (G. H. Moore) கண்டுபிடித்துள்ளார்: இவைகளை அவர், பொது வியாபாரத்தின் திருப்பங்களின் குறியீடுகளாக எடுத்துக்கொள்ளலாம் என்றும் கருதுகிறார். பார்க்க: 'Statistical Indicators of Cyclical Revivals and Recessions' (து.நா.ப. 110)

அட்டவணை 12-14

1904-1949-க்கான ரயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள் சிறப்புச் சூழல்களின் வீச்சு*

சிறப்புச் சூழல்களின் காலம்			சிறப்புச் சூழல் ஒப்புமைகளால் காட்டப்பெறும் சூழல் அசைவுகளின் வீச்சு								
			நிலை			மொத்த அசைவு			ஒரு மாதத்திற்கான அசைவு		
தாழ்வு	ஏற்றம்	தாழ்வு	துவக்கத் தாழ்வில்	ஏற்றத்தில்	இறுதித் தாழ்வில்	ஏற்றம்	இறக்கம்	ஏற்றம், இறக்கம் இரண்டும்	ஏற்றம்	இறக்கம்	ஏற்றம், இறக்கம் இரண்டும்
	(1)		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1. ஜன.04	ஜுன்07	ஜுன்08	82.9	120.6	97.4	+37.7	—23.2	60.9	+0.9	—1.9	1.1
2. ஜுன்08	ஏப்.10	மார்ச்11	85.5	109.1	102.7	+23.6	— 6.4	30.0	+1.1	—0.6	0.9
3. மார்ச்11	பிப்.13	டிச.14	89.2	113.5	94.4	+24.3	—19.1	43.4	+1.1	—0.9	1.0
4. டிச.14	ஏப்.18	மார்ச்19	74.0	121.0	93.8	+47.0	—27.2	74.2	+1.2	—2.5	1.5
5. மார்ச்19	பிப்.20	ஜுலை21	91.7	116.4	80.4	+24.7	—36.0	60.7	+2.2	—2.1	2.2
6. ஜுலை21	ஏப்.23	ஜுன்24	80.2	120.9	100.1	+40.7	—20.8	61.5	+1.9	—1.5	1.8
7. ஜுன்24	ஜுலை26	டிச.27	87.3	107.6	96.8	+20.3	—10.8	31.1	+0.8	—0.6	0.7
8. டிச.27	ஆக.29	ஜுலை32	109.1	121.0	54.7	+11.9	—66.3	78.2	+0.6	—1.9	1.4
9. ஜுலை32	ஏப்.37	மே38	69.9	135.1	93.5	+65.2	—41.6	106.8	+1.1	—3.2	1.5
10. மே38	பிப்.44	மே46	50.3	139.4	95.2	+89.1	—44.2	133.3	+1.3	—1.6	1.4
11. மே46	டிச.47	அக்.49	85.1	108.9	76.5	+23.8	—32.4	56.2	+1.3	—1.5	1.4
1904-49-க்கான 11 சூழல்களின் சராசரி			82.3	119.4	89.6	+37.1	—29.8	66.9	+1.2	—1.7	1.4
சராசரி விலக்கம்			10.0	7.6	10.4	17.1	13.0	22.7	0.3	0.6	0.3
நிறையிட்ட சராசரி									+1.2	—1.6	1.3

* நேஷனல் பியூரோவினரின் குறியீட்டின்படி இந்த அட்டவணை A2 ஆகும்.

சுழலின் மாதாந்தர சராசரி (சரக்கு டன்-மைல்களின்) மதிப்புகளை அடிப்படையாகக்கொண்ட சதவீதங்களாக இந்த அளவைகளைக் கருதலாம். (7)ஆம் பத்தியிலுள்ள முழுச் சுழலின் வீச்சானது (ஏற்றம், இறக்கம் இரண்டிற்குமானது) (5), (6)ஆம் பத்திகளின் அளவைகளிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டதாகும். பொதுவாகக் கூறின், V, IXஆம் கட்டங்களிடையேயுள்ள மாற்றத்திலிருந்து I, Vஆம் கட்டங்களிடையேயுள்ள மாற்றத்தைக் கழித்தால் (இரு மாற்ற அளவைகளுக்கும் தகுந்த +, அல்லது — குறியைப் பயன் படுத்தி) வருவதுதான் முழுச்சுழலின் வீச்சுக் குறியீடு. அட்டவணை 12-14-ன் முதல் சிறப்புச் சுழலுக்கான

முழுச் சுழல் வீச்சு = +37·7 — (—23·2)
= 60·9

என்றாகிறது. அட்டவணை 12-14-ன் அடியிலுள்ள சராசரிகளி லிருந்து, சரக்கு டன்-மைல்கள், பொதுவாகச் சிறப்புச் சுழல் விரிவு களில் 37·1 புள்ளிகள் ஏற்றத்தையும், சுருக்கங்களில் 29·8 புள்ளிகள் இறக்கத்தையும் பெற்று, முழுச் சுழல் வீச்சுக் குறியீட்டை 66·9 புள்ளிகளாகவும் பெற்றுள்ளன. இவைகள் கருத்தியலான (abstrac) அளவைகளாதலால், மற்றத் தொடர்வரிசை அளவை களுடன் இவைகளை ஒப்பிடவும் ஒன்றுசேர்க்கவும் முடியும்.

தனிப்பட்ட தொடர்வரிசைகளிலுள்ள குறிப்புச் சுழல்களின் வீச்சுகளை அளவிடுவதற்கும் இதே முறையைப் பயனுக்கலாம். பொது வியாபாரத் திருப்பங்களுடன் முழுவதும் ஒன்றாகச் செல்லு மாறு சிறப்புச் சுழல் திருப்பங்கள் நிகழ்ந்தாலன்றி, குறிப்புச் சுழல் சட்டத்திற்குள் இருக்கும் அலைகளை அளவிடும் சராசரிகள் எழுச்சியடக்கப்பட்டனவாகவே (damped) இருக்கும். எனவே, பொது வியாபாரச் சுழல்களுக்கும் சிறப்புச் சுழல்களுக்குமுள்ள நிகழும் நேரத் தொடர்பை அளவிடுவதற்குக் குறிப்புச் சுழல் வீச்சை, அந்தத் தொடர் வரிசையின் சிறப்புச் சுழல் வீச்சால் வகுத்து வரும் விகிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம். சரக்கு டன்-மைல்களுக் கான சிறப்புச் சுழல்களின் முழுச் சுழல் வீச்சானது 66·9 என்ற குறியீட்டால் அளக்கப்படலாம் என்பதை முன்பே பார்த்தோம். இதே வகை அளவை, குறிப்புச் சுழல்களுக்கு 55·3. (இவை இரண்டை யும் 11 சுழல்களுக்கான பதிவேடுகளிலிருந்து கணக்கிட்டோம்.) எனவே, விகிதம் 55·3/66·9 அல்லது ·83 ; ஒப்புமை வழியில் சிறப்புச் சுழல்களில் நிகழும் தாழ்வுகளும் ஏற்றங்களும், குறிப்புச் சுழல்களின் திருப்பங்களுடன் நெருங்கிய தொடர்பு கொண்டுள்ளன வாதலால், இது அதிகமே ஆகும்.

விரிவுகள், சுருக்கங்கள், முழுச் சுழல்களுக்கான தோற்றங்கள் எல்லாம் கால இடைவெளியில் மாறுபாடுடையன ; எனவே,

ஏற்றவிறக்கங்களின், அல்லது முழுச் சுழலின் வீச்சுக் குறியீடுகளை மாதவீதங்களாக எழுதுவது நல்லது. இவைகள் அட்டவணை 12-14-ல் (8), (9), (10)ஆம் பத்திகளிலுள்ளன. இவைகள்தாம் ஏற்றவிறக்கங்களின், மற்றும் முழுச் சுழல் மாற்றங்களின் அளவைகள்; வீச்சுக் குறியீடுகளைவிட இவைகள் அதிகத் தகவல் களைக் கொடுக்கும். 1919ஆம் ஆண்டு மார்ச்சிலிருந்து 1920ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி வரையில்தான் மிக்க விரைவான ஏற்றம் சரக்கு டன்-மைல்களில் நிகழ்ந்தது என்பதையும், 1937ஆம் ஆண்டு ஏப்ரலி லிருந்து 1938ஆம் ஆண்டு மேவரைக்கான சுருக்கத்தில்தான் மிக விரைவான இறக்கம் ஏற்பட்டது என்பதையும் நன்கு கவனிக்க லாம். இந்த அசைவுகளின் செறிவு (intensity), [(5), (6)ஆம் பத்தியின்] வீச்சு அளவைகளைமட்டும் கருதுவதானல், தெரியாமலே போய்விடும். (தனித்த விவரங்களுக்கான மாத எண்ணிக்கைகளால்) நிறையிடப்பெற்ற மாதவீதங்களின் சராசரிகளை (8), (9) (10)ஆம் பத்திகளின் கடைசி வரியில் காணலாம்.

நேஷனல் பியூரோவினரின் முறையைப்பற்றிய விளக்கக் குறிப்புகள் (Comment on the Method of the National Bureau)

'நீங்கள் எதைப்பற்றிப் பேசுகிறீர்களோ அதை அளவிட முடியாவிட்டாலும், அதை எண்களினுல் குறிப்பிட முடியா விட்டாலும், அதைப்பற்றிய உங்கள் அறிவு குறைவானதும் திருப்தியற்றதும் ஆகும்' என்று லார்டு கெல்வின் (Lord Kelvin) கூறுகிருர். வியாபாரச் சுழல்களை ஆய்வதில், நேஷனல் பியூரோ வினரின் முறைகள், ஒழுங்கானவையும் விரிவானவையுமான அளவைகளைத் தருமாறு அமைந்துள்ளது வெகு சிறப்பானதொன்ரு கும். வியாபாரச் சுழல்களின் நிகழ்ச்சிகளைப்பற்றிய நம் அறிவானது, சென்ற பக்கங்களில் விளக்கப்பெற்ற பல அளவைகளினுல் திட்ப மடைகிறது. இந்தச் செய்முறையில், தனித்த பொருளாதாரத் தொடர்வரிசைகளின் சுழல் நடக்கைகளின் பற்பல தோற்றங்கள் —கால இடைவெளி, வீச்சு, நிகழும் நேரம், பொது வியாபார அலை களுடன் இணக்கமாயிருப்பது, ஏற்றவிறக்கங்களின் (fluctuations) முறைகளின் தனித்தன்மைகள்—இவை போன்றவை—இந்த முறை யின் உதவியால் விளக்கப்பெறுகின்றன. இவைகளில் பெரும் பாலானவை கருத்தியலான (abstract) அளவைகளாதலால், அவை களைப்போன்ற மற்ற அளவைகளுடன் ஒப்பிடலாம்; அவைகளுடன் தொகுத்து, மொத்தமான அல்லது சராசரியான சுழல் நடக்கை களைப்பற்றியும் ஆராயலாம். வியாபாரச் சுழல்களின் தனித்தன்மை யான, ஒழுங்குகள்—மாற்றங்களின் மிகச் சிக்கலான தொகுப்புகளை முறைப்படுத்தி ஆய்வதற்கு வலிமையான எளிதில் கையாளத் தக்கனவுமான கருவிகளை—இந்த முறை அளிக்கிறது.

நேஷனல் பியூரோவினரின் இந்த முறைக்கும் இதே அதிகாரத்தின் தொடக்கத்தில் குறிப்பிடப்பட்ட மரபுவழி (traditional) முறைக்கும் வித்தியாசங்கள் பல என்பது வெளிப்படை. இரு முறைகளிலும், முதலில் பருவகால ஏற்றவிறக்கங்களை நீக்கி விடுவது ஓர் ஒற்றுமையாகும். இந்தச் சிக்கலான பிரச்சினைக்கு முடிவு காண்பதில் நிகழக்கூடிய இன்னல்களும் இரண்டிற்கும் பொதுவானவை. ஆனால், நெடுங்காலப் போக்கை அளவிடுவதில் இருமுறைகளுக்கும் மிகுந்த வேறுபாடு உள்ளது. மரபுவழி முறையில், இவைகளை அளந்து நீக்கிவிடுவோம். குறிப்புச் சுழல், சிறப்புச் சுழல் இரண்டின் அளவைகளும் (நேஷனல் பியூரோ வினரின் முறையில்) ஒவ்வொரு சுழல் விவரங்களின் சராசரியை அடிப்படையாகக்கொண்ட ஒப்புமைகளால் கணக்கிடப்பட்டவை ; எனவே, இந்த முறையில், சுழல்களிடையே இருக்கக்கூடிய போக்குகள் நீக்கப்பட்டாற்போலாகிறது. என்றாலும், அவ்வகைப் போக்குகள் நீக்கப்பெறுவதில்லை. ஒரு காலத் தொடர்வரிசை அதிகரிக்கும் போக்கைக் கொண்டிருந்தால், குறிப்புச் சுழல் சராசரிகளாலும், சிறப்புச் சுழல் சராசரிகளாலும் நிகழ்கின்ற தோரணியில் ஓர் ஏற்றம் (upward tilt) நிகழ்வதைக் காணலாம். IXஆம் கட்டத்தின் சராசரி நிலையானது, Iஆம் கட்டத்தின் சராசரி நிலையைக் காட்டிலும் அதிகமாயிருக்கும். (மற்றக் கட்டங்களின் சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களும் இதுபோலவே காலப் போக்கு அதிகரிப்பால் பாதிக்கப்படும் என்பது தெளிவு.) நெடுங்காலப் போக்கு குறைவதாக அமைந்தால், இதற்கு நேர் மாறானவை நிகழும். எனவே, நேஷனல் பியூரோவினரின் முறையில் ஒவ்வொரு சுழலின் எல்லைகளிடையே நிகழும் நெடுங்காலப் போக்குகளை அப்படியே நீக்காமல் வைத்துக்கொண்டதாகக் கொண்டால், சுழல்களுக்கிடையிலான போக்கை நீக்கிவிடுவதால் இருப்பதைவிட உண்மைச் சுழல்களுக்கு நெருங்கிய முறையில் இருப்பதாகக் கருதுகின்றனர். உற்பத்தியைப்பற்றியும் வேலையைப்பற்றியும் ஆராய்ந்து விடை காண முயலும் தொழிலதிபர், விரிவுகளும் சுருக்கங்களும் அடுத்தடுத்து வருவதைக் காண்கிறார். இவைகளை அளப்பதில் அவர் போக்குக்கான திருத்தங்களை அமைப்பதில்லை. வேகமாக வளர்ந்துவரும் ஒரு தொழிலில், விரிவுக்கான ஊக்கம் இருப்பதைப்போல், தளர்ந்து வரும் தொழிலில் இருக்காது. எனவே, பியூரோவினது ஆராய்ச்சியாளர்களின் கருத்தின்படி, இந்த வகையான ஊக்கத்திற்குக் காரணமான நெடுங்காலப் போக்கைச் சுழல் மாற்றங்களிலிருந்து நீக்கிவிடக்கூடாது. சிறப்புச் சுழல்களிடையேயுள்ள நெடுங்காலப் போக்குகளின் விரிவான அளவைகளைக் கொண்ட ஓர் அட்டவணையையும் (இங்கு அது சேர்க்கப்படவில்லை) நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் கணக்கிட்டுள்ளனர் என்பதை

இங்குக் குறிப்பிடுவது பொருத்தமாகும். எனவே, கணக்குவழியில் போக்குச் சார்பலன்கள் இணைக்கப்படாவிட்டாலும், போக்கு அசைவுகள் விளக்கப்பட்டு, அவைகளுக்கான அளவைகளும் ஆராய்ச்சிக்குக் கிடைக்கின்றன.

குறிப்பு, மற்றும் சிறப்புச் சுழல்களின் அளவைகள் காலப் போக்கில் மாறக்கூடும் என்பதை, நேஷனல் பியூரோ முறையைப் பயன்படுத்தும்பொழுது தெரிந்துகொள்ளவேண்டும். 1879—1949ஆம் ஆண்டு இடைவெளியில் வார்ப்பிரும்பு உற்பத்தியில் நிகழ்ந்த 18 சுழல்களைக்கொண்டு கணக்கிட்ட சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களின் சராசரித் தோரணியிருக்கிறது என்போம்; அந்த இடைவெளியில், வார்ப்பிரும்பு உற்பத்தியின் சுழல்-நடக்கையில் சிறப்பான மாறுதல்கள் ஏற்பட்டிருக்குமானால், அந்தத் தோரணியின் மதிப்பு ஒரு விஞ்ஞானச் சான்று என்ற முறையில் குறைவானதாகவே இருக்கும். மேலும், பொதுவாகக் கூறினால்—பொது வியாபாரச் சுழல்களின் அளவைகள் திட்டமாக மாறியிருந்தால் (சராசரிக் காலங்களிலும், வியாபாரச் செயலில் இடம்பெறும் பொதுவான அலைகளை உண்டாக்கும் தொடர்பற்ற முறைகளிலும், சுழல்களின் உறுப்புகளினிடையே இருக்கும் காரணத்தொடர்புகளிலும்), அந்த மொத்தக் காலத்திற்கான சராசரிகளும், அவைகளையொட்டிக் கூறப்படும் முடிவுகளும் தவறுடையனவாகலாம். அதேபோலவே, ஒரு நாட்டின் பொருளாதார அமைப்பு யுத்த நிலையிலிருந்து சமாதான நிலைக்கும், சமாதான நிலையிலிருந்து யுத்த நிலைக்கும் மாறும்பொழுதும் சுழல் முறைகளில் சிறப்பான (significant) மாற்றங்களிருந்தாலும், முன்மாதிரியான காப்புகள் (reservations) தேவைப்படும். கருதப்பட்ட தொடர்ச்சி ஏற்பட்டிருக்கும் போக்கு அல்லது அமைப்பு மாற்றங்கள், சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவது தவறு என்று கூறுமளவிற்கு உள்ளனவா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க நேஷனல் பியூரோ நிறுவனத்தார் பற்பல யூக அளவைச் சோதனைகளைச் செயலாற்றியுள்ளார்கள். மிச்சல், மற்றும் பர்ன்ஸ் என்பவர்கள், மாற்றங்கள் சராசரிகளினால் கணக்கிடப்பட்ட நடக்கையைத் தள்ளுபடி செய்வனவாக இல்லை என்று முடிவு கூறியுள்ளனர்.[17] எனினும், குறிப்பிட்ட ஒரு தொடர்வரிசையோ, அல்லது பல வரிசைகளோ போக்கு, மற்ற ஏனைய மாற்றங்களைப் பெற்றுள்ளன என்று தெரியுமானால், சராசரி முறையை அதற்கேற்றவாறு மாற்றியமைக்கமுடியும். யுத்தச் சுழல்கள் சிறப்பான விசைகளால் பாதிக்கப்பட்டுள்ளன என்றால், அவைகளை நீக்கி விடலாம். சுழல் நடக்கையைப் பாதிக்கின்றவாறு அமைந்த ஓர் அமைப்பு மாற்றம் ஒரு காலத்தில் நேர்ந்திருக்குமானால்,

[17] (து.நூ.ப. 13.) பக்கங்கள் 312-13-ஐப் பார்க்க.

அந்தக் காலத்தைக் கொண்டு தொடர்வரிசையை இரு பிரிவுகளாக்கி, இரு சராசரிகளின் அடைவுகளைக் (sets) கணக்கிடலாம்; அப்பொழுது அந்த இரண்டிற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசம் 'சிறப்பானதா' (significant) என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்யலாம். இதுபோன்ற எச்சரிக்கைகளைக் கையாளுவதால், பலபடித்தான விவரங்களைத் தொகுத்துச் சராசரிகளோ, மொத்தங்களோ கணக்கிடுவதில் உண்டாகும் இன்னல்களைத் தவிர்க்கலாம்.

ஒரு சுழலானது அனுபவத்தின் ஓர் அலகு என்ற கருத்திற்கு இணங்கியதுதான், குறிப்பு அல்லது சிறப்புச் சுழலைத் தனியான விவரமாக எண்ணுவது. இந்த முறை, சுழல் நடத்தைகளுக்கான பல்வேறான அளவைகளை அளிப்பது, நேஷனல் பியூரோ செய்முறையின் ஒரு தனிச் சிறப்பாகும். பற்பல ஆராய்ச்சியாளர்களின் நோக்கங்களுக்கேற்றவாறு இவைகளை மொத்தமாக்குவது சாத்தியமாகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட குறிப்புச் சுழலில் நிகழும் பல பொருளாதார அமைப்புகளின் அளவைகளை ஒப்பிடுவதற்கும் தொகுப்பதற்கும் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட தொழிலைப்பற்றிய (எடுத்துக்காட்டாக, உற்பத்தி) தகவல்களைப் பல குறிப்புச் சுழல்களிலிருந்து ஒன்றுசேர்க்கலாம். ஆனால், ஒரு சுழலை அனுபவத்தின் ஓர் அலகாகக் கருதும் முறை, கவனமற்றவர்கள் கைகளில் தவறான முடிவுகளைக் கொடுத்துவிடக்கூடும். I, Vஆம் கட்டங்களிடையே நடைபெற்ற நிகழ்ச்சிகள், அதே குறிப்புச் சுழலின் V, IXஆம் கட்டங்களிடையே நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு முற்றிலும் விளக்கம் கூறுபவை என்று எண்ணுவது எளிதானாலும் தவறானதே. பொருளாதார அமைப்பு தொடர்ச்சியுள்ளதொன்று. ஒவ்வொரு சுழலும், அதன் ஒவ்வொரு தோற்றமும், அதற்கு முன் நிகழ்ந்தவைகளுடனும் பின் நிகழப் போகிறவைகளுடனும் தொடர்புகொண்டுள்ளன. அமெரிக்காவில், 1929ஆம் ஆண்டு ஜூன் மாதத்திற்கான குறிப்பு ஏற்றத்திலிருந்து 1933ஆம்ஆண்டு மார்ச்சின்குறிப்புத் தாழ்விற்கிடையேபொருளாதார அமைப்பில் என்ன நடந்தது என்பதை அறியவேண்டுமானால், 1927ஆம் ஆண்டு டிசம்பரில் நிகழ்ந்த குறிப்புத் தாழ்விற்குப்பின்—கால அளவில்—செல்லவேண்டியதாகும். 1929-33ஆம் ஆண்டுகளிடையே இருந்த சுருக்கத்திற்குக் காரணமான நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பைக் கருதும்பொழுது, நாம் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டிய அனுபவங்கள் ஒரு நெடுங் காலத்திற்கானவைகளாகவும் இருக்கலாம். மிக அண்மையில் நடைபெற்ற நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும் என்றாலும், 1921 அல்லது 1914ஆம்

ஆண்டுவரையிற் செல்லவேண்டியிருக்கும். உண்மையில் தொடர்ச்சி பான ஓர் அமைப்பைப் பகுதிகளாகப் பிரிப்பது—நேஷனல் பியூரோவினரின் முறைப்படி—பகுப்பாய்வில் ஒரு முக்கியக் கருவியானாலும், சான்றுகளை மதிப்பிடுவதற்கும் (appraisal), இறுதி முடிவுகளைக் காண்பதற்கும் இத்தகைய தனித்தனியான பகுதிகளை ஒரு தொடர்ச்சியான கோவையின் பகுதிகளாகவே காணவேண்டும்.

சுழல் நடக்கைகளை விளக்குவதற்கான அளவைகளைத் தொகுப்பதற்கும், ஆய்வதற்குமான ஓர் எளிதில் கையாளுகிற கருவியாக நேஷனல் பியூரோவினரின் முறையுள்ளது. முறைகளுக்கு அடிப்படையான கொள்கை நிலை (theoretical basis) இல்லை என்ற குறை கூறப்பட்டுள்ளது. ஒரு திட்டமான கொள்கை வழியில் அவைகள் வருவிக்கப்படவில்லை; இஃது உண்மையே. ஆனால், தற்காலப் பொருளாதார அமைப்பின் சுழல் தோற்றங்களின் தன்மைகளைப் பற்றிய சில பொதுவான கருத்துகள் அடிப்படையாக அமைந்துள்ளன. இதுபோல் கொள்கைகளிலிருந்து பிரித்த ஒரு முறையை வகுத்தது திட்ட நோக்கோடுதான்; விஞ்ஞான முறையில் விவரங்களை ஆராயும்பொழுது கொள்கைகளைப்பற்றிய அடிப்படை நம்மை மிஞ்சுவதாக நேரக்கூடாது என்ற கருத்தை இது பிரதிபலிக்கின்றது. ஆராய்ச்சி முறை, எடுகோள்களைச் சோதிப்பதற்கு ஏற்றவாறு அமையவேண்டுமென்பது கூறாமலே விளங்கும்; ஏனென்றால், சோதனைகள் இல்லாவிட்டால் அறிவு கூட்டுதல் நடைபெறாது. வியாபாரச் சுழல்களைப்பற்றிய கொள்கைகளைச் சோதனை செய்ய நேஷனல் பியூரோவினரின் முறை பயன்படும்; ஆனால், பற்பல மாறிகள் மாறுபட்ட வழிகளில் கூட்டாகி நிகழும் ஓரிடத்தில், முடிவைத் தரும் சோதனைகளைச் செயலாக்குவதில் பற்பல இன்னல்கள் ஏற்படுவது இயல்பே. நுண்ணியலானவும், பேரியலானவுமான (macroscopic) தோற்றங்களில், சுழல் முறைகளுக்குப் பற்பல காட்சிகளைத் தருவது இந்த முறையின் ஒரு நன்மையாகும். சுழல் முறைகளில் ஒழுங்கையும், ஒழுங்கின்மையையும் ஒருங்கே காட்டுகின்ற இந்த முறை, கவனமான ஓர் ஆய்வாளருக்குப் புதுப்புதுக் கருத்துகளைத் தோற்றுவிக்கலாம்; இஃதொன்றே எந்த ஆராய்ச்சி முறைக்கும் ஒரு சிறப்பாகுமல்லவா?

காலத் தொடர்வரிசை ஆய்வுக்கான ஏனைய முறைகள்: காலவரிசை மாறிகளை அவைகளின் சிறப்பான பகுதிகளாகப் பிரிப்பதற்குக் கணக்கறிஞர்களும், புள்ளிவியலறிஞர்களும் வேறு பல முறைகளையும் வகுத்துள்ளனர். இவைகள், ஆராய்ச்சியாளர்களின் நோக்கத்தைப் பொறுத்தும், கருதப்பட்ட விவரங்களைப் பொறுத்தும்

மாறும். எட்வின் ஃப்ரிக்கி (Edwin Frickey) என்பவர் தம் நூலில் [து.நூ.ப. 56 ; எ. எஃப் பர்னஸ்ஸின் மதிப்புரையையும் (து.நூ.ப. 11) பார்க்க] தனிப்பட்ட பொருளாதாரத் தொடர் வரிசைகளின் ஆய்விற்கு ஒரு 'தர'மாக அமைகின்ற, பரவலான மொத்தச் சுழல்களைப்பற்றி ஆராய்ந்துள்ளார் ; 'தர'மான சுழல் முறைகளுடன் தொடர்புள்ள மாறுபாடுகளை நீக்கிவிட்டு, அத்தகைய தொடர்வரிசைகளின் நெடுங்காலப் போக்குகளை மீதிகளாகப் (residuals) பெறுகிருர். தொடர்வரிசைத் தொடர்புமுறையைப் (serial correlation) (மாறுபாடான பின்னடைவுகளைக் கருதிக் குறிப்பிட்ட தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளிடையே உடன்தொடர்பைக் கணக்கிடுகிறது) பயன்படுத்தி, அந்தத் தொடர்ச்சியில் எந்த வகையான, அல்லது வகைகளான அலைவுகள் (oscillations) உள்ளன என்பதைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். [எச். வோல்ட் (H. Wold) (து.நூ.ப. 194), கெண்டால் (Kendall) (து.நூ.ப. 79).] மாருத கால இடைவெளியுள்ள, ஒரேசீரான ஏற்றவிறக்கங்களையுடைய பல உறுப்புகளின் தொகுப்பாக ஒரு காலத் தொடர்வரிசை இருக்குமானுல்—அஃதாவது, அந்தத் தொடர்வரிசை பல ஹார்மோனிக் (harmonic) உறுப்புகளின் தொகுப்பானுல்—உயிரியல் துறைகளில் பயன்படும். பீரியோடோகிராம் (periodogram) ஆய்வு முறையைப் பயனுக்கி, தொடர்வரிசையை அதன் ஹார்மோனிக் பகுதிகளாகப் பிரித்துவிடலாம் [கெண்டால் (Kendall), து.நூ.ப. 78]. வேறு சில முறைகள், காலத் தொடர்வரிசைகளின் ராண்டம் (random) பகுதிகளை வற்புறுத்திக் கூறி, ராண்டம், ராண்டமற்ற பிரிவுகளை ஒழுங்காகப் பிரிக்க முயலுகின்றன. மாறிகளின் வித்தியாசங்களினது முறையின் (method of variate differences) நோக்கம் இதுதான். [பார்க்க: டின்ட்னர் (Tintner) து.நூ.ப. 159]. ஸ்டோகேஸ்டிக் பிரோஸஸஸ் கருத்துகளைப் (stochastic processes) பயன்படுத்தி, விரிவான கணக்கியல் முறைகளால் அமைக்கப்பெற்ற மாடல்களைக் (model) கொண்டு, ராண்டம் (அல்லது ஸ்டோகேஸ்டிக்) உறுப்புகளைக் கொண்ட, காலவாரியாக அமைந்த விவரங்களை ஆராய்வது மற்றுமொரு முறை [பார்க்க, ஹால்ட் (Hald), து.நூ.ப. 66]. ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கு முன்னிருக்கும் வேலைகளும் விளைவுகளும் மிகுந்த வேறுபாடுடையனவாதலால், வெவ்வேறு முறைகளைக் கையாளவேண்டியிருக்கிறது என்று ஓரளவிற்குக் கூறலாம் ; மற்றும், நம்முடைய தற்கால அறிவையும் இஃது ஓரளவிற்கு எடுத்துக் காட்டுகிறது. புள்ளியியல் துறையில் வேறெந்தப் பகுதியிலும் இல்லாத அளவிற்குக் காலத் தொடர்வரிசைகளின் ஆய்வில் விடைகாணுத சிக்கல்கள் பல உள்ளன. கொள்கைகளும் முறைகளும் ஒருங்கே வளர்ச்சியடையும் கட்டத்தில் உள்ளன.

துணை நூல்கள்

Burns, A. F., 'Frickey on the Decomposition of Time Series,' 'Review of Economic Statistics,' August 1944.

Burns, A. F. and Mitchell, W. C., 'Measuring Business Cycles,' Chaps. 2-8.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics', Chap. 19.

Frickey, E., 'Economic Fluctuations in the United States.'

Hald, A., 'The Decomposition of a Series of Observations Composed of a Trend, a Periodic Movement, and a Stochastic Variable.'

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics,' 3rd ed., Vol. II, Chap. 30.

Koopmans, T. C., 'Measurement without Theory,' (Review of Burns and Mitchell, 'Measuring Business Cycles'), 'Review of Economic Statistics,' Aug. 1947.

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business,' Chap. 11.

Mitchell, W., C., 'What Happens During Business Cycles,' Chaps. 1-4, 6.

Persons, W., 'Indices of Business Conditions,' 'Review of Economic Statistics,' Preliminary Vol. 1, 1919.

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., 'Business Statistics,' 3rd ed., Chap. 17.

Schumpeter, J. A., 'Business Cycles,' Chap. 5.

Vining, R., 'Methodological Issues in Quantitative Economics: Koopmans on the Choice of Variables to be Studied and on Methods of Measurement' (with Reply by Koopmans, and Rejoinder), 'The Review of Economics and Statistics,' May 1949.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும் நூலின் இறுதியிலுள்ள துணைநூற் பட்டியலில் காணலாம்.

13. விலைகளின் குறியீட்டெண்கள்

புள்ளியியல் தொடர்ச்சிகளை ஆய்வதற்காக ஏற்பட்ட, ஏறக்குறைய ஒரே வகையைச் சார்ந்த முறைகளைக் ‘குறியீட்டெண்கள்’ (Index Numbers) என்று கூறுகிருர்கள். விலை ஏற்றவிறக்கங்களை ஆராய்வதற்கே முக்கியமாகக் குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன. என்ருலும், அவைகளின் வேறு பல பயன்களைப்பற்றியும் குறிப்பிடுவதால், அவைகளின் அடிப்படைத் தன்மைகள் நன்கு புலப்படும். ஒரு தொடர்ச்சியிலுள்ள பல உறுப்புகளை மற்ருேர் எண்ணின் தொடர்புடையனவாக—ஒப்புமைகளாக (relatives)—கூறுவதுதான், குறியீட்டெண்களில் மிக எளிதான தோற்றம். அட்டவணை 13-1-ன் (3), (5)ஆம் பத்திகளிலுள்ள ஒப்புமை மதிப்புகளைக் குறியீட்டெண்களின் மிக எளிதான தோற்றங்களெனலாம்.

ஒரு காலவரிசையிலுள்ள உறுப்புகளை ஒரு மாருத (fixed) அடிப்படையின் ஒப்புமைகளாக எழுதுவதால், அந்தக் கால வரிசையின் வெவ்வேறு காலங்களிலுள்ள விலைகளை ஒப்பிட்டுப்

அட்டவணை 13–1

காலவரிசையை ஒப்புமைக்காக எடுத்துக்காட்டுதல்
(1950 = 100)

ஆண்டு	அமெரிக்காவின் கச்சா பெட்ரோலியம் உற்பத்தி (அலகு: 42 காலன் கொண்ட 1,000,000 பீப்பாய்கள்)	பெட்ரோலியம் உற்பத்தியின் ஒப்புமை	மின்னியாபோலிஸில் 1ஆம் நம்பர் கருத்த, வடக்கத்திய வசந்த காலக் கோதுமையின் முழு விற்பனை விலைகள் மாதங்களின் சராசரி விலைகளின் சராசரி (புஷலுக்கு இவ்வளவு)	கோதுமை விலை ஒப்புமை
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1950	1,974	100.0	$2.41	100.0
1951	2,248	113.9	2.52	104.6
1952	2,290	116.0	2.51	104.1
1953	2,360	119.6	2.53	105.0

பார்ப்பது எளிதாகிறது; விவரங்களை இவ்வாறு மாற்றுமல் அவை இருப்பதுபோலவே பார்த்தால், அவ் வரிசையிலுள்ள இயக்கங்களை (movements) அறிந்துகொள்வது கடினம். ஒப்புமைகளாக அமைப்பதால் பல வரிசைகளையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியும்.

இவைகளைப் போன்ற ஒப்புமைகளும் குறியீட்டு எண்கள் என்று கூறப்படுகின்றன; என்றாலும், அந்தப் பெயரைப் (குறியீட்டெண் என்பதை) பல வரிசைகளைத் தொகுத்துக் கணக்கிட்ட ' எண் 'களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்துவது நல்லது. அப்படித் தொகுக்கப்படும் வரிசைகள் விலைகளின் வரிசைகளாகவோ, உற்பத்தியினமாகவோ, துய்ப்பு விவரங்களாகவோ, கூலி அளவுகளாகவோ, வியாபார அளவுகளாகவோ, அல்லது மாறும் தன்மையுடைய எந்தப் பொருளின் வரிசையாகவோ இருக்கலாம். (ஊருக்கு ஊர், நாட்டுக்கு நாடு மாற்றமுடைய விலைகளின் வேறுபாடுகளை அளந்து கூறவும் குறியீட்டெண்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர்.) இதுபோன்ற தனிப்பட்ட வடிவமுடைய குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதில் பல சிக்கல் மிகுந்த பிரச்சினைகள் எழும். நமக்குத் தேவையானது, அந்த வேறுபாட்டின் பகுதிகளிலெல்லாம் நிகழ்கின்ற விளைவுகளின் மொத்தத் தன்மையை அளந்து குறிப்பிடுவதும் எளிதானதுமான ஓர் எண் தொடர்ச்சியே. இந்த அதிகாரத்தில் பொருள்களின் விலைகளுக்கான (commodity prices) குறியீட்டெண்களை அமைப்பதற்கு முறைகளை வகுப்போம்.

விலை அசைவுகளும், அவைகளை அளவிடுதலும்—முதனிலைக் கருத்துகள்

விலைமாற்றங்கள்

பற்பல பொருள்களின் விலைகளில் ஏற்பட்டுள்ள மாறுதல்களை விரிவாக நோக்கினால், அவைகளிடையே ஒரு குறித்த போக்கினையோ, அல்லது ஒழுங்கையோ காண்பது கடினம்; ஒன்றுக்கொன்று முரணான பல இயக்கங்களையே காண்போம். யதேச்சையாகத் தொடுக்கப்பட்ட பல பொருள்களின் குறிக்கப்பட்ட விலைகளைப் (price quotations) பட்டியல் 13-2-ல் பார்க்கலாம். இங்கு மாதத்திற்கு மாதம் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களை ஒப்பிடுவதற்காக வெகு சில பொருள்களே கருதப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பதிவில் குறிப்பிட்டுள்ள 12 வகைப் பொருள்களும், ஒப்பிடுவதற்கான 15 ஆம் ஆண்டு இடைவெளியில் விலை ஏற்றமுடையவைகளே ஆகும். காப்பிக் கொட்டையில்தான் வெகு அதிகமான ஏற்றம், 12 பங்கு; மிகக் குறைவான ஏற்றம் தோல்களில், 13·5 சதவீதம். இந்தக் கால இடைவெளியில், யுத்தத்தினாலும், அதற்குப் பிறகும் ஏற்பட்ட பணவீக்கம் இருந்தது என்பது நாம் அறிந்ததே. இதே இடை-

அட்டவணை 13-2

பொருள்களின் மொத்த விலைகள்*

பொருள்	அலகு	விலை ஏப்ரல் 1939	விலை ஏப்ரல் 1954	1954 ஏப்ர லுக்கான ஒப்புமை விலை (ஏப்ரல் 1939=100)
கால்நடைகள்				
சுமாரானவற்றிலிருந்து சிறப்பானவை வரையுள்ள நாட்டு இளங்காளைகள் (சிகாகோ)	100 பவுண்டுக்கு டாலர்கள்	10.55	23.75	225.1
காப்பிக் கொட்டை				
நியூயார்க், ஸாண்டோஸ் (Santos)-4	1 பவுண்டுக்கு ஸென்டு	7¼	89.50	1234.5
செப்பு				
நியூயார்க் ரிஃபைனரியிலிருந்து எலெக்ட்ராலிட்டிக் வகை	1 பவுண்டுக்கு ஸென்டு	10.37½	29.87½	288.0
கூலம்				
2ஆம் மஞ்சள் (சிகாகோ)	1 புஷலுக்கு டாலர்	.48⅞	1.59¼	325.8
பஞ்சு				
நியூ ஆர்லியன்ஸ், மிட்லிங் ⅞" வகை	1 பவுண்டுக்கு ஸென்டு	8.43	32.70	387.9
தோல்கள்				
பச்சை உப்புப் போட்ட பாக்கர்ஸ் (packers) வகை 1ஆம் நெம்பர் நாட்டுக் காளைகளினது (சிகாகோ)	1 பவுண்டுக்கு ஸென்டு	9¼	10½	113.5
பன்றிகள்				
நன்கு கொழுத்தவை; சாதாரணமானவைகளும், நல்லனவாக இல்லாதவையும் நீங்கலாக (சிகாகோ)	100 பவுண்டுக்கு டாலர்	7.15	27.05	378.3
இரும்பும் எஃகும்				
பழைய இரும்பு 1ஆம் நம்பர் உருகு வகை (பிட்ஸ்பர்க்)	மொத்த டன்னுக்கு டாலர்	15.50	28.50	183.9
பெட்ரோலியம்				
கச்சாவானது, கிணற்றருகில் (பென்ஸில்வேனியா)	பாரலுக்கு டாலர்	2.00	3.76	188.0
சர்க்கரை				
96° சென்ட்ரிஃபியூகல், வரி செலுத்தப்பட்டது (நியூயார்க்)	பவுண்டுக்கு ஸென்டு	2.92	6.20	212.3
கோதுமை				
1ஆம் வடக்கத்திய, வசந்தகால வகை (மின்னியாபோலிஸ்)	புஷலுக்கு டாலர்கள்	.74⅛	2.33½	313.9
துத்தநாகம்				
பிரைம் (Prime) மேற்கத்தியது (கிழக்கு ஸெயின்ட் லூயிஸ்)	பவுண்டுக்கு ஸென்டு	4.50	10.25	227.8

* 'தி காரன்டி ஸர்வே' (The Guarantee Survey) என்ற நிறுவனத்தாரால் வியாபார மூலங்களிலிருந்து தொகுக்கப்பெற்றது.

வெளியைச் (15 ஆம் ஆண்டு) சமாதானம் நிலவுகின்ற காலங்களில் எடுத்துக்கொண்டு, விலைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், இவ்வளவு அதிகமான மாறுதல்கள் இருக்கமாட்டா; ஆனால், அப்பொழுதும் விலை மாறுதல்கள் எல்லாம் ஒரே அளவாக இரா. குறித்த ஒரு நாட்டுக்குச் சந்தையிலோ (market) — அல்லது உலகச் சந்தையிலோ—ஆயிரக் கணக்கான பொருள்கள் விற்பனையாகின்றன; அவைகளில், ஒவ்வொன்றும், பற்பல இயக்கங்களுக்குட்பட்டுத் தம்மிச்சையாக விலைமாற்றம் அடைகின்றன. என்றாலும், ஒவ்வொன்றும் தனித் தனியாக மாறுவதில்லை. எந்த ஒரு பொருளின் விலைகளில் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகளும், மற்றப் பொருள்களின் விலைகளையும் பாதிக்கும்; அதுபோலவே மற்றப் பொருள்களின் விலைகளும், அந்தப் பொருளின் விலையைப் பாதிக்கும். ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தனியாக உள்ள இயக்கங்களைத் தவிர எல்லாப் பொருள்களின் விலைகளையும் ஒருங்கே பாதிக்கும் மற்றப் பொதுவான விசைகளும் இயங்குகின்றன. இவ்வளவு வகையான விலை ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் ஒருவகையில் மொத்தமாக்கி, ஒழுங்குபடுத்தி, விலைகளின் போக்கு பொதுவாக எப்படியுள்ளது என்று சுட்டிக்காட்டுவதே குறியீட்டெண் தயாரிப்பவரின் வேலையாகும்.

குறியீட்டெண்களைத் தயாரிப்பவர்களும், அவைகளைப் பயன்படுத்துவோர்களும், தனித்த பொருள்களில் ஏற்பட்டுள்ள விலை மாற்றங்களைப்பற்றி மொத்தமாக அறிவதில் ஆர்வமுடையவர்களாக இருப்பர்; ஏனென்றால், விலை அசைவுகளை அளவிடுவதற்கான முறைகளை வகுத்திட அவை பயன்படும் இந் நூலின் முதற் பகுதிகளில் அளவின விவரங்களைச் சுருக்குதலைப்பற்றிக் கூறினோம்; அச் சமயம் சராசரிகளையும் குறிப்பிட்டோம்; விவரங்கள் ஒரு படித்தானவைகளாக (homogeneous) இருக்கும்போதுதான், சராசரியானது அவைகளின் ஒரு மத்தியப் போக்கை (central tendency) நன்கு குறிப்பதாக அமையும் என்பதையும் வலியுறுத்தினோம்; மற்றும், விவரங்களில் பரவல் எவ்வகையிலுள்ளது என்பதை யொட்டியே எந்தச் சராசரியைப் பயன்படுத்தவேண்டு மென்பதை முடிவுசெய்யவேண்டும் என்றும் அறிந்தோம். எனவே, இந்தக் குறியீட்டெண் சிக்கலிலுள்ள அடிப்படை விவரங்கள் எவை, அவைகளின் பரவல்கள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பனவற்றை இப்பொழுது காணப்போகிறோம்.

அடுத்த பகுதியில், குறியீட்டெண்களால் நிறைவுபெறும் பல குறித்த நோக்கங்களைப்பற்றி விளக்குவோம். காலங்களில் ஒவ்வொரு பொருளின் விலையையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதே இந் நோக்கங்களின் அடிப்படையாகும். ஒரு பொருளின் இரண்டு குறிக்கப்பட்டவிலைகளும் (price quotations) பல விசைகளால் தாக்கப்பெற்று, அந்தப்

பொருளின் விலையில் ஏற்பட்டுள்ள மாறுதலைக் குறிப்பிடும். அது போன்ற குறிக்கப்பட்ட விலைகளைப் பல பொருள்களுக்குத் திரட்டும் பொழுது, நமக்கு ஒரு விவரக் குவியலே கிடைக்கிறது; இதில் பற்பல விசைகளால் (forces) ஊக்கப்பெற்ற விளைவுகளின் ஒரு மொத்த இடைவிளைவைக் (Interaction) காண்கிறோம். சில விசைகள் குறித்த சில பொருள்களின் விலைகளைமட்டும் பாதிக்கலாம்; மற்றவை எல்லா விலைகளையுமே பாதிக்கலாம்; வேறு சில, பல பொருள்களின் விலைகளையும் மாற்றுவனவாக இருக்கலாம். இந்த எல்லா விசைகளின் இயக்கங்களால் ஏற்பட்ட ஒரு மொத்தமான விளைவை நாம் அளவிட முயலுகிறோம்; தனிப்பட்ட விசைகள் தனிப்பட்ட விலைகளை ஏறவோ குறையவோ செய்கின்றன. அவைகளின் கூட்டான விளைவின் ஓர் அளவே நமக்குத் தேவை.

எனவே, நாம் ஒரே ஒரு விலையின் மாற்றத்தையே அலகாகக் கொள்ளவேண்டும். நமக்குத் தெரிந்த முறைகளைக் கொண்டு, இதுபோன்ற பல அலகுகள் கொண்ட புள்ளி விவரங்களைத் தொகுத்து ஆராயமுடியுமா என்பது அவ் வலகுகளின் பரவலமைப்பைப் பொறுத்திருக்கும். அவைகளைப் பாகுபடுத்தினல் கிடைக்கும் அலைவெண் பரவல்களில் சிலவற்றைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்கும்.

ஒப்புமை விலைகளின் அலைவெண் பரவல்கள்

ஒவ்வொரு விலைமாற்றமும் ஒரு விகிதமாகும். அப் பொருளின் குறித்த ஒரு காலத்தின் விலைக்கும், மற்றொரு காலத்தின் விலைக்குமுள்ள விகிதம்—முன் கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் செய்ததைப்போல் எல்லாவற்றையும் ஒப்புமை விலைகளாகவே காட்டுவதால், அவைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல் எளிதாகும். 1926ஆம் ஆண்டின் விலையை அடிப்படையாகக் (base) கருதி, 670 பொருள்களின் 1927ஆம் ஆண்டு மொத்த விலைகளை ஒப்புமை விலைகளாகக் கணக்கிட்டு, அவைகளை அலைவெண் பரவலில் அட்டவணை 13-3-ல் அமைத்துள்ளோம்.

இப் புள்ளி விவரங்களுக்கான அலைவுப் பலகோணத்தைப் படம் 13.1-ல் காணலாம்.. இதேபோன்ற மற்றப் பரவல்களுடன் ஒப்பிடுவதற்கு ஏற்றவாறு இது சதவீதப் பரவலாக அமைந்துள்ளது. இந் நூலின் முன்பகுதிகளில் விளக்கப்பட்ட தரப்பரவல் வகைகளைப் (standard distribution types) போலவே இதுவும் அமைந்துள்ளது என்பது தெளிவு. மையநிலைப் போக்கை யொட்டிய ஒரு குவிவு (concentration) உள்ளதைக் காண்கிறோம்: அஃதாவது, விலைகள்

அட்டவணை 13-3

1927ஆம் ஆண்டில் 670 பொருள்களின் ஒப்புமை விலைப் பரவல்*
(1925ஆம் ஆண்டுச் சராசரி விலைகள் = 100)

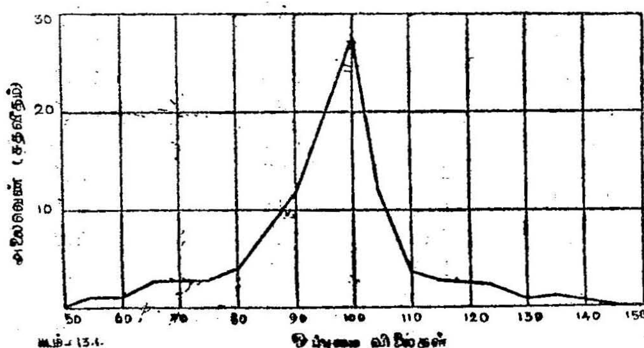
ஒப்புமை விலைகள்	நடுப் புள்ளி m	விவரங்களின் எண்ணிக்கை f	மொத்த அலைவெண்ணின் சதவீதங்கள்
52.5- 57.4	55	1	.1
57.5- 62.4	60	2	.3
62.5- 67.4	65	6	.9
67.5- 72.4	70	7	1.0
72.5- 77.4	75	8	1.2
77.5- 82.4	80	25	3.7
82.5- 87.4	85	50	7.5
87.5- 92.4	90	76	11.3
92.5- 97.4	95	136	20.3
97.5-102.4	100	196	29.3
102.5-107.4	105	83	12.4
107.5-112.4	110	26	3.9
112.5-117.4	115	16	2.4
117.5-122.4	120	14	2.1
122.5-127.4	125	12	1.8
127.5-132.4	130	2	.3
132.5-137.4	135	3	.5
137.5-142.4	140	5	.8
142.5-147.4	145	1	.1
147.5-152.4	150		
152.5-157.4	155	1	.1
		670	100.0

* யு. எஸ். பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டேடிஸ்டிக்ஸ் (U. S. Bureau of Labour Statistics) என்ற நிறுவனத்தாரால் கணக்கிடப்படும் மொத்த விலைக் குறியீட்டு எண்களுக்குப் பயன்பட்ட 670 பொருள்களே இங்குள்ளவைகள். முதல்நிலைத் தகவல்களும் ஒப்புமைகளும் அந்த நிறுவனத்தாரின் 'புல்லெட்டினில்' (Bulletin-43) உள்ளன.

அவ்வளவாக மாறுதலடையாமல் நிலைத்து நின்றுள்ளன—29சதவீதப் பொருள்களுக்கு 2.5 சதவீதத்திற்கும் குறைவான விலை மாற்றமே இந்த ஓர் ஆண்டில் நிகழ்ந்துள்ளது. இந்த மைய நிலைப் போக்கையொட்டி இரு பக்கமும் பரவல் சுமாராகச் சீராகவே (symmetrical) அமைந்துள்ளது. முகடுக்கு மேலுள்ள வீச்சு,

அதற்குக் கீழுள்ள வீச்சினும் சிறிது பெரியதுதான். எனவே, இந்த நிலையில், இப் பரவலுக்கு ஒரு சராசரியைக் கணக்கிடுவது பொருத்தம் என்று துணிந்து கூறலாம். எந்தச் சராசரியைப் பயன்படுத்தவேண்டுமென்ற சிக்கலைப் பிறகு பார்ப்போம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஓராண்டிலிருந்து மற்றோர் ஆண்டிற்குள்ள விலை ஏற்றத்தாழ்வுகளைப்பற்றிக் கூறியுள்ளோம்; கருதப்பட்ட கால இடையில், பொதுவாக விலைகள் சற்று இறங்கின என்றே (4.6 சதவீதம்) கூறவேண்டும். டபிள்யூ. ஸி. மிச்செல் (W. C. Mitchell) என்பவர், இதைவிட மிக விரிவான எடுத்துக்காட்டைத் தந்துள்ளார்; அதில், 1890—1913 ஆண்டுகளுக்கிடையே நிகழ்ந்த 5,540 விலை மாற்றங்களைப் (ஆண்டுக்கு மறு ஆண்டு) பரவலாகத் தந்துள்ளார்; அப் பரவல் முன்பே காட்டப்பட்டுள்ளது (படம் 4.6, பாகம் I, பக்கம் 104).



அலைவுப் பலகோணம் : 1927ஆம் ஆண்டின் 670 பொருள்களினது ஒப்புமை விலைகள் (1926-ன் சராசரி விலைகள் = 100).

ஆண்டுக்கு ஆண்டு நிகழும் விலைமாற்றங்களைக் கவனித்தால் விலைகளின் மாறுத்தன்மை (மந்தம்—inertia) நன்கு புலப்படும். எனவே, விலைமாற்றங்களை இன்னமும் அதிகமான கால இடையில் நோக்கி, முன்போலவே பரவல் அமைகிறதா என்பதைக் காணவேண்டும். 774 விலை மாற்றங்களை அட்டவணை 13-4-ல் பார்க்கலாம். இவைகள் 1926ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்ட 1933ஆம் ஆண்டுக்கான ஒப்புமை விலைகள்.

1926ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1933ஆம் ஆண்டிற்குப் பொதுவாக விலைகள் 33 சதவீதம் இறங்கியுள்ளன என்று கூறவேண்டும். இந்த அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களை 13.2ஆம் படத்தில்,

அட்டவணை 13-4

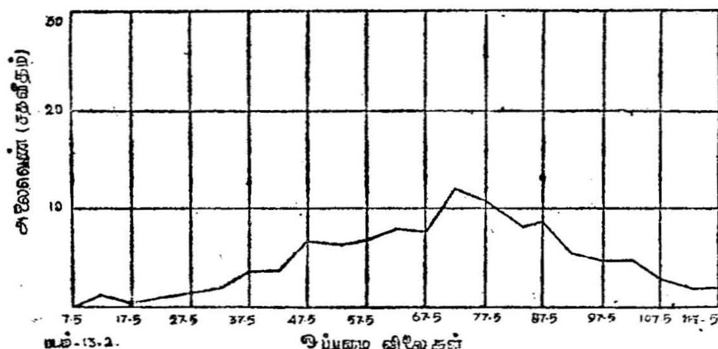
1933ஆம் ஆண்டின் 774 பொருள்களினது ஒப்புமை விலைகளின் பரவல்

(1926ஆம் ஆண்டுச் சராசரி விலைகள்=100)

ஒப்புமை விலைகள்	நடுப் புள்ளி m	விவரங்களின் எண்ணிக்கை f	மொத்த அலைவெண்ணின் சதவீதங்கள்
10- 14.9	12.5	3	.4
15- 19.9	17.5		
20- 24.9	22.5	1	.1
25- 29.9	27.5	7	.9
30- 34.9	32.5	13	1.7
35- 39.9	37.5	24	3.1
40- 44.9	42.5	28	3.6
45- 49.9	47.5	51	6 6
50- 54.9	52.5	49	6.3
55- 59.9	57.5	50	6.5
60- 64.9	62.5	62	8.0
65- 69.9	67.5	58	7.5
70- 74.9	72.5	93	12.0
75- 79.9	77.5	81	10.5
80- 84.9	82.5	62	8.0
85- 89.9	87.5	67	8.7
90- 94.9	92.5	40	5.2
95- 99.9	97.5	27	3.5
100-104.9	102.5	27	3.5
105-109.9	107.5	11	1.4
110-114.9	112.5	6	.8
115-119.9	117.5	8	1.0
120-124.9	122.5	1	.1
125-129.9	127.5	2	.3
155-159.9	157.5	1	.1
180-184.9	182.5	1	.1
190-194.9	192.5	1	.1
		774	100.0

சதவீதப் பரவலிலுள்ள அலைவுப் பலகோணமாகக் காட்டியுள்ளோம். படத்தில் அட்டவணையின் கடைசி ஐந்து பிரிவுகள் இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

13.1, 13.2 படங்களிலுள்ள பரவல்களிடையே அதிக வித்தியாசமுள்ளது. இரண்டாம் பரவலின் வீச்சு அதிகமாயுள்ளது; ஆனால், கால அளவு இங்கு அதிகமானதால் வீச்சும் அதிகமாயிருக்குமென்பது எதிர்பார்க்கவேண்டியதே. இரண்டாவதாக, மையநிலைப் போக்கு இங்கு நன்கு தெரிந்தாலும், முகட்டுப் பிரிவிலுள்ள அலைவெண் சதவீதம் மிகக் குறைவாகவுள்ளது. இரண்டு பரவல்களும் சாதாரண அளவில் வரையப்பட்டுச் சுமாராகச் சமச்சீராகவே அமைந்துள்ளன; சில விவரங்களே கடைசியில் வந்து இரண்டாம் பரவலின் வலப்பக்கத்தைச் சற்று



அலைவுப் பலகோணம் : 1933ஆம் ஆண்டின் 774 பொருள்களினது ஒப்புமை விலைகளின் பரவல் (1926ஆம் ஆண்டின் சராசரி விலைகள் = 100).

நீட்டிவிடுகின்றன. 13.1ஆம் படத்தில் மையநிலைப் போக்கைச் சுற்றிய குவிவு அதிகமாகக் காணப்படுகிறது; மையநிலைப் போக்கிலிருந்து மற்ற விலைவிகிதங்களின் விலக்கங்களும் சிறியனவாகவே உள்ளன. மிகத் திருத்தமான பருப்பொருள் அளவைகளின் (physical measurements) பரவலைப்போலவோ, அல்லது தேர்ச்சி பெற்ற பீரங்கிப் படைவீரர்களின் குண்டுவீச்சுப் பரவலைப் போலவோ இந்தப் பரவல் அமைந்துள்ளது. இரண்டாம் வரைபடம், திருத்தமற்ற பருப்பொருள் அளவைகளின் பரவலைப் போலவும், தேர்ச்சியற்ற பீரங்கிப் படைவீரர்களின் குண்டு வீச்சுப் பரவலைப்போலவும் அமைந்துள்ளது; முகட்டின் அலைவெண் (சதவீத அளவில்) குறைவாயும், அதனின்று மற்ற விலைவிகிதங்களின் விலக்கம் அதிகமாயும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். விலைகளே

ஒப்பிட்டுப்பார்க்கும் கால இடைவெளி அதிகமாகுமாயின், 13.2ஆம் படத்தில் காணப்பட்ட போக்கு மேலும் அதிகமாகும் என்று நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது. பெரும (maximum) குத்துக்கோட்டின் அளவு குறைந்து, பரவலின் வீச்சு அதிகமாகிறது. எனவே, கால இடைவெளி அதிகமானல், வளைகோடு மேலும் மேலும் தட்டையாகவும் (flat), இருபக்கங்களில் நீண்டும் அமையும்.

1926ஆம் ஆண்டையே அடிப்படையாகக் கொண்டு 1944ஆம் ஆண்டு விலைகளேயோ, 1954ஆம் ஆண்டு விலைகளேயோ ஒப்புமைகளாக்கிப் பரவல்கள் அமைப்போம் என்போம்; அப்பொழுது 13.2ஆம் படத்தின் சிறப்புக் கூறுகள் அதிகமான அளவில்தான் நிகழும். யுத்தகாலத்தின் பரவல், முக்கியமாக, மிக அதிகக் கோட்டம் (skewness) உடையதாக அமையும்; அவ்வளவு கோட்டத்தை நாம் மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் காணமுடியாது. இந்த விவரத்தை நாம் நன்கு அழுத்திக் கூறவேண்டும். ஒப்புமை விலைக்கு உச்சவரம்பென்பதே கிடையாது; 100, 500, 1,000 சதவீத அளவு விலையேற்றமும், நாம் எதிர்பார்க்கக்கூடியதும் நிகழக்கூடியதுமாகும். [யுத்தத் தொழிற்சாலை நிறுவனத்தாரால் (War Industries Board) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மிக அதிகமான விலையேற்றம் 4,981 சதவீதம்; இது 'அசெட்டிபினெட்டிடின்' (acetiphenetidin) என்ற பொருளில் நிகழ்ந்தது.] ஆனல், விலையிறக்கம் ஏற்படக்கூடிய உச்ச அளவு 100 சதவீதமே ஆகும்; ஏனென்ருல், அப்பொழுது அந்தப் பொருளின் விலை சுழியாகிவிடும் (zero). எனவே, விலை ஏற்றம் இருக்கும் காலங்களில், ஒப்புமை விலைகளின் பரவல்கள் நேர்கோட்டம் (positive skewness) உள்ளவைகளாக இருக்கும்.

சென்ற பகுதிகளில் நாம் குறியீட்டெண் தயாரிப்பதற்கான 'கச்சாப் பொருள்களின்' (raw materials) தன்மைகளைப்பற்றிச் சுருக்கமாகக் கூறியுள்ளோம்; அவைகளைத் தொகுக்கும்போது ஏற்படும் அலைவெண் பரவலைகளைப்பற்றியும் கூறினேம். நாம் கூர்ந்துநோக்கிய விவரங்கள் தனிப் பொருள்களின்—விகிதங்களாகக் குறிப்பிடப்பட்ட—விலைமாற்றங்கள். இவைகள் பலவற்றைத் தொகுப்பதால் ஓர் அலைவெண் பரவல் நிகழும்; அவைகளும், மற்ற அளவின விவரங்களிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய பரவல்களும் சில வகைகளில் ஒத்திருக்கும். விலைமாற்றங்களின் பரவலில் ஒரு மையநிலைப் போக்கு உள்ளதைக் காணலாம்; எனவே, அதனை அளவிட ஏதாவதொரு சராசரியைக் கணக்கிடலாம். ஆனல், விலைகளை ஒப்பிட்டுப்பார்க்கும் கால இடைவெளி அதிகமானல், மையநிலைப் போக்கு அவ்வளவு திட்பமாகத் தெரியாது;

அதனின்று நிகழும் விலக்கங்களின் அளவைகளும் பெரியவாகும். எனவே, காலம் அதிகமானுல், நாம் கணக்கிடும் சராசரி, விவரங்களின் பிரதிநிதியாக (representative) இருக்கமுடியாது. மற்றும், பரவல் கோட்டமாகவும் அமையலாம்; விலைகள் மிக அதிகமாக உயர்ந்துவரும் காலங்களில் இந்தப் போக்கும் அதிகமாகும். நாம் கையாளும் விகிதங்களுக்கு ஓர் உச்ச வரம்பு இல்லாத காரணத்தால் தான் கோட்டம் அதிகரித்துக்கொண்டேபோகிறது.

விலைக் குறியீட்டெண்களால் நிறைவேறும் சில நோக்கங்கள்

குறித்த இரு காலங்களிடையே தனிப் பொருள்களின் விலைகள் ஏறுவதற்கும் இறங்குவதற்கும் பற்பல விசைகள் காரணமாகவிருக்கும்; இவ் விசைகளின் மொத்தமான, அல்லது கூட்டான விளைவின் ஓர் அளவைதான் நமக்குத் தேவை; அதனை ஒப்புமை விலைகளின் ஒரு சராசரியால் அளவிட முயல்கிறோம் என்பதனை முன்பே கூறியுள்ளோம். திருத்தமாகக் காணும் மையநிலைப் போக்கின் மதிப்பை அளவிடுவதாக அமையும் ஒரு சராசரியே இந்த மொத்தமான விளைவை அளவிடும். இந்த ஒரு நோக்கத்தைமட்டும் கூறி நிறுத்திவிடுவது போதாது. அந்தப் பரவலில் எந்தப் பொருள்களின் ஒப்புமை விலைகளைச் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும் என்ற கேள்விக்கும் விடைகாணவேண்டும். அதற்கு நோக்கங்களைப்பற்றிச் சற்று விரிவாகவே ஆராய்வது நல்லது.

பணத்தின் வாங்குந் திறனில் (purchasing power of money) ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதே குறியீட்டெண் கணக்கர்களின் மரபான நோக்கமாகும். இந் நோக்கத்தோடேயே கார்லி (Carli) என்பவர் 1764-லும், ஜெவான்ஸ் (Jevons) 1863-லும், ஃபிஷர் (Fisher) 1911-லும் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டனர், பொதுவான விலை மட்டம் (general price level) இருப்பதைக் காட்டுவதான ஒரு சராசரியே இந் நோக்கத்தின் அடிப்படையாகும். பரிவர்த்தனை (exchange) செய்யப்படும் பொருள்களும், தொண்டுகளும் (services) அந்தச் சராசரியின் பகுதிகளாக அமையும். இந்த அடிப்படைக்குகந்ததான ஒரு பரவல், அது போன்ற எல்லாப் பொருள்களின் விலைகளையும், தொண்டுகளின் விலைகளையும் (அல்லது எல்லாவற்றிற்கும் பிரதிநிதியான ஒரு மாதிரி விலைகளைமட்டும்) கொண்டு அமைக்கப்பெற்றதாக இருக்கும். அதுபோல் எல்லாவகைப் பொருள்களையும், தொண்டுகளையும் கொண்ட பரவல் பலபடித்தானதாகவே (heterogeneous) அமையும் என்பதைக் கண்டுள்ளார்கள். ஏனென்றுல், பொது விலை அமைப்பின் (general price system) பல பிரிவுகள் வெவ்வேறு வகை விசைகளால் பாதிக்கப்படுபவை; எனவே, பல தயாரிப்புப்

படிகளில் (stages) உள்ளதும், வினியோகிக்கப்படுவதுமான பொருள்களின் விலைகள், வாரங்கள் (rents), லாபங்கள் (profits), வரிகள் (taxes), சம்பளங்கள் (salaries), கூலிகள் (wages), துய்ப்போர்களுக்கும் தயாரிப்பாளர்களுக்கும் தொண்டுகள்—முதலியனவற்றையெல்லாம் ஒன்றுசேர்த்தால், பரவல் பலபடித்தாகவேதான் இருக்கும். ஆகவே, தற்காலத்தில், மேற்கூறியதைப்போன்ற ஒரு மொத்தமான விலைமாற்ற அளவைக் கணக்கிடுவதில்லை. குறுகிய நோக்கங்களைக் கொண்டவையும், பொருளாதார அறிஞர்களுக்கும், அரசாங்க நிர்வாகிகளுக்கும், வியாபாரிகளுக்கும் உதவுகின்றவையுமான குறியீட்டெண்களையே கணக்கிடுகிறோம்.

தற்காலத்தில் மொத்த விற்பனை விலைகளுக்கான ஒரு குறியீட்டெண் தயாரிக்கப்படுகிறது. அதுவே பொதுவான விலைக் குறியீட்டெண்ணிற்கு மிக்க நெருங்கியவாறு அமைவதாகும். பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labour Statistics என்ற நிறுவனம் அமெரிக்க நாட்டின் ஒரு மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்ணை வெளியிடுகிறது. இஃது 'ஒவ்வொரு பொருளிலும் முதன்முதல் ஏற்படும் வியாபார விவகாரத்தையே' யொட்டி அமைக்கப்பெற்றதாகும். எனவே, மொத்த விற்பனைகளில் ஒரு பகுதியைமட்டும் சார்ந்தும் மற்றப் பகுதிகளையும் சந்தைகளையும் சாராமலும் இருக்கின்றன. ஆதலால், அது 'விலை மட்டத்தில்' (level of prices) ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடாது என்ருலும், பெருவாரியான பொருள்களின் விலைகளைக்கொண்டு அமைக்கப்பெற்றதால், மற்றக் குறியீட்டெண்களைவிட அதிகப்படியான விலை அசைவுகளைத் தன்னுள் அடக்கியுள்ளது.[1]

பொருளாதாரப் பொருள்களின்—மற்றும் தொண்டுகளின்—விலைகளிலுள்ள அசைவுகள் (movements) வெவ்வேறு வகைகளில் மாறுதலடையும் என்பதனை முன்பே கூறினேம். ஓர் ஆண்டுக்குள்ளோ, நீண்ட காலத்தினிடையோ பொதுவான வியாபாரச் சுழற்சிகளில் விரிவும் இறுக்கமும் ஏற்படும்போது விலைமாற்றங்கள்

[1] நாட்டின் மொத்த ஆக்கத்திற் (Gross National Product) கான 'இம்ப்ளிஸிட் டிப்ளேடர்' (implicit deblator) என்பதையும், அதன் பிரிவுப் பகுதிகளையும் பற்றிக் குறிப்பிடவேண்டும். இவை அமெரிக்க அரசாங்கத்தாரால், காமர்ஸ் டிபார்ட்மெண்டில் உள்ள 'நேஷனல் இன்கம் யூனிட்' (National Income Unit) என்ற பகுதியினரால் தயாரிக்கப்படுகின்றன. இது நாட்டின் மொத்த ஆக்கத்தை மாருத (constant) வாங்குந் திறன்பெற்ற டாலர்களில் தருகிறது. இந்த 'இம்ப்ளிஸிட் டிப்ளேடர்' ஆனது 1919ஆம் ஆண்டிலிருந்து ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இதுவும் ஒரு மொத்தமான விலைக் குறியீட்டெண் தான். ஆனல் இது, விலைமாற்றங்களினுல் மட்டுமல்லாமல், மொத்த ஆக்கத்தின் பகுதிகளின் அமைப்பாலும் பாதிக்கப்பெறும். ஸைமன் குஸ்நெட்ஸ் (Simon Kuznets) என்பவர் நாட்டின் வருமானத்தை அளவிடும்போது, 1919-க்கு முந்தைய ஆண்டுகளுக்கான வேருெரு டிப்ளேடரைக் கணக்கிட்டுள்ளார்.

வெவ்வேருகவே இருப்பதைக் காண்போம். இதுபோன்ற வேறுபாடுகள் தற்செயலாக நேருபவையல்ல என்பதைப் பொருளாதார வளர்ச்சி, வியாபாரச் சுழற்சிகளை ஆராய்வோர் நன்கு அறிவர். விலை மாற்றங்களில் ஒருவகை முறைகள் (pattern) உள்ளன; பொருளாதார மாற்றங்களுக்கான இடைவினைவு விசைகளின் (interacting forces) குறிப்புகளை இந்த முறைகளில் பெறலாம். விலை அமைப்புகளில் பன்னெடுங்கால மாற்றங்களும் சுழல் மாற்றங்களும் ஏற்படுகின்றன; அவ்வகை மாற்றங்களை உண்டாக்குகின்ற வெவ்வேருன அசைவுகளை அளவிடுவதே, தற்காலக் குறியீட்டெண்களின் மைய நோக்கமாகும். விலைகளைப் பலவகையாகப் பிரித்து ஆராய்வது பொருளாதார வல்லுநர்களுக்குப் பயனளிக்கும்; வேறு பலவகைப் பொருள் விலைகளை ஆராய்வது வியாபாரிகளுக்கும், தொழிற் சங்கங்களுக்கும் பயனளிக்கலாம்; வேறு பல பொருள் விலைகள் அரசாங்க நிர்வாகிகளுக்குத் தேவைப்படலாம். உற்பத்திக் காரணிகளின் (factors of production) விலைகள் (வாரம், கூலிகள், வருமானங்கள்; வட்டி மற்றும் லாப வீதங்கள்), பொருள்களின் மொத்த விலைகள், சில்லறை விலைகள், பண்ணை விலைகள் (farm prices), சுங்கவரி வீதங்கள் (tariff rates)—இவைகளே தற்காலத்தில் பெரிதும் ஆராயப்பட்டுவரும் பகுதிகள். விலைக் குறியீட்டெண்ணை யு.எஸ். பியூரோ ஆஃப் லேபர் (U.S. Bureau of Labour) என்ற நிறுவனம் கணக்கிடுகிறது; அது 15 முக்கியப் பொருள் தொகுதிகளுக்கும், 88 சாதாரணமான பொருள் தொகுதிகளுக்கும், தனியே குறியீட்டெண்களை அமைத்துவருகிறது. தானியங்கள், பால், கரி, மரங்களிலிருந்து விவசாயப் பொறிகள், மோட்டார் வண்டிகள், ரேடியோக்கள், டெலிவிஷன் செட்டுகள், கிராமப்போன்கள்வரை பலவகைப் பொருள்கள் இந்தக் குறியீட்டெண்களில் இடம் பெற்றுள்ளன. தி நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் (The National Bureau of Economic Research) என்ற நிறுவனமும் பற்பல பொருளாதாரப் பகுதிகளுக்கான குறியீட்டெண்களை வெளியிட்டு வருகிறது. கச்சாப் பொருள்கள், பொறிசெய் பொருள்கள், (manufactured foods), விவசாய மூலமான பொருள்கள், விவசாய மூலமல்லாதவைகள், விளைச்சலுக்கானவை (producer goods), துய்ப்புக்கானவைகள், நீடித்த—நீடிக்காத பொருள்கள் என்பன சில பகுதிகள். பொருள் விலைகளின் எல்லாப் பிரிவுகளும், இக் குறியீட்டெண்களில் தக்கவாறு இடம் பெற்றுள்ளன என்று கூறிவிடமுடியாது; என்ருலும், இன்று வழக்கத்திலுள்ள பகுதி குறியீட்டெண்களை வைத்துக்கொண்டு, மாறும் விலை அமைப்புகளை விரிவாக ஆராயமுடியும்.

மேற்கூறிய மைய நோக்கத்திற்குத் தொடர்புடைய மற்ருென்றும் உள்ளது. அது குறிப்பிட்ட பொருளாதாரப்

பகுதிகளுக்கான ' நாணய மாற்றுவீத'த்தில் (terms of exchange) ஏற்படும் பிறழ்ச்சிகளை (shifts) அளவிடுவதாகும். ' நாணய மாற்று வீதம் ' என்பது பன்னாட்டு வாணிபத்தில் (International Trade) பயன்படுகிற ஒரு சொல்லாகும். பிரிட்டனில் இஃது ஏற்றுமதி விலைக்கும் இறக்குமதி விலைக்குமுள்ள, மாறுகின்ற (changing) விகிதத்தைக் குறிக்கிறது ; எனவே, வாணிப நாடாகிய அதற்கு, நாணய மாற்றுவீதம் ஒரு முக்கியமான குறியீடாகும். அமெரிக்கப் பண்ணையாளர்களின் நாணய மாற்றுவீதத்தை ' ஒற்றுமை விகிதம் ' (parity ratio) என்று கூறுவர். இது பண்ணையில் பண்ணைப் பொருள்களின் விலைக்கும், அவர்கள் வாங்கும் பொருள்களுக்குக் கொடுத்த விலைகளுக்குமுள்ள விகிதமாகும்; இதன் மதிப்பை யொட்டியே கேந்திர அரசாங்கம், விவசாயிகளுக்கு உதவி வழங்குகிறது. அரசியல் வழியிலும், பொருளாதார வழியிலும் விவாதத்துக்கிடமானதும், அடிக்கடி நிகழ்வதுமான ஒரு பிரச்சினை யாகும் இது; கூலி வீதத்திற்கும் துய்ப்போர்கள் வாங்கும்பொழுது கொடுக்கும் விலைக்கும் உள்ள விகிதமும் இதுபோன்ற நாணய மாற்றுவீதமே. இது, கூலிவீதங்கள் அமைத்தல்பற்றிய விவாதங் களிலும், யுத்த காலங்களில் விலை-கூலி சட்ட அமைப்புகளிலும் பெரிதும் பயன்படும். தற்காலங்களில், குறித்த பொருளாதாரப் பகுதி யினர்களால் பெறப்படும் விலைகளுக்கும், அவர்கள் கொடுத்து வாங்க வேண்டிய விலைகளுக்கும் உள்ள தொடர்பினை விளக்குவதற்காக, தனிப்பட்ட குறியீட்டெண்களை அதிகமாகக் கணக்கிட்டு வருகி றார்கள். எந்த ஒரு பகுதியினருக்கோ அல்லது தனித்தவருக்கோ இந்த விகிதம் அவர்களின் பொருளாதார நலனைக் குறிப்பிடும் ஒரு காரணியாகும். (இது ஒன்றுதான் அதுபோன்ற காரணி என்று கூறுவதற்கில்லை. ஒருசமயம் விகிதம் சாதகமாகவே உள்ளது என்று வைத்துக்கொள்வோம்; தன் பண்டங்களை விற்கமுடியாத நிலையி லுள்ள நாட்டிற்கோ, அல்லது வேலையில்லாமல் அல்லல்படுகிறவர் களுக்கோ அதனுல் என்ன பயன் ?)

மற்றுமொரு நோக்கத்தைப்பற்றியும் குறிப்பிடுவோம்; ஒரு பகுதியிலுள்ள பொருள்களின் மொத்த மதிப்பில் நேரும் மாற்றத்தை அதன் அடிப்படையான விலைமாற்றம், அளவு (quantity) மாற்றங்களாகப் பிரிக்கலாம். ஒரே ஒரு பொருளைக் கொண்டு இதனை விளக்கலாம். 1940-52ஆம் ஆண்டு இடை வெளியில் அமெரிக்காவில் உற்பத்தியான கச்சாப் பருத்தியின் விலை 621,284,000 டாலர்களிலிருந்து, 2,774,230,000 டாலர்களாக மாறியது; பருத்தியின் அளவு 6,283,000 000 பவுண்டுகளிலிருந்து 7,519,000,000 பவுண்டுகளாகப் பெருகியது; ஒரு பவுண்டுக்கான பண்ணைச் சராசரி விலை 9.89 சென்ட்டுகளிலிருந்து 36.90 சென்ட்டு

களாக அதிகரித்தது. இதுதான் விவரங்கள்; இவைகளையெல்லாம் ஒப்புமைகளாக்கினால்,

	1940	1952
உற்பத்தியான பருத்தியின் அளவு (பவுண்டுகள்)	100.0	119.7
பருத்தியின் சராசரி விலை (பவுண்டுக்கு)	100.0	373.1
உற்பத்தியான பருத்தியின் மொத்த மதிப்பு	100.0	446.6

என்று வரும். மொத்த மதிப்புக்கான தகவல்களைக் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்தும் கணக்கிடலாம்; அல்லது, அளவு ஒப்புமை, சராசரி விலை ஒப்புமை இரண்டையும் பெருக்குவதாலும் பெறலாம். இரண்டு வழிகளிலும் கிடைக்கும் விடை சமமானதே. ஒரே ஒரு பொருளுக்கான விலைகள், அளவுகள், மொத்த மதிப்புகளை வைத்துக் கொண்டு கணக்கிடும்பொழுதெல்லாம் இவ்வகைச் சமன்பாடு நிகழ்வதைக் காணலாம். ஆனால், பல பொருள்களைக் கொண்ட ஒரு பகுதியின் விலைகள், அளவுகள், மொத்த மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடும்பொழுது சமன்பாடு நிகழாமல் போகும். இந்த நிலையில், அளவுக் குறியீட்டையும் விலைக் குறியீட்டையும் பெருக்கினால் ஒரு விடை வரும்; மொத்த மதிப்பு விவரங்களிலிருந்து மொத்த மதிப்பிற்கான குறியீட்டைக் கணக்கிட்டால் வேறொரு விடை வரும். எனவே, மேற்கூறப்பட்ட நோக்கம்—மொத்த மதிப்பை விலைப் பகுதியாகவும், அளவுப்பகுதியாகவும் முரண்பாடில்லாமல் பிரிக்கவேண்டும் என்பது—நிறைவேறுவது அவசியமானால், அதற்கேற்றாற்போல் முறைகளை மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும்.

குறியீட்டெண்களால் நிறைவேறுகிற சில நோக்கங்களைப்பற்றிச் சுருக்கமாகக் கூறினோம். முக்கியமாக, விலைக் குறியீட்டெண்களைப் பற்றியே விளக்கினோம். பருப்பொருள் விவரங்களை ஆராயும் பொழுது நிகழும் பிரச்சினைகளைப்பற்றிப் பின்பு விளக்குவோம். நோக்கங்களைப்பொறுத்து நுட்பமான வாய்பாடுகளைக் கையாள வேண்டும். அதனினும் மேலாக, மாதிரியில் எந்தெந்த பொருள்கள் இடம் பெறவேண்டும், அவைகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு இருக்கவேண்டும் என்ற பிரச்சினைகளுக்கான விடை, நோக்கங்களைப் பொறுத்தே இருக்கும். விவரங்களைப் பெறுவதில் நிகழக்கூடிய இன்னல்கள், கணக்கிடு முறைகள், முடிவுகளை வெளியிடுவதற்கான கால அளவு, முதலியனவற்றைப்பொறுத்தும் செய்முறைகள் மாறுதலடையும். இதுபோன்ற மற்றப் பல காரணங்களால்,

குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதற்குப் பற்பல முறைகளை வகுத்து, அவைகளை விளக்கியுள்ளார்கள். கருத்து வேற்றுமை இன்னமும் இருக்கத்தான் செய்கிறது என்றாலும், முறைகளில் அவ்வளவாக வேற்றுமை இன்று இல்லை. நடைமுறைப் பழக்கங்கள், நோக்கங்களைப் பற்றிய கருத்து ஒற்றுமை முதலியன, ஒரு தலைமுறைக்கு முன்பு இருந்த வேற்றுமைகளை வெகுவாகக் குறைத்துள்ளன.

இனி, செய்முறையில், விலைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதற்கான பிரச்சினைகளைப்பற்றிக் கூறுவோம். பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல் (மாதிரியின் அளவையும் விரிவையும் திட்டமாக்குதல்), விலைகளின் குறிப்புகளைப் பெறுதல், அக் குறிப்பு விலைகளையெல்லாம் ஒன்றுசேர்த்து, தகுந்த குறியீட்டைப் பெறுவதற்கான முறையைத் தேர்ந்தெடுத்தல்—முதலியன. முதற்கண், விலைக் குறிப்புகளை ஒன்று சேர்ப்பதற்கான ஒரு வாய்பாட்டைத் தேர்ந்தெடுப்போம். ஒரே கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு மற்ற வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் திட்டமாக விளக்குவோம். அட்டவணை 13-5ல் இக் கணக்கிடுதல்களுக்கான கச்சாப் பொருள்கள் உள்ளன. 1929—1945 ஆண்டுகளில் 12 முக்கியமான விளைபொருள்களின் பண்ணை விலைகளைப்பற்றிய (டிசம்பர் 1 அன்று) இந்த விவரங்களைக் கொண்டு முறைகளை விளக்குவோம். இந்தக் கால இடையில் முதலில் 'மந்தம்' (depression) ஏற்பட்டதாலும், பின்பு யுத்தமும் பண வீக்கமும் (inflation) ஏற்பட்டதாலும், விலைகளில் மிகையான ஏற்றத்தாழ்வுகள் நிகழ்ந்தன. எனவே, நமக்குத் தேவைப்படும் ஒப்பீடுகளைக் (comparisons) காண இந்த விவரங்கள் நன்கு உதவும்.

குறியீட்டு முறை : குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்பொழுது கீழ்க்கண்ட அடையாளக் குறிகளைப் (symbols) பயன்படுத்துவோம் :

p_0' : குறிப்பிட்ட ஒரு பொருளின் விலை—'0'—காலத்தில் (அடிப்படைக்காலம் (base period).

q_0' : அதே பொருளின் அளவு : '0' காலத்தில்

p_1' : அதே பொருளின் விலை : '1' காலத்தில்

q_1' : அதே பொருளின் அளவு : '1' காலத்தில்

p_0'': இரண்டாவது பொருளின் விலை: '0' காலத்தில்

q_0'': இரண்டாவது பொருளின் அளவு : '0' காலத்தில்

p_1'': இரண்டாவது பொருளின் விலை : '1' காலத்தில்

q_1'': இரண்டாவது பொருளின் அளவு : '1' காலத்தில்

$\frac{p_1'}{p_0'}$: ஒரு விலை ஒப்புமை (ஒரு பொருளின் '1' காலத்திய விலைக்கும், அதே பொருளின் '0' காலத்திய விலைக்குமுள்ள விகிதம்; இவைகளை 100ஆல் பெருக்கி, நடைமுறையிலுள்ள ஒப்புமை எண்களைப் (relative numbers) பெறலாம்.

$\frac{q_1'}{q_0'}$: ஓர் அளவு ஒப்புமை

P_{01}: '0' காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, '1' காலத்திற்கான விலைக் குறியீட்டெண்

P_{10}: '1' காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, '0' காலத்திற்கான விலைக் குறியீட்டெண்

P'_{12}: அடிப்படைப் பிறழ்ச்சியால் (base shifting) கிடைக்கும் விலைக் குறியீட்டெண்

Q_{01}: பருப்பொருள் அளவுகளின் குறியீட்டெண் (உற்பத்தியான, அல்லது பண்டமாற்றமான அல்லது நுகரப்பட்ட பொருள்கள்); '0' காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு '1' காலத்திற்கானது

Q_{10}: பருப்பொருள்களின் குறியீட்டெண்; '1' காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, '0' காலத்திற்கானது

V_{01}: '0' காலத்திய மொத்த மதிப்புகளுக்கும், '1' காலத்திய மொத்த மதிப்புகளுக்கும் (aggregate values) உள்ள விகிதம்; உற்பத்தியான அல்லது மாற்றப்பட்ட அல்லது நுகரப்பட்ட பொருள்களின் மொத்த மதிப்புகளில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றத்தைக் குறிப்பது

L : லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடு (Laspeyres)

P : பாஸ்ச்சேயின் (Paasche) வாய்பாடு (ஒட்டுக் குறிகள் ஒன்றும் இல்லாமல் P மாத்திரம் இந்த வாய்பாட்டைக் குறிப்பிடும் : P_{01}, P_{12} முதலியன விலைக் குறியீட்டெண்களைக் குறிக்கும்; ஒட்டுக் குறிகள் ஒப்பிடப்படும் ஆண்டுகளைக் குறிக்கும் என்பதைக் கவனிக்க)

I: விழுமிய வாய்பாடு (ideal formula)

E_1 : வாய்பாட்டுப் பிழையின் ஓரளவு காலத் திருப்பச் சோதனையால் (time-reversal test) சுட்டிக் காட்டப்படுவது

E_2 : வாய்பாட்டுப் பிழையின் அளவு : பகுதித் திருப்பச் சோதனையால் (factor-reversal test) சுட்டிக் காட்டப்படுவது.

D : $(=L—P)$ லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாட்டினுல் கிடைக்கும் முடிவிற்கும், பாஸ்ச்சேயின் வாய்பாட்டினுல் கிடைக்கும் முடிவிற்குமுள்ள வித்தியாசம்; இரண்டு சூழ்நிலைகளுக் (regimens) கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காட்டுவது.

சாதாரண விலைக் குறியீட்டெண்கள்

இர்விங்க் ஃபிஷர் (Irving Fisher) தம் நூலில் (துணைநூல் பட்டியல் 46) குறியீட்டெண்களைப்பற்றிய தீர்வாய்வான விளக்கம் தந்துள்ளார்; அதில் அவர் மூலாதாரமான (fundamental) ஆறு வகைக் குறியீட்டெண்களைக் குறிப்பிடுகிருர் : மொத்தமானது (அல்லது விலை மொத்தமானது), கூட்டுச் சராசரி வகை, பெருக்குச் சராசரி வகை, ஹார்மோனிக் சராசரி வகை, இடைநிலை வகை, முகட்டுவகை என்பன அவை. கடைசியான 'முகடு' நடைமுறையில் பயன்படவே இல்லையாதலால் அதனை நீக்கிவிடலாம். மற்றைய ஐந்து வகைகளையும், அவைகளின் மிக எளிதான தோற்றத்தில் ஆராய்வதால், அவைகளின் தன்மையை நன்கு அறியலாம்; பிறகு அவைகளின் சிக்கலான தொகுப்புகளைக் கவனிப்போம்.

உண்மை விலைகளின் மொத்தங்கள் : ஒரு குறித்த காலத்திய எல்லாப் பொருள்களின் விலைகளையும் கூட்டுகிருேம்; பிறகு இரண்டு காலங்களுக்கான அத்தகைய மொத்தங்களை ஒப்பிடுகிருேம்; அதுபோது கிடைப்பது எளிதான, மொத்தவகைக் குறியீட்டெண். அதற்கு வாய்பாடு

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \qquad \textbf{(13.1)}$$

அட்டவணை 13-5-ல் உள்ள தகவல்களுக்கு இக் கணக்குகளைச் செய்தால் அட்டவணை 13-6-ல் உள்ள விவரங்கள் கிடைக்கும். உண்மையான மொத்தங்களை (2)ஆம் பத்தியில் காண்கிருேம். ஒப்பிடுவதற்கு எளிதாக அமைய, அவைகளையே (3) ஆம் பத்தியில் ஒப்புமை விலைகளாகத் (1929ஆம் ஆண்டு விலையை அடிப்படையாகக் கொண்டு) தந்துள்ளோம்.

இந்த முறையில் கிடைத்த முடிவுகளை, மற்ற முறைகளால் கிடைக்கும் முடிவுகளுடன் பின்பு ஒப்பிடுவோம். இந்த முறையின் முக்கியமான ஒரு குறை தெற்றென விளங்கும். இது சமமாக நிறையிடப்பட்ட குறியீடும் அன்று; நிறையிடப்படாத குறியீடும் அன்று. பொருள் எந்த அலகு அளவில் வாணிபம் செய்யப் படுகிறதோ, அந்த அலகு விலையினைப்பொறுத்து முடிவை அது

அட்டவணை 13-5

12 முக்கிய விலைப்பொருள்களின் பண்ணை விலைச் சராசரிகள்; டிசம்பர் 1ஆம் தேதியன்று (1929–1945)*

விளைபொருள்	அலகு	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	194
கூலம்	புஷல்	.774	.655	.359	.192	.394	.805	.547	.951	.482	.415	.485	.556	.653	.780	1.080	1.060	1.10
பருத்தி	பவுண்டு	.164	.095	.057	.057	.094	.124	.114	.122	.081	.087	.091	.094	.161	.194	.196	.208	.227
வைக்கோல்	டன்	12.19	12.62	9.03	6.65	8.10	13.72	7.22	10.90	8.76	6.81	7.61	7.39	9.07	10.15	14.85	16.05	15.15
கோதுமை	புஷல்	1.035	.600	.443	.320	.678	.894	.882	1.104	.827	.528	.777	.720	.978	1.073	1.410	1.440	1 53
ஓட்ஸ்	புஷல்	.426	.315	.230	.134	.304	.525	.256	.463	.289	.234	.334	.320	.431	.458	.760	.678	.691
உருளைக்கிழங்கு (வெள்ளைநிறம்)	புஷல்	1.288	.890	.430	.353	.702	.457	.629	1.021	.521	.580	.700	.535	.800	1.100	1.340	1.465	1.340
சர்க்கரை	பவுண்டு†	.038	.033	.032	.029	.032	.029	.031	.038	.032	.029	.030	.029	.035	.037	.037	.038	.03
பார்லி	புஷல்	.544	.389	.353	.201	.407	.778	.376	.844	.507	.356	.430	.411	.546	.600	1.040	.971	1 065
புகையிலை	பவுண்டு	.183	.128	.082	.105	.130	.213	.184	.236	.204	.196	.154	.160	.264	.369	.405	.420	.42
சணல் (Flaxseed)	புஷல்	2.843	1.398	1.999	.848	1.518	1.653	1.54	1.92	1.81	1.62	1.72	1.40	1.68	2.30	2.84	2.90	2.8
ரை (Rye)	புஷல்	.849	.384	.388	.223	.554	.732	.402	.857	.600	.322	.484	.420	.560	.533	1.045	1.070	1.46
அரிசி	புஷல்	.995	.773	.561	.374	.779	.783	.739	.775	.706	.662	.742	.769	1.351	1.608	1.89	1.77	1 82

* சர்க்கரைக்குப் பொருத்தமான பண்ணை விலை கிடைக்கவில்லை. இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது நியூயார்க்கில் அந்த ஆண்டில் டிசம்பர் மாதத்தி கச்சாப் பொருளின் விலை; [96° சென்ட்ரிஃப்யூகல் (Centrifugal)] மொத்த விலை.

† மூலம் 'Agricultural Statistics' U. S. Department of Agriculture.

பாதிக்கும். இங்குள்ள குறியீட்டில் வைக்கோல், டன் அலகுகளில் விலையாகிறதாகக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது; எனவே, மற்ற எல்லாப் பொருள்களின் கூட்டுவிலையைவிட இதற்கு அதிகமான நிறை கொடுத்தாற்போலாகிறது; ஆளிவிதை அடுத்தபடியான நிறை யுள்ளது. எனவே, பகுத்தறிவிற்கு முரண்பாடான முறையில், இந்தக் குறியீடு தயாரிக்கப்பெற்றதால், இதனைப் பண்ணை விளைச்சல் விலைகளின் போக்கைக் காட்டுவதாகக் கொள்ளமுடியாது.

அட்டவணை 13-6

பண்ணை விளைச்சல்களின் விலைக் குறியீட்டெண்கள்
(உண்மை விலைகளின் மொத்தங்கள்)

ஆண்டு (1)	குறியீடு (உண்மை விலைகளின் மொத்தங்கள்) (2) (டாலரில்)	ஒப்புமைக் குறியீடு (1929=100) (3)
1929	21.329	100
1930	18.280	86
1931	13.964	65
1932	9.486	44
1933	13.692	64
1934	20.713	97
1935	12.920	61
1936	19.231	90
1937	14.819	69
1938	11.839	56
1939	13.557	64
1940	12.804	60
1941	16.529	77
1942	19.202	90
1943	26.883	126
1944	28.070	132
1945	27.747	130

ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரிகள்: மற்றொருமுறை, ஒவ்வொரு விலையையும் குறித்த காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, அதன் ஒப்புமை விலையாக மாற்றுவதும், பிறகு இந்த ஒப்புமைகளைத் தெரிந்த வழிகளிலொன்றினால் சராசரி யாக்குவதும் ஆகும். இந்த முறையின் முதல் தோற்றத்தை அட்டவணை 13-7-ல் காணலாம்; 1929ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1930ஆம் ஆண்டுத் தகவல்களை ஒப்புமைகளாக ஆக்கி யிருக்கிறோம்.

அட்டவணை 13-7

குறியீட்டெண் அமைப்பதற்காக ஒப்புமை விலைகளைக் கணக்கிடுதல்

பொருள் (1)	அலகு (2)	விலை, 1929 (3) (டாலரில்)	ஒப்புமை (4)	விலை, 1930 (5) (டாலரில்)	ஒப்புமை (6)
கூலம்	புஷல்	.774	100	.655	84.6
பருத்தி	பவுண்டு	.164	100	.095	57.9
வைக்கோல்	டன்	12.19	100	12.62	103.5
கோதுமை	புஷல்	1.035	100	.600	58.0
ஓட்ஸ்	புஷல்	.426	100	.315	73.9
வெள்ளை உருளைக் கிழங்கு	புஷல்	1.288	100	.890	69.1
சர்க்கரை	பவுண்டு	.038	100	.033	86.8
பார்லி	புஷல்	.544	100	.389	71.5
புகையிலை	பவுண்டு	.183	100	.128	69.9
சணல் (Flaxseed)	புஷல்	2.843	100	1.398	49.2
ரை (Rye)	புஷல்	.849	100	.384	45.2
அரிசி	புஷல்	.995	100	.773	77.7
			1200		847.3

இத் தகவல்களிலிருந்து இந்த இரண்டு ஆண்டுகளின் ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிடலாம். எந்த ஒரு தனி ஒப்புமைக்கும் $\frac{p_1'}{p_0'}$ என்பது வாய்பாடு ; எனவே, N ஒப்புமைகள் இருக்கும்பொழுது, '1' காலத்திய குறியீட்டெண்ணிற்கான வாய்பாடு :

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{N} \tag{13.2}$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் :

$$\text{குறியீடு (1929)} = \frac{1,200}{12} = 100$$

$$\text{குறியீடு (1930)} = \frac{847{\cdot}3}{12} = 70.6$$

இதேபோல், குறியீட்டெண்கள் 1931—1945 ஆண்டுகளுக்கும் கணக்கிடப்பட்டு, அட்டவணை 13-10-ன் (3)ஆம் பத்தியிலுள்ளன.

இவ் வகையான குறியீட்டெண்ணை, 'நிறையிடப்பெறாத' சராசரியென்று கூறுவார்கள். ஆனால், இதுவும் நிறையிடப்பட்டதே ஆகும். அடிப்படைக் காலத்தில் ஒவ்வொரு பொருளும் 100 டாலர்களுக்கு எவ்வளவு விற்பனையாகுமோ, அந்த அளவுகளால் நிறையிடப்பட்டதாகும். சென்ற எடுத்துக்காட்டில் கீழ்க்கண்ட அளவுகள் நிறைகளாக விருந்தன:

கூலம்	129.2	புஷல்கள்
பருத்தி	609.8	பவுண்டுகள்
வைக்கோல்	8.20	டன்கள்
கோதுமை	96.6	புஷல்கள்
ஓட்ஸ்	234.7	புஷல்கள்
உருளைக்கிழங்கு	77.6	புஷல்கள்
சர்க்கரை	2,631.6	பவுண்டுகள்
பார்லி	183.8	புஷல்கள்
புகையிலை	546.4	பவுண்டுகள்
சணல்	35.2	புஷல்கள்
ரை	117.8	புஷல்கள்
அரிசி	100.5	புஷல்கள்

அதாவது, மேற்கூறப்பட்ட அளவுகள் மற்ற 11 ஆண்டுகளில் என்னென்ன விலைக்கு விற்கப்பட்டன என்பதைத்தான்—ஒப்புமை விலைகளின் எளிதான சராசரியைக் கணக்கிடும்பொழுது—கண்டுபிடித்துள்ளோம். 1929ஆம் ஆண்டு விலைகளின்படி மேற்கூறப்பட்ட அளவுகள் 100 டாலர்களுக்கு விற்பனையாகும்; அதாவது மொத்த விற்பனை (12 பொருள்களுக்கு) 1,200 டாலர்கள். 1930ஆம் ஆண்டு விலைகளின்படி, இதே அளவுப் பொருள்களின் விற்பனையின் மொத்த மதிப்பு 847.30 டாலர்கள். எனவே, இவையிரண்டையும் 12ஆல் வகுப்பதால், அட்டவணை 13-10, (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள குறியீட்டெண்களைப் பெறுவோம்: 1929-க்கு 100, 1930-க்கு 71 (70.6) முதலானவை. எனவே, 'ஒப்புமை விலைகளின் நிறையிடாத சராசரி' யானது உண்மை விலைகளின் நிறையிட்ட சராசரியேதான். அடிப்படை ஆண்டான 1929-ல் 100 டாலர் மதிப்பான பொருளின் அளவைகளையே நிறைகளாகக் கொண்டிருக்கும் வகையில், இங்கு நிறைகள் சமம் என்று கூறலாம்.

ஒப்புமை விலைகளின் இடைநிலை: கூட்டுச் சராசரிக்குப் பதிலாக இடைநிலையைப் (median) பயன்படுத்தி, ஒவ்வோர் ஆண்டிற்குமான ஒப்புமைவிலைகளின் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். அட்டவணை

13-7-ன் (6) ஆம் பத்தியிலுள்ள தகவல்களை மதிப்பு வரிசையாக எழுதினால் :

45.2	71.5
49.2	73.9
57.9	77.7
58.0	84.6
69.1	86.8
69.9	103.5

இவைகளிலிருந்து இடைநிலையை 70.7 என்று கணக்கிடலாம். இதுதான் 1930ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டு எண். இதேபோன்று மற்றைய ஆண்டுகளுக்கும் கணக்கிட்ட விவரங்களை அட்டவணை 13-10-ன் (4)ஆம் பத்தியில் காணலாம்.

ஒப்புமைகளின் பெருக்குச் சராசரி : ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, முன்பு செய்ததுபோலவே பல ஆண்டுகளுக்கு ஒப்பிடலாம். தனியான ஒரு ஒப்புமை விலையை $\frac{p_1'}{p_0'}$ என்று குறித்தால், N ஒப்புமைகளின் பெருக்குச் சராசரிக்கான வாய்பாடு:

$$M_g = \sqrt[N]{\frac{p_1'}{p_0'} \times \frac{p_1''}{p_0''} \times \frac{p_1'''}{p_0'''} \times \ldots} \qquad (13.3)$$

சாதாரணமாக, லாகிருதங்களின் உதவியால் இதனைக் கணக்கிடுவோம் ; அதற்கான வாய்பாடு :

$$\text{Log } M_g = \frac{\log\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right) + \log\left(\frac{p_1''}{p_0''}\right) + \log\left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\right) + \ldots}{N} \qquad (13.4)$$

1929, 1930—இந்த இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும் உரிய கணக்குகளை அட்டவணை 13-8 விளக்கும்.

அட்டவணை 13-7-லிருந்து பொருள்களின் விலைகளை இங்கே திரும்பவும் எழுதியுள்ளோம். லாகிருதங்களின் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் ஆன்டிலாகிருதங்களைக் (anti logarithms) கண்டால், 1929ஆம் ஆண்டிற்கு 100 என்றும், 1930ஆம் ஆண்டிற்கு 68.8 என்றும் குறியீட்டெண்கள் கிடைக்கின்றன.

ஏனைய ஆண்டுகளுக்கும் இதுபோலக் கணக்கிட்டு, அட்டவணை 13-10-ன் (5)ஆம் பத்தியில் குறியீட்டெண்கள் கொடுக்கப் பெற்றுள்ளன.

அட்டவணை 13-8

ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரிகளைக் கணக்கிடுதல்

பொருள் (1)	ஒப்புமை விலைகள் (1929) (2)	(2)ஆம் பத்தியின் லாகிருதங்கள் (2)	ஒப்புமை விலைகள் (1930) (4)	(4)ஆம் பத்தியின் லாகிருதங்கள் (5)
கூலம்	100	2.0	84.6	1.92737
பருத்தி	100	2.0	57.9	1.76268
வைக்கோல்	100	2.0	103.5	2.01494
கோதுமை	100	2.0	58.0	1.76343
ஓட்ஸ்	100	2.0	73.9	1.86864
வெள்ளை உருளைக்கிழங்கு	100	2.0	69.1	1.83948
சர்க்கரை	100	2.0	86.8	1.93852
பார்லி	100	2.0	71.5	1.85431
புகையிலை	100	2.0	69.9	1.84448
சணல்	100	2.0	49.2	1.69197
ரை	100	2.0	45.2	1.65514
அரிசி	100	2.0	77.7	1.89042
		24.0		22.05138

$$\text{Log } M_g \text{ (1929)} = \frac{24.0}{12} = 2$$

$$M_g = \text{Antilog } 2 = 100$$

$$\text{Log } M_g \text{ (1930)} = \frac{22.05138}{12} = 1.83761$$

$$M_g = \text{Antilog } 1.83761 = 68.8$$

ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி : முன்பே ஹார்மோனிக் சராசரியின் தன்மைகளை விவரித்துள்ளோம். உறுப்புகளின் ரெஸிப்ரோக்கல்களை (Reciprocals) எடுத்து, அவைகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டால் கிடைப்பது ஹார்மோனிக் சராசரியின் ரெஸிப்ரோக்கல் ஆகும். இங்கு $\frac{p_1'}{p_0'}$ போன்ற ஒப்புமை விலைகளே உறுப்புகள் ஆதலால்,

அவற்றின் ரெஸிப்ரோக்கல் $\frac{p_0'}{p_1'}$ போன்று அமையும். N விலைகளுக்கான வாய்பாடு :

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{p_0'}{p_1'} + \frac{p_0''}{p_1''} + \frac{p_0'''}{p_1'''} + \cdots}{N} \tag{13.5}$$

அல்லது

$$H = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} \tag{13.6}$$

அட்டவணை 13-9-ல், இதன் கணக்கு விவரங்களைக் காணலாம். அதேபோன்று மற்ற ஆண்டுகளுக்கும் கணக்கிட்டு, விவரங்களை அட்டவணை 13-10-ன் (6)ஆம் பத்தியில் கொடுத்துள்ளோம்.

அட்டவணை 13-9

ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரிகளைக் கணக்கிடுதல்

பொருள் (1)	ஒப்புமை விலை, 1929 (2)	(2)ஆம் பத்தி எண்களின் ரெஸிப்ரோக்கல் (3)	ஒப்புமை விலை, 1930 (4)	(4)ஆம் பத்தி எண்களின் ரெஸிப்ரோக்கல் (5)
கூலம்	100	.01	84.6	.01182033
பருத்தி	100	.01	57.9	.01727116
வைக்கோல்	100	.01	103.5	.00966184
கோதுமை	100	.01	58.0	.01724138
ஓட்ஸ்	100	.01	73.9	.01353180
வெள்ளை உருளைக்கிழங்கு	100	.01	69.1	.01447178
சர்க்கரை	100	.01	86.8	.01152074
பார்லி	100	.01	71.5	.01398601
புகையிலை	100	.01	69.9	.01430615
சணல்	100	.01	49.2	.02032520
ரை	100	.01	45.2	.02212389
அரிசி	100	.01	77.7	.01287001
		.12		.17913029

$$H\,(1929) = \frac{12}{.12} = 100$$

$$H\,(1930) = \frac{12}{.17913029} = 67.0$$

இந்த ஐந்து வகைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்பொழுது, பகுத்தறிவுக்கொத்ததான எந்த நிறையிடும் முறையையும் பயன்படுத்தவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். இவைகளையெல்லாம்

சாதாரணமாக 'நிறையிடாத' சராசரிகள் என்று குறிப்பிடுவார்கள்; அது தவருன முறையாகும். உண்மை விலைகளின் மொத்தங்களைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட முதல் குறியீடும் நிறையிடப்பட்டதே என்பதை முன்பு கண்டோம். ஆனல், நிறைகள் தாம் பகுத்தறிவிற்குப் புறம்பானவை. மற்ற நான்கு குறியீடுகளுக்கும் நிறையானது 1929ஆம் ஆண்டு 100 டாலர்களுக்கு அந்தந்தப் பொருள்களில் எவ்வளவு வாங்கலாம் என்ற அளவுகளே. இந்த ஐந்து வகைக் குறியீட்டெண்களையும் அட்டவணை 13-10-ல் ஒன்றுசேர்த்துள்ளோம். குறியீடுகள் முழு எண் அளவிற்குத் தோராயமானவை; இவைகளையே 13.3ஆம் படத்தில், வரைபடமாக அமைத்துள்ளோம்.

அட்டவணை 13-10

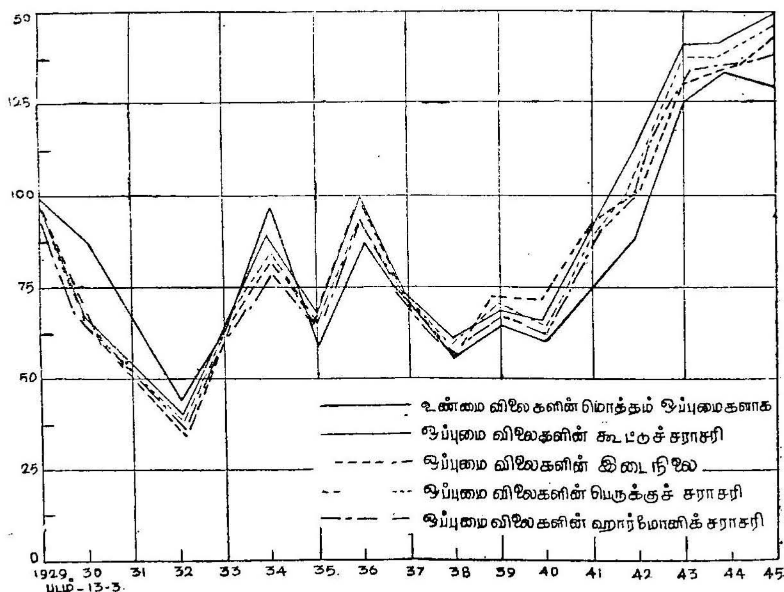
பண்ணை விளைச்சல் விலைகளின் குறியீட்டெண்கள் 1929-1945 (1929=100)

ஆண்டு (1)	உண்மையான விலைகளின் மொத்தம் (ஒப்புமை களாக) (2)	ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரி (3)	ஒப்புமை விலைகளின் இடைநிலை (4)	ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரி (5)	ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி (6)
1929	100	100	100	100	100
1930	86	71	71	69	67
1931	65	54	50	52	50
1932	44	39	33	37	35
1933	64	66	66	65	64
1934	97	91	86	86	80
1935	61	68	69	67	65
1936	90	101	100	98	96
1937	69	72	71	70	67
1938	56	60	55	58	57
1939	64	68	69	68	67
1940	60	66	71	64	63
1941	77	92	93	89	86
1942	90	109	102	104	100
1943	126	143	129	138	134
1944	132	143	134	139	136
1945	130	150	145	145	141

எளிதான குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடுதல்: காலத் திருப்பச் சோதனை (Time Reversal Test)

கணக்கிடப்பட்ட நான்கு ஒப்புமை விலைகளின் சராசரிக் குறியீட்டெண்கள் பெரும்பாலும் ஒத்தே இருக்கின்றன; ஆனல்,

மொத்தக் குறியீட்டெண்கள் இவைகளைவிட வெகுவாக வேறுபட்டுள்ளன. மொத்தக் குறியீட்டெண்கள் நம்பிக்கை வைக்கக் கூடியன அல்ல என்பதற்கான காரணங்களை முன்பே கூறியுள்ளோம். எனவே, இவை விலைமாற்றங்களை நன்கு அளவிடுவதாகக் கொள்ளமுடியாது. கூட்டு, பெருக்கு, ஹார்மோனிக்—இம் மூன்று சராசரிகளிடையே பொதுவாக உள்ள தொடர்பை நாம் அறிவோம்; அதற்கேற்ருற் போலவே, இம் மூன்று வகைக் குறியீட்டெண்களும் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். அடிப்படை ஆண்டைத் தவிர மற்ற ஆண்டுகளிலெல்லாம் பெருக்கல் சராசரி, கூட்டுச் சராசரியைவிடக் குறைவாக இருப்பதையும், அதேபோன்று, ஹார்மோனிக் சராசரி, பெருக்கல் சராசரியைவிடக் குறைவாகவே இருப்பதையும் பார்க்கிருேம்; விலைகளிடையே உள்ள சிதறல் அதிகமாகும்பொழுது இவைகளிடையே உள்ள வித்தியாசமும் அதிகமாவதைக் காணலாம். இடைநிலையானது, பன்னிரண்டே மதிப்புகளைக் கொண்டு கணக்கிடப்பெற்றுள்ளது. எனவே, அதன் மதிப்பு ' நிலையற்றதாக ' (unstable) உள்ளது. அதற்கும் மற்றச் சராசரிகளுக்குமுள்ள தொடர்புப் பொருத்தம் ஒரே வகையாக இல்லை.



பண்ணை விளைச்சல் விலைகளுக்கான ஐந்து எளிதான குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடுதல், 1929–45 (1929 = 100)

வெவ்வேறு முடிவுகளுள்ள இவைகளில் எதை, எப்படித் தேர்ந்தெடுப்பது ? 'நிறையிடாத' இவைகளில் எந்த ஒரு குறியீட்டெண்ணும் குற்றமற்றது என்று சொல்வதற்கில்லை ; ஏனென்றால், இவைகளிடையே 'புகுந்துள்ள' நிறைகள், பொருள்களின் ஒப்புமை முக்கியத்துவத்தை (relative importance) அளவிடுவனவாக அமையவில்லை. நிறைப் பிரச்சினையைத் தற்போதைக்கு ஒதுக்கிவிட்டு, விலை மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான இந்த ஐந்து குறியீட்டு எண்களில் எது நல்ல முறையில் அந்த மாற்றங்களை அளவிடும் என்று பார்ப்போம்.

இதற்கு இர்விங்க் ஃபிஷர் (Irving Fisher) என்பவர் 'காலத் திருப்பச் சோதனை' யென்றதொரு சோதனையை நிறுவியுள்ளார். கால அளவில் முன்னடையாகச் சென்றாலும், பின்னடையாகச் சென்றாலும், முறை சரியானதாக இருக்குமா என்று பார்ப்பதே இச் சோதனையின் நோக்கமாகும். ஓர் எடுத்துக்காட்டு இதனை விளக்கும். 1940ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1941ஆம் ஆண்டிற்குச் சர்க்கரையின் விலை பவுண்டுக்கு 3 சென்டுகளிலிருந்து 4 சென்டுகளாக உயர்ந்தது என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது 1940 விலையின் $133\frac{1}{3}$ சதவீதம் 1941ஆம் ஆண்டின் விலை ஆகும். இதனைப் பின்னடையாகக் கவனிப்போம். 1940ஆம் ஆண்டு விலை 1941ஆம் ஆண்டு விலையின் 75 சதவீதமே. இங்குக் கிடைத்த இரண்டு மதிப்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று ரெஸிபுரோக்கல்களாலானவை என்பது தெளிவு ; அவைகளின் பெருக்கல் பலன் $(1.33\frac{1}{3} \times 0.75 = 1)$ ஒன்றாகும். எனவே, இருநடையிலும் ஒரு குறியீட்டெண் சரியானதாக இருக்கவேண்டுமானால், இந்த விதி பொருத்தமாக இருக்கவேண்டும். அஃதாவது, ஒரு முறையில் ஓர் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டபொழுது மற்றோர் ஆண்டின் குறியீட்டெண் $133\frac{1}{3}$ சதவீதமானால், இரண்டாம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கருதி அதே முறையில் முதலாண்டின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட்டால், அது 75 சதவீதமாக இருக்கவேண்டும். எனவே, அடிப்படைக் காலத்தைத் 'திருப்பி'ப் பார்ப்பதால் கிடைக்கும் இரண்டு குறியீட்டெண்களும் ஒன்றுக்கொன்று ரெஸிபுரோக்கலாக இருத்தல் வேண்டும். அவைகளின் பெருக்கல் பலன் 1தான். அஃதாவது,

$$P_{01} \cdot P_{10} = 1$$

என்ற சமன்பாடு சரியாக இருக்கவேண்டும். இங்கு P_{01} என்பது '0' கால அடிப்படையாகக்கொண்டு '1' காலத்தின் குறியீட்டெண்; P_{10} என்பது '1' காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு '0' காலத்திற்கான குறியீட்டெண். (இதுபோன்ற எல்லாக் கோவை

களிலும், நாம் தசமப் புள்ளி இரண்டு ஸ்தானம் இடப் பக்கத்துக்குத் தள்ளப்பட்டதாகவே கருதுவோம்; அஃதாவது, ஒப்புமைச் சதவீதங்களை நாம் கருதுவதில்லை; விகிதங்களையே கருதுவோம்.) பெருக்கல் பலன் 1ஆகவில்லையென்ருல், அந்த முறையில் 'வகைச்சார்பு' (type bias) உள்ளது என்போம்.

இவ்வகைப் பிழையை மட்ஜெட் (Mudgett) என்பவர் E_1 என்று குறித்துள்ளார் (துணை நூல் பட்டியல் 113).

வாய்பாடு $$E_1 = (P_{01} \cdot P_{10}) - 1 \qquad (13{\cdot}7)$$

காலத்திருப்பச் சோதனை சரியாக நிகழ்ந்தால், இந்தப் பிழை பூஜ்யமாவதை எளிதில் காணலாம்.

மேலே விளக்கப்பட்ட முறைகளை இந்தச் சோதனைக்குள்ளாக்குவோம். அதற்காக, 1929, 1930 விலைகளைமட்டும் எடுத்துக்கொள்வோம். 1929ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாக வைத்தால், கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் கிடைக்கின்றன :

ஆண்டு	உண்மை விலைகளின் மொத்தங்கள் (ஒப்புமைகளாக)	ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் இடைநிலை	ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி
1929	100·00	100·00	100·00	100·00	100·00
1930	85·71	70·61	70·73	68·80	66·99

1930ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாக வைத்தால்,

ஆண்டு	உண்மை விலைகளின் மொத்தங்கள் (ஒப்புமைகளாக)	ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் இடைநிலை	ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி
1929	116·68	149·25	141·41	145·31	141·60
1930	100·00	100·00	100·00	100·00	100·00

என்ற விவரங்கள் வருகின்றன.

இப்பொழுது 1930ஆம் ஆண்டுக்கான குறியீட்டெண்களை முதல் பட்டியலிலிருந்தும், 1929ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்களை இரண்டாம் பட்டியலிலிருந்தும் எடுத்துப் பெருக்கினால் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் நிகழும். (பெருக்குவதற்கு முன்பு குறியீட்டெண்களை விகிதங்களாகக் கருதவேண்டும்; சதவீதங்களாக அல்ல.)

உண்மை விலை மொத்தங்கள்	ஒப்புமை விலைகளின் கூட்டுச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் இடைநிலை	ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரி	ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி
1·00	1·0539	1·00	1·00	0·9486

இச் சோதனையில் மூன்று முறைகள் தேறுகின்றன. கூட்டுச் சராசரி முறையும், ஹார்மோனிக் சராசரி முறையும் தேறுவதில்லை. கூட்டுச் சராசரிக்கு $E_1 = +\ 0.0539$; ஹார்மோனிக் சராசரிக்கு $E_1 = -0.0514$. முதலாவதற்குக் கூடுதலான (upward) சார்புள்ளது; இரண்டாவதற்குச் சுமாராக அதே அளவில் குறைவான (downward) சார்புள்ளது. எனவே, இந்த இரண்டு சராசரி முறைகளிலும் 'வகைச்சார்பு' உள்ளது.

விலைகளின் நிறையிட்ட குறியீட்டெண்கள்

முற்பகுதியில் சாதாரணக் குறியீட்டெண்கள் ஐந்தைப்பற்றி விளக்கினோம். நிறைகளை அமைத்துக் கணக்கிட்டால், கிடைக்கக் கூடிய வாய்பாடுகள் மிக அதிகமாக இருக்கும்; இருந்தாலும், அவைகளில் சிலவே இங்கு விவரிக்கப்பெறும்.

விலைமாற்றங்களைத் திட்டமாக அளவிடவேண்டுமென்றால், நாம் அமைக்கும் நிறைகள் பகுத்தறிவுக்கு உகந்தவைகளாகவும், பொருள்களின் முக்கியத்துவத்தை நன்கு குறிப்பிடுபவைகளாகவும் இருத்தல் நல்லது. நிறையிடுவதையே முழுவதும் நீக்கிவிடுவதால், எதேச்சையான, பகுத்தறிவிற்குப் புறம்பான நிறைகள் —நாம் அறியாவிடினும்—நிகழ்ந்துவிடக்கூடும்.

முன்பு கூறப்பட்ட விவரங்களைக்கொண்டே நிறையிடும் முறைகளை விளக்கலாம்; பற்பல நிறைகள் எப்படிக் குறியீட்டெண்களைப் பாதிக்கின்றன என்றும் காட்டலாம். தற்பொழுது நாம் பயன்படுத்துவது இருவகை நிறைகளையே. ஒன்று: விளைச்சலான பயிர்களின் அளவைகள் (quantities); இரண்டு: சில வகைகளுக்கு விளைச்சலான பயிர்களின் மதிப்புகள் (values). அட்டவணை 13-11-ல், 1929-45ஆம் ஆண்டுகளில் விளைச்சல் அளவைகளைக் காணலாம்.

லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடு (Laspeyre's Formula)

விலைகளை அவைகள் குறிப்பிட்டுள்ளபடியே கூட்டுவதால் பகுத்தறிவுக்குப் புறம்பான நிறைகள் ஏற்படுவதைப்பற்றி முன்பே

அட்டவணை 13-11

பன்னிரண்டு பயிர்களின் வருடாந்தர விளைச்சல் (1929-1945)

ஆண்டு	கூலம் (மில்லியன் புஷல்கள்)	பருத்தி (மில்லியன் பேல்கள்)*	வைக்கோல் (குறைந்த டன்கள், மில்லியன் களில்)	கோதுமை (மில்லியன் புஷல்கள்)	ஓட்ஸ் (மில்லியன் புஷல்கள்)	வெள்ளை உருளைக் கிழங்கு (மில்லியன் புஷல்கள்)	சர்க்கரை† (மில்லியன் பவுண்டுகள்)	பார்லி (மில்லியன் புஷல்கள்)	புகையிலை (மில்லியன் பவுண்டுகள்)	சணல் (மில்லியன் புஷல்கள்)	ரை (மில்லியன் புஷல்கள்)	அரிசி (மில்லியன் புஷல்கள்)
1929	2,516	14.83	76.02	824.2	1,113	333.4	6,590	280.6	1,533	15.9	35.41	39.53
1930	2,080	13.93	63.71	886.5	1,275	343.8	6,438	301.6	1,648	21.7	45.38	44.93
1931	2,576	17.10	66.99	941.5	1,124	384.3	6,679	200.3	1,565	11.8	32.78	44.61
1932	2,930	13.00	71.77	756.3	1,255	374.7	6,365	299.4	1,018	11.5	39.10	41.62
1933	2,398	13.05	66.30	555.2	736	343.2	6,218	152.8	1,372	6.9	20.57	37.65
1934	1,449	9.64	55.68	526.1	544	406.5	6,680	117.4	1,085	5.7	16.29	39.05
1935	2,299	10.64	78.46	628.2	1,210	378.9	6,641	288.7	1,302	14.9	56.94	39.45
1936	1,506	12.40	62.72	629.9	793	324.0	6,577	147.7	1,163	5.3	24.24	49.82
1937	2,643	18.95	73.27	873.9	1,177	376.4	5,996	221.9	1,569	7.1	48.86	53.42
1938	2,549	11.94	80.40	919.9	1,089	355.8	6,285	256.6	1,386	8.0	55.98	52.51
1939	2,581	11.82	76.38	741.2	958	342.4	7,078	278.2	1,881	19.6	38.56	54.06
1940	2,462	12.57	85.07	813.3	1,245	375.8	7,587	308.9	1,462	30.9	39.98	54.43
1941	2,676	10.74	82.74	943.1	1,181	355.6	6,569	362.1	1,262	32.3	45.36	51.32
1942	3,132	12.82	92.20	974.2	1,350	370.5	5,964	429.2	1,409	41.1	57.67	64.55
1943	3,034	11.43	87.24	841.0	1,138	465.0	6,809	324.2	1,406	51.9	30.45	64.84
1944	3,203	12.23	84.08	1,072.2	1,155	383.1	7,402	278.6	1,957	23.1	25.50	68.16
1945	3,018	9.02	91.57	1,123.1	1,548	425.1	5,319	264.0	1,998	36.7	26.35	70.16

*ஒரு பேலின் மொத்த (gross) எடை 500 பவுண்டுகள்.

†குறியிட்ட ஆண்டு ஜூலை 1ஆம் தேதியிலிருந்து 12 மாதங்களில் துய்ப்புக்குக் (consumption) கிடைக்கும் மொத்த அளிப்பைக் (suppl குறிக்கிறது.

கூறினோம். எனவே, மொத்தமாக்குவதற்கு முன்பே ஏற்ற முறையில் நிறைகளை அமைப்பது நல்லதாகும். அடிப்படை ஆண்டில் ('0' காலத்தில்) தயாரான (விளைந்த) அளவைகளைக்கொண்டு நிறையிடுவோம். அப்பொழுது நிகழும் வாய்பாடு,

$$L = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \qquad (13.8)$$

அமெரிக்க பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labour Statistics) என்ற நிறுவனம், சற்றேறக்குறைய இந்த முறையைக் கையாண்டு, மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுகிறது. இதற்கு அடிப்படை ஆண்டு, 1947–8–9 என்ற மூன்று ஆண்டுகளின் சராசரி; பொருள் அளவைகள் 1947ஆம் ஆண்டுக்கானவை. இந்த வாய்பாட்டை 'லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடு' என்பர்; L என்ற அடையாளம் இதனைக் குறிக்கும். முறைவிளக்கங்கள் அட்டவணை 13-12-ல் உள்ளன.

இந்த அட்டவணையில் (5), (8)ஆம் பத்திகளின் மொத்தங்களைக் கணக்கிட்டால் வரும் கூட்டுத் தொகைகளைப் பயன்படுத்தித் தேவையான குறியீட்டெண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இரண்டில் எந்த ஆண்டை வேண்டுமானாலும் அடிப்படையாகக் கொள்ளலாம். 1929ஆம் ஆண்டு அடிப்படையானால், 1930ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண் 76.0 என்று வரும். இதேபோல் மற்ற ஆண்டுகளுக்கும் கணக்கிடப்பட்டு, முடிவுகளை அட்டவணை 13-15-ன் 2ஆம் பத்தியில் காட்டியுள்ளோம்.

பாஸ்ச்சே வாய்பாடு (Paasche Formula)

அடிப்படை ஆண்டிலிருந்து நிறைகளை எடுக்காமல், மற்ற ஆண்டிலிருந்து எடுத்தால், நமக்கு வேறொரு நிறையிட்ட மொத்தம் கிடைக்கிறது. அஃதாவது, '0' காலத்திய விலைகளை '1' காலத்திய விலைகளுடன் ஒப்பிடும்பொழுது, '1' காலத்திய அளவைகளான q_1களையும், '2'ஆம் காலத்திய விலைகளுடன் ஒப்பிடும்பொழுது q_2 களையும் நிறைகளாகக் கொள்ளவேண்டும். இதுபோலவே மற்ற ஆண்டுகளுக்கும் கணக்கிடவேண்டும். எனவே, '1'காலத்திய குறியீட்டெண்ணிற்கான வாய்பாடு :

$$P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \qquad (13.9)$$

இதை பாஸ்ச்சேயின் வாய்பாடு என்பர்; P என்ற அடையாளம் இதனைக் குறிப்பிடும். முன்பு கணக்கிட்ட முறையையொட்டியே இந்தக் குறியீடுகளையும் கணக்கிடலாம். இங்கு நிறைகளை ஆண்டுக்

அட்டவணை 13-12

உண்மை விலைகளில் நிறையிட்ட மொத்தங்களைக் கணக்கிடுதல்

பொருள்	அலகு	1929-ல் விலை	நிறை (1929-ஆம் ஆண்டில் விளைந்தது, மில்லியன்)	விலை × நிறை	விலை 1930-ல்	நிறை (1929-ஆம் ஆண்டில் விளைந்தது, மில்லியன்)	விலை × நிறை
		p_0	q_0	p_0q_0	p_1	q_0	p_1q_0
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
கூலம்	புஷ.	$ .774	2,516	1,947,384,000	.655	2,516	1,647,980,000
பருத்தி	பவு.	.164	7,089	1,162,596,000	.095	7,089	673,455,000
வைக்கோல்	குறை டன்	12.19	76.02	926,683,800	12.62	76.02	959,372,400
கோதுமை	புஷ.	1.035	824.2	853,047,000	.600	824.2	494,520,000
ஓட்ஸ்	புஷ.	.426	1,113	474,138,000	.315	1,113	350,595,000
வெள்ளை உருளை	புஷ.	1.288	333.4	429,419,200	.890	333.4	296,726,000
சர்க்கரை	பவு.	.038	6,590	250,420,000	.033	6,590	217,470,000
பார்லி	புஷ.	.544	280.6	152,646,400	.389	280.6	109,153,400
புகையிலை	பவு.	.183	1,533	280,539,000	.128	1,533	196,224,000
சணல்	புஷ.	2.843	15.9	45,203,700	1.398	15.9	22,228,200
ரை	புஷ.	.849	35.41	30,063,090	.384	35.41	13,597,440
அரிசி	புஷ.	.995	39.53	39,332,350	.773	39.53	30,556,690
				6,591,472,540			5,011,878,130

காண்டு மாற்றவேண்டியதாகும். இம்முறையில் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்களை அட்டவணை 13-15-ன் (3)ஆம் பத்தியில் காணலாம்.

ஒப்புமை விலைகளின் சராசரிகள் (Averages of Relative Prices)

லாஸ்பெய்ரே, மற்றும் பாஸ்ச்சே வாய்பாடுகள் இரண்டுமே, உண்மை விலைகளின் நிறையிட்ட மொத்தங்களாகும். நிறையாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டவை அளவைகளாகும் விலைகளை அளவைகளால் பெருக்குவதால் இரண்டு மதிப்பு மொத்தங்கள் (value aggregates) கிடைக்கின்றன ; இவைகளைக்கொண்டுதான் இந்த இரண்டு குறியீட்டெண்களையும் நிறுவுகிறோம். உண்மை விலைகளை விட்டுவிட்டு ஒப்புமை விலைகளைச் சராசரியாக்க வேண்டுமாயின், அப்பொழுது அளவைகள் நிறையாக முடியாது ; மதிப்புகளையே (values) நிறையாகக் கொண்டால்தான், நிகழும் பெருக்கல் பலன்களை ஒப்பிடமுடியும். மதிப்புகள் எல்லாவற்றிற்கும் பொதுவான டாலர்களில் உள்ளன ; பொருள்களின் அளவைகள் பற்பல அலகுகளிலிருக்கின்றன. எனவே, அலகற்ற ஒப்புமை விலைகளை மதிப்புகளால் பெருக்குவதே சரியாகும்.

நிறை சார்பைப்பற்றிய குறிப்பு: நாம் '1' காலத்திய விலைகளை '0' காலத்திய விலைகளுடன் ஒப்பிடுகின்றோம் என்று கொள்வோம். அப்பொழுது ஒவ்வோர் ஒப்புமைக்கும் $\frac{p_1}{p_0}$-ஐ p_0q_0 (அஃதாவது, அடிப்படை ஆண்டில் அந்தப் பொருளின் மதிப்பு) அல்லது p_1q_1 (அஃதாவது குறிப்பிட்ட ஆண்டில் அதே பொருளின் மதிப்பு) என்ற இரு மதிப்புகளில் ஏதாவதொன்றை நிறையாகக் கருதலாம். இவ்விரண்டு நிறைமுறைகளின் தன்மையை முதலில் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். ஃபிஷர் என்பவர், ஆழ்ந்த ஆராய்ச்சிக்குப் பிறகு பின்வருமாறு கருத்துத் தெரிவித்துள்ளார் (துணைநூல் பட்டியல் 46): அடிப்படை ஆண்டின் மதிப்புகளால் நிறையிடும்பொழுது குறியீட்டெண்ணின் சார்பு (bias) பொதுவாக மேல்நோக்கியும் (upwards), இரண்டாம் (அல்லது குறித்த) ஆண்டின் மதிப்புகளால் நிறையிடும்பொழுது அதன் சார்பு பொதுவாகக் கீழ்நோக்கியும் (downward) இருக்கும். இந்த விளைவுகள் நேர்ந்துதான் தீரும் என்று சொல்லமுடியாது ; என்றாலும், பொருள்களின் விலைகள், அளவைகளைப்பற்றிய அசைவுகளில் (movements) தோன்றும் முறைகளால் ஏற்படும் இயக்கங்கள் இவை. எனவே, பொதுவாக இவைகள் ஏற்படுவதைக் காணலாம்.[1]

[1] இஃது எப்படி என்கிற வாதத்தைச் சுருங்கக் கூறுவோம்: '0' ஆண்டிலிருந்து '1' ஆண்டுக்குப் பொருளின் A-ன் விலை ஏறினால், அதற்கான ஒப்புமை p'_1/p'_0 என்பது 100-க்கும் அதிகமாகும். B என்ற பொருளின் விலை, அதே

இதற்குப் பின்வரும் பல எடுத்துக்காட்டுகளில், நாம் அடிப்படை ஆண்டான 1929-ன் விளைச்சல் மதிப்புகளையே பயன்படுத்துவோம். கணக்கு முறைகளும் 1930ஆம் ஆண்டுக்குமட்டும் விளக்கப்பெறும். இந்த மதிப்புகளை அட்டவணை 13-13-ன் மூன்றும் பத்தியில் காணலாம்; நிறை அமைப்பிற்காக அவைகள் மில்லியன் டாலர் அளவுகளில் குறிக்கப்பெற்றுள்ளன.

கால இடைவெளியில் இறங்கினால்; அதன் ஒப்புமையான p''_1/p''_0 என்பது 100-க்குக் குறைவாகும். தற்சமயம், இரண்டு பொருளின் q-க்களும் மாறாமல் உள்ளன என்று எண்ணுவோம். (அஃதாவது, $q'_1=q'_0$, $q''_1=q''_0$) இப்பொழுது அடிப்படை ஆண்டின் நிறையான $p'_0q'_0$ என்பது, குறித்த ஆண்டின் நிறையான $p'_1q'_1$ என்பதைவிட (இங்கு நமது எண்ணத்தின்படி $p'_1q'_1=p'_1q'_0$) A பொருளுக்குக் குறைவாயிருக்கும். A பொருளின் ஒப்புமை அதிகமானது (100-ஐவிட); எனவே, இந்த நிலையில், இதற்குக் கொடுக்கப்படும் நிறையானது அடிப்படை ஆண்டில் குறைவாகும்; குறித்த ஆண்டில் அதிகமாகவும் அமைகிறது. B என்ற பொருளின் விலை குறைந்துள்ளது. எனவே, இதற்கான அடிப்படை ஆண்டின் நிறையானது ($p''_0q''_0$), குறித்த ஆண்டின் நிறையைவிட ($p''_1q''_1$; நமது எண்ணத்தின்படி இது $p''_1q''_0$-க்குச் சமம்) அதிகம் ஆனால், இந்தப் பொருளின் ஒப்புமை 100ஐவிடக் குறைவானது. இதற்கு அடிப்படையாண்டின் நிறை, குறித்த ஆண்டின் நிறையைவிட அதிகமாகிறது. எனவே, நாம் அடிப்படை ஆண்டின் மதிப்புகளை வைத்து நிறையாக்கினால், குறைந்த ஒப்புமைகளுக்கு அதிகமான நிறையையும், அதிகமான ஒப்புமைகளுக்குக் குறைவான நிறைகளையும் தருகிறது. (இங்கு 'அதிகமான' நிறையென்பது குறித்த ஆண்டு நிறையைவிட அதிகம் என்பதையும், 'குறைவான' நிறை என்பது குறித்த ஆண்டு நிறையைவிடக் குறைவு என்பதையும் காட்டுகிறது என்று எளிதில் அறியலாம்.) அஃதாவது, அடிப்படை ஆண்டு நிறைகளை அமைப்பதால், விலையேற்றங்களின் விளைவுகளைக் குறைபடுத்தியும், விலையிறக்கங்களின் விளைவுகளை மிகைபடுத்தியும் கூறுவதாகிறது. இவ்விரண்டு போக்குகளும் ஒரே வழியில் செல்பவை—அஃதாவது, குறித்த ஆண்டு நிறை அமைப்பதைவிடக் குறைவான குறியீட்டெண்களையே நிறுவும். இதேபோன்ற வாதத்தைப் பயன்படுத்துவதால், குறித்த ஆண்டு நிறைகள் விலையேற்றங்களை மிகைபடுத்தியும், விலையிறக்கங்களைக் குறைபடுத்தியும் காட்டும் என்று நிறுவலாம்—அஃதாவது, அடிப்படை ஆண்டு நிறைகளால் கிடைக்கும் குறியீட்டெண்களைக் காட்டிலும் இவ்வகைக் குறியீட்டெண்கள் பெரியவைகளாக அமையும்.

மேற்கூறிய வாதங்கள், '0' ஆண்டிலிருந்து '1' ஆண்டிற்கு, பருப்பொருள்களின் அளவைகள் மாறவில்லை என்ற அடிப்படைக் கருத்திற்கிணங்க அமைந்தவை. விலையசைவுகளுக்கு ஒத்தவாறே அளவையசைவுகளும் நிகழ்ந்திருப்பின், மேலே விளக்கப்பட்ட 'சார்பு'கள் இன்னும் அதிகமாகும். அப்படியில்லாமல், பொருள் அளவையசைவுகளும், விலையசைவுகளும் எதிர்எதிராக நிகழ்ந்திருப்பின் [அஃதாவது, குறித்த கால இடைவெளியில், ஒப்புமை விலைகளுக்கும், ஒப்புமை அளவைகளுக்கும் எதிரிடைத் தொடர்பு (negative correlation) இருப்பின்], விளக்கப்பட்ட 'சார்பு'கள் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்துவிடக்கூடும்; ஏன், சார்புகள் தலைகீழாகவும் மாறக்கூடும். எனவே, 'நிறைசார்பு' குறிப்பிட்ட குறியீட்டில் இடம்பெற்றுள்ள பொருள்களின் விலை, அளவைகளின் போக்குகளையொட்டியே அமையும். பொதுவாக, குறைந்த கால இடைவெளிகளில்—வியாபாரச் சுழற்சி இருக்கும் காலங்களில்கூட—விலை, அளவை போக்குகள் எதிரெதிராக நேருவதில்லை எனலாம். [அளிப்பு, தேவை வளைகோடுகளை வரையும்பொழுது நாம் போக்குகள் எதிரிடையாக உள்ளன என்று கருதுகிறோமல்லவா? அதுபோது நாம் கருதுவது—அசலன நிலையையேதான் (static condition) என்பதை நினைவுபடுத்திக்கொள்ள வேண்டும்.] கால இடைவெளி அதிகமானால், எதிரிடை அசைவுகள் நேரக்கூடும். 1939-47 ஆண்டுகளுக்கிடையே தொழிற் பொருள்களின் (industrial goods) விலையசைவுகளுக்கும், அளவையசைவுகளுக்குமிடையே எதிரிடைத் தொடர்பு இருந்ததைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர்.

கூட்டுச் சராசரிகள்: இந்த முறையில், ஒவ்வோர் ஒப்புமையையும், அதற்குத் தகுந்த நிறையுடன் பெருக்கி, அவைகளைப் பிறகு மொத்தமாக்குவோம். கடைசியாக அந்த மொத்தத்தை நிறைகளின் மொத்தத்தினால் வகுக்க, குறியீட்டெண் கிடைக்கும். விவரங்களை அட்டவணை 13-13-ல் காண்போம்.

அட்டவணை 13-13

ஒப்புமை விலைகளின், நிறையிட்ட, கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிடுதல்

பொருள் (1)	ஒப்புமை விலை 1929 (2)	நிறை (3)	ஒப்புமை விலை × நிறை (4)	ஒப்புமை விலை 1930 (5)	நிறை (6)	ஒப்புமை விலை × நிறை (7)
கூலம்	100	$1,947	$194,700	84.6	$1,947	$164,716.2
பருத்தி	100	1,163	116,300	57.9	1,163	67,337.7
வைக்கோல்	100	927	92,700	103.5	927	95,944.5
கோதுமை	100	853	85,300	58.0	853	49,474.0
ஓட்ஸ்	100	474	47,400	73.9	474	35,023.6
உருளைக் கிழங்கு	100	429	42,900	69.1	429	29,643.9
சர்க்கரை	100	250	25,000	86.8	250	21,700.0
பார்லி	100	153	15,300	71.5	153	10,939.5
புகையிலை	100	281	28,100	66.9	281	19,641.9
சணல்	100	45	4,500	49.2	45	2,214.0
ரை	100	30	3,000	45.2	30	1,356.0
அரிசி	100	39	3,900	77.7	39	3,030.3
		6,591	659,100		6,591	501,026.6

$$\text{நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (1929)} = \frac{\$659,100}{\$6,591} = 100$$

$$\text{நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (1930)} = \frac{\$501,026.6}{\$6,591} = 76.0$$

[1929ஆம் ஆண்டின் விளைச்சல் மதிப்புகளை (மில்லியன் டாலர்களில்) நிறைகளாகக் கருதியுள்ளோம்.]

1930ஆம் ஆண்டிற்கான குறியீட்டெண்ணின் மதிப்பு, அட்டவணை 13-12-ன் கணக்கு முறைகளால் கிடைத்த மதிப்பிற்குச் சமம் என்பதைக் கவனிக்கவும். அட்டவணை 13-12-ன் குறியீடு உண்மை விலைகளின் நிறையிட்ட மொத்தங்களைக்கொண்டு கணக்கிடப்பட்டது; அடிப்படை ஆண்டின் விளைச்சல் அளவைகளே அதற்கு நிறைகளாகும். ஆக, ஒப்புமை விலைகளுக்கு, அடிப்படை

ஆண்டு மதிப்புகளை நிறைகளாக்கி, அவைகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டால், அது மொத்தங்களைப் பயனுக்கிக் கணக்கிட்ட ஒப்புமைக்குச் சமமாகவே இருக்கும்.[2]

ஹார்மோனிக் சராசரிகள் : அட்டவணை 13-13-ன் (5)ஆம் பத்தியிலுள்ள ஒப்புமை விலைகளுக்கு, 1930ஆம் ஆண்டின் மதிப்புகளை நிறைகளாக்கி, 1929ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு, 1930ஆம் ஆண்டிற்கான ஹார்மோனிக் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம். இதுவும், பாஸ்ச்சே சூத்திரத்து விடைக்குச் சமமாகவிருப்பதைக் காணலாம்.[3] மற்ற ஆண்டுகளுக்கும் இதே முறையில் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட் டெண்களை, அட்டவணை 13-15-ன் (3)ஆம் பத்தியில் காண்கிறோம்.

பெருக்குச் சராசரிகள் : நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடும் முறை, கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவதுபோலவே உள்ளது. இங்கு ஒப்புமைகளின் லாகிருதங்களை நிறைகளுடன் பெருக்கி மொத்தமாக்கி, அதனை நிறைகளின் மொத்தத்தால் வகுக்க வேண்டும் ; வரும் முடிவு குறியீட்டெண்ணின் லாகிருதம் ஆகும். விவரங்கள் அட்டவணை 13-14-ல் உள்ளன.

எனவே, 1929ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்ட 1930ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண் 74.4. மற்ற ஆண்டுகளுக்கும் இதே முறையில் கணக்கிட்டுக் கிடைத்த முடிவுகளை அட்டவணை 13-15-ன் (5)ஆம் பத்தியில் தந்துள்ளோம் ; அங்கு மற்ற முறைகளில் கிடைத்த குறியீட்டெண்களும் இடம்பெற்றுள்ளன.

[2] இதனை இயற்கணித முறையில் எளிதில் காட்டலாம். அடிப்படை ஆண்டின் எந்த ஒரு பொருளின் மதிப்பும் p_0q_0 என்பதாகும்; இரண்டாம் ஆண்டின் ஒப்புமை விலை $\frac{p_1}{p_0}$ ஆகும். எனவே, இவைபோன்ற ஒப்புமை விலைகளின் நிறையிட்ட சராசரி

$$\frac{\left(\frac{p_1'}{p_0'}\times p_0'q_0'\right)+\left(\frac{p_1''}{p_0''}\times p_0''q_0''\right)+\left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\times p_0'''q_0'''\right)+\ldots}{p_0'q_0'+p_0''q_0''+p_0'''q_0'''+\ldots}$$

$= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$ என்பதாகும். இது முன்பு கூறப்பட்ட நிறையிட்ட மொத்த வகையைச் சேர்ந்தது.

[3] முந்திய அடிக்குறிப்பில் காட்டியுள்ள முறையை இங்கும் செயற்படுத்தினால், குறித்த ஆண்டு மதிப்புகளை நிறைகளாகக் கொண்ட, ஒப்புமை விலைகளின் ஹார்மோனிக் சராசரி, பாஸ்ச்சேயின் சூத்திரமான $\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}$ என்பதற்குச் சமம் என்பதை நிறுவலாம்.

அட்டவணை 13-14

1930ஆம் ஆண்டு ஒப்புமை விலைகளின் நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுதல்

(1929 = 100)

பொருள்	ஒப்புமை விலை 1930	ஒப்புமை விலையின் லாகிருதம்	நிறை	ஒப்புமை விலையின் லாகிருதம் × நிறை
கூலம் ...	84.6	1.92737	1,947	3752.58939
பருத்தி ...	57.9	1.76268	1,163	2049.99684
வைக்கோல் ...	103•5	2.01494	927	1867.84938
கோதுமை ...	58.0	1.76343	853	1504.20579
ஓட்ஸ் ...	73.9	1.86864	474	885.73536
உருளைக் கிழங்கு ...	69.1	1.83948	429	789.13692
சர்க்கரை ...	86.8	1.93852	250	484.63000
பார்லி ...	71.5	1.85431	153	283.70943
புகையிலை ...	69.9	1.84448	281	518.29888
சணல் ...	49.2	1.69197	45	76.13865
ரை ...	45.2	1.65514	30	49.65420
அரிசி ...	77.7	1.89042	39	73.72638
			6,591	12,335.67122

$$\text{Log } M_g = \frac{\Sigma\left[\left(\log \frac{p_1}{p_0}\right) \times p_0 q_0\right]}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$= \frac{12{,}335.67122}{6591} = 1.871593$$

$$\therefore \quad M_g = 74.4.$$

இம் மூன்று குறியீட்டெண்களை எப்படி ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பது ? முதற்கண் 'காலத்திருப்பச் சோதனை'யை—முன்பு ஐந்து குறியீடுகளுக்குச் செய்தது போல்—செய்து பார்க்கலாம். நாம் கணக்கிட்டுள்ள இம் மூன்று நிறை சராசரிகளுமே அச் சோதனையில் தேறுவதில்லை. பெருக்குச் சராசரியும், மற்றிரண்டும்போலவே அமைந்துள்ளது. சாதாரணப் பெருக்குச் சராசரி இச் சோதனைக்குகந்ததாயினும், நிறையிடுவதால் ஒருவகைச் சார்பு ஏற்படுகிறது. இந்த ஒரு சோதனையைமட்டும் வைத்துப் பார்த்தால், மூன்றும் திருப்திகரமாக இல்லை என்றே கூறவேண்டும். இரண்டாவதாக, 'காரணி திருப்பச் சோதனை' யென்ற பெயருள்ள, ஃபிஷரின் இரண்டாவது அடிப்படைச் சோதனையை விளக்கி அதனைப் பொருத்திப் பார்ப்போம்.

காரணி திருப்பச் சோதனை (The Factor Reversal Test)

பொருளின் ஓர் அலகிற்கான விலையை, அந்த ஆண்டில் உற்பத்தியான அளவையால் பெருக்கினால், அப்பொருளின் மொத்த மதிப்பு கிடைக்கும்; இதனை $p'q'$ என்ற கோவை அடையாளமிடும். ஓராண்டின் இந்த மதிப்பிற்கும், மற்றோர் ஆண்டின் இதே போன்ற மதிப்பிற்குமுள்ள விகிதம் $\frac{p_1'q_1'}{p_0'q_0'}$ ஆகும். இப்பொழுது, இரண்டாம் ஆண்டில் விலை, அளவை இரண்டுமே இரட்டித்தன எனக் கொள்வோம்; அப்பொழுது ஒப்புமை விலையும், ஒப்புமை அளவையும் 200 ஆகும்; மொத்த மதிப்பின் ஒப்புமை 400 ஆகும். அஃதாவது, இரண்டாம் ஆண்டின் மொத்த மதிப்பு முதலாண்டினதைப்போல் நாலு பங்கு ஆகும். எனவே, ஒப்புமை மதிப்பும் ஒப்புமை விலை, ஒப்புமை அளவை இரண்டின் பெருக்கல் பலனும் சமமாகும். ஒரே ஒரு பொருளைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் இச் சமன்பாடு நிகழ்வதை எளிதில் அறியலாம்.

பற்பல பொருள்களின் விலைகளை எடுத்துக்கொண்டால், அளவைகளையெல்லாம் ஒன்றுசேர்த்து, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, விலை மாற்றத்தை அளவிடும் விலைக் குறியீடு ஒன்றையும், அதே இரண்டு ஆண்டுகளில் அளவை மாற்றத்தை அளவிடும் அளவைக் குறியீடு ஒன்றையும் கணக்கிடுகிறோம்; அவை இரண்டின் பெருக்கல் பலனும், இரண்டு ஆண்டுகளின் மொத்த மதிப்புகளின் விகிதமும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும் என்பதே இச் சோதனையில் எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. அவ்வாறு சமமாக இல்லாவிட்டால், ஒன்றில் அல்லது இரு குறியீடுகளிலும் பிழை உள்ளது என்போம்.

லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாட்டின் அடிப்படையில் அமைந்த முதல் மொத்தக் குறியீட்டை இச் சோதனைக்குள்ளாக்குவோம். அதன் வாய்பாடு விலைக் குறியீட்டிற்கு $\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$. இதே முறையில் அளவைகளுக்கான குறியீட்டையும் கணக்கிடலாம். அதற்கு மேற்கண்ட கோவையில், p, q-க்களை மாற்றினால் போதும். அதற்கான வாய்பாடு :

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \qquad \textbf{(13·10)}$$

பகுதியிலும் (numerator), விகுதியிலும் (denominator) ஒரே விலைக் காரணி வருவதைக் காண்கிறோம்; இங்கு நாம் அளவிடுவது அளவைகளின் மாற்றமே ஆதலால், அதே விலைக் காரணி பகுதி, விகுதி இரண்டிலும் இடம்பெறும். 12 பண்ணைப் பயிர் விளைச்சலுக்கான விவரங்களைப் பொருத்தினால்,

$$Q_{01} = \frac{\$6,287,520,870}{\$6,591,472,540} = 0{\cdot}954$$

எனவே, 1929 ஆம் ஆண்டு அடிப்படையில், 1930ஆம் ஆண்டின் அளவைக் குறியீடு, சதவீத முறையில் 95·4 என்றுகிறது. இதே வாய்பாட்டிற்கான விலைக் குறியீடு 76·0 என்பதை முன்பே கண்டோம். எனவே,

$$P_{01} \times Q_{01} = 0{\cdot}760 \times 0{\cdot}954 = 0{\cdot}7250$$

(பெருக்கல் பலனைக் கணக்கிடும்பொழுது குறியீட்டெண்களை விகிதங்களாகவே பயன்படுத்த வேண்டும்; சதவீதங்களாக அல்ல.) அஃதாவது, விலைகள் 24 சதவீதமும், அளவைகள் 4·6 சதவீதமும் குறைந்திருந்தால், மொத்த மதிப்பு 27·5 சதவீதம் குறைந்திருக்க வேண்டும்.

மதிப்புகளுக்கான விகிதத்தை, 1929, 1930ஆம் ஆண்டு விவரங்களிலிருந்து அளவைகளையும், விலைகளையும் பெருக்கிக் கூட்டுவதால் நேராகவே கணக்கிடலாம். அது,

$$V_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\$\ 4,690,816,010}{\$\ 6,591,472,540} = 0{\cdot}7116$$

இந்தக் காரணி திருப்பச் சோதனையில் நிகழக்கூடிய பிழைக்கு, மட்ஜெட் (Mudgett, துணைநூல் பட்டியல் 113) என்பவர், கீழுள்ள வாய்பாட்டை நிறுவியுள்ளார் :

$$E_2 = \frac{P_{01} \cdot Q_{01}}{V_{01}} - 1 \qquad \textbf{(13·11)}$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் $E_2 = +0{\cdot}0188$ என்று வருகிறது. பிழை அளவு பெரிதாக இல்லாவிட்டாலும், வாய்பாடு சோதனைக்குட்படவில்லை என்று ஆகிறது.

இரண்டாவதான பாஸ்சேயின் மொத்தக் குறியீட்டெண்ணில் இதே கணக்குகளைச் செய்தால் :

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} = \frac{\$4,690,816,010}{\$6,287,520,870} = 0{\cdot}746$$

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} = \frac{\$4,690,816,010}{\$5,011,870,130} = 0{\cdot}936$$

$$P_{01} \times Q_{01} = 0{\cdot}746 \times 0{\cdot}936 = 0{\cdot}6983$$

V_{01}-ன் மதிப்பு இப்போதும் முன்னுள்ளதான 0.7116தான். எனவே, பாஸ்சேயின் வாய்பாட்டிற்கான பிழை —0.0187. இங்குப் பிழையின் அளவு முன்னுள்ளதற்கு மதிப்பு முறையில் சமமாக இருந்தாலும், இது — ஆக உள்ளது; முன்பு + ஆக இருந்தது.

நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணும் இச் சோதனைக்குட்படுவதில்லை என்பதைக் காணலாம். அஃதாவது, இந்த மூன்று குறியீடுகளிலும் நிறையிடு முறையைக் கையாண்டதால், மூன்றையும் சோதனைக்குட்படாதவாறு செய்தாற்போல் ஆகிறது. (நிறையிடாதபொழுது அவை சோதனைக்குட்பட்டதாகவே இருந்தன.) ஆனால், நிறையிடுவதும் மிக்க அவசியமே; அப்பொழுதுதான் உண்மை நிலைகளைக் குறியீடு காட்டமுடியும். எனவே, முதற்கண் கணக்கிட்ட எளிதான குறியீடுகளும், இப்பொழுது கணக்கிட்ட நிறையிட்ட குறியீடுகளும், அடிப்படை என்று கூறிய இந்த இரு சோதனைகளுக்கும் உட்பட்டனவாக இல்லை. ஃபிஷர் என்ற பேராசிரியர், 46 வாய்பாடுகளை இந்த இரு சோதனைகளுக்குள்ளாக்கினர். அவைகளில் நான்குமட்டுமே முதலாவதான காலத்திருப்பச் சோதனைக்குட்பட்டன. அவைகள் சாதாரணப் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீடு, இடைநிலை, முகடு, மற்றும் மொத்த வகை. இரண்டாவதான காரணி திருப்பச் சோதனை (இது நிறையிட்ட குறியீடுகளுக்குமட்டுமே பயன்படும்) இவைகளுக்குப் பொருத்தமானதாக இல்லை.

'விழுமிய' குறியீடு ('Ideal' Index)

இச் சிக்கலிலிருந்து தப்ப, பல வாய்பாடுகளைக் கலந்து, புதிய வாய்பாடுகளை அமைக்கலாம்; அப்பொழுது, எதிரிடையான சார்புகளைக்கொண்ட வாய்பாடுகளின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். இம்முறையில் கிடைக்கக்கூடிய எல்லா வாய்பாடுகளையும் பேராசிரியர் ஃபிஷர் அவர்கள் நன்கு ஆராய்ந்துள்ளார். முடிவாக, இரண்டு சோதனைகளுக்கும் உட்படுகிற 13 வாய்பாடுகளில் ஒன்றை 'விழுமிய'தாகத் தேர்ந்தெடுத்தார். இது திருத்தமானதும், கணக்கிட எளிதானதும் ஆகும். இது மேலே கூறப்பட்ட இரண்டு மொத்த வகைக் குறியீடுகளின் பெருக்குச் சராசரியாகும். அதன் வாய்பாடு[4]

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \qquad (13.12)$$

அல்லது லாஸ்பெய்ரே, பாஸ்ச்சேக்களின் வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினல்,

$$I_{01} = \sqrt{L \cdot P} \qquad (13.13)$$

[4] இதே வாய்பாட்டை, பௌலி (Bowley), பிகூ (Pigou), வால்ஷ் (Walsh) யங் (Young) என்பவர்களும் தனித்தனியே நிறுவினர்.

மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டில் முன்பே பெற்ற முடிவு களிலிருந்து, இந்தக் குறியீட்டெண்ணையும் எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம். 1930ஆம் ஆண்டின்

$$\text{விழுமிய குறியீட்டெண்} = \sqrt{0.760 \times 0.746} = 0.753$$

அல்லது, சதவீத முறைப்படி 75.3 என்பதாகும்.

இந்தக் குறியீடு, காலத்திருப்பச் சோதனைக்கும், காரணி திருப்பச் சோதனைக்கும் உட்பட்டதே. முதல் சோதனைக்கான விழுமிய குடுயீடுகள் 1929ஆம் ஆண்டை '0' என்றும், 1930ஆம் ஆண்டை '1' என்றும் குறித்தால்,

$$P_{01} = 75.3$$
$$P_{10} = 132.8$$

எனவே, $E_1 = (0.753 \times 1.328) - 1 = 0$

இரண்டாம் சோதனைக்காக, நாம் விழுமிய அளவு குறியீட்டெண்ணையும் கணக்கிடவேண்டும். அது

$Q_{01} = 94.5$ என்று வரும்.

இவைகளுடன், முன்பே கண்டுபிடித்த V_{01}ஐயும் பயன் படுத்தினால்,

$$E_2 = \frac{(0.753 \times 0.945)}{0.7116} - 1 = 0$$ என்று வரும்.

எதிரெதிராக அமைந்த இரு சார்புகளைக் கலந்துவிடுவது, இந்த விழுமிய குறியீட்டின் தனிச் சிறப்பாகும். அடிப்படை ஆண்டின் நிறைகளைக்கொண்ட, ஒப்புமைகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கு (கணக்கு வழியில் இது லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடாகும்) மேல் நோக்கிய வகைச் சார்பும் (type bias), கீழ்நோக்கிய நிறைச் சார்பும் (weight bias) உள்ளன. குறித்த ஆண்டு நிறைகளைக் கொண்ட ஹார்மோனிக் சராசரிக்குக் (கணக்கு வழியில் இது பாஸ்ச்சேயின் வாய்பாடு) கீழ்நோக்கிய வகைச் சார்பும், மேல் நோக்கிய நிறைச் சார்பும் உள்ளன. இவ்வகையான எதிரெதிர் சார்புகளுள்ள இரு வாய்பாடுகளும், பெருக்கு வழியில் (geometrically) கலப்பாகி யுள்ளன — அஃதாவது சராசரியாகி யுள்ளன. இச் சராசரி முறைக்கு ஒரு சார்பும் இல்லை. எனவே, முடிவில், காலத்திருப்பச் சோதனையினாலும், காரணி திருப்பச் சோதனையினாலும் நிகழ்ந்த சார்புகள் எல்லாம் நீக்கப்பெற்று விட்டன.

நிறையிட்ட குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடுதல்

1929-1945ஆம் ஆண்டுகளுக்கான நான்கு குறியீட்டெண்களை— விழுமியது, அதிலிடம்பெறும் இரண்டு நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீடுகள், அடிப்படை மதிப்புகளால் நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரிக் குறியீடுகள் என்பவைகளை—அட்டவணை 13-15-ல்

பார்க்கலாம். அவைகள் படமாகவும்—படம் 13.4-ல்—குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

சாதாரண அல்லது எளிதான குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடும்பொழுது காணப்படும் மிகுதியான வித்தியாசங்கள் நிறையிட்ட குறியீடுகளில் தோன்றுவதில்லை. இதில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசங்கள் இருக்கத்தான் செய்கின்றன என்றாலும், முன்பு இருந்ததைப்போன்ற விசித்திரப் போக்கு இப்பொழுது காணப்படவில்லை.

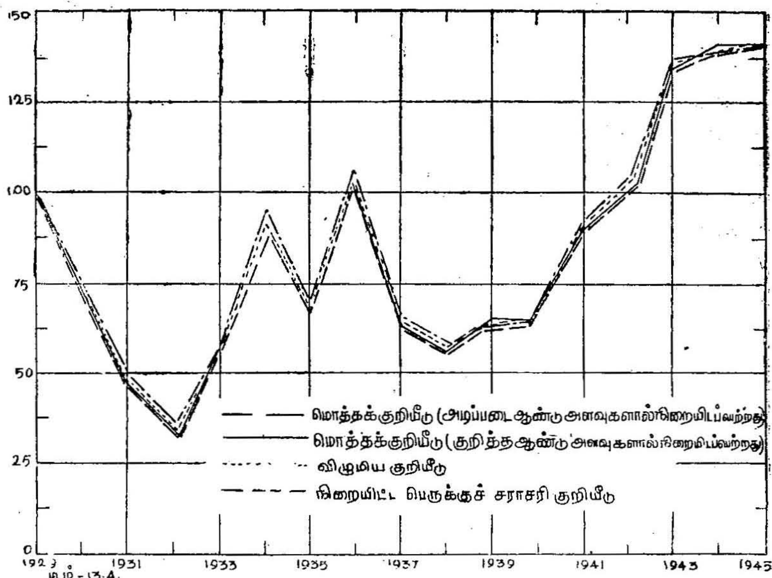
அட்டவணை 13-15

பண்ணைப் பயிர் விலைகளின் நிறையிட்ட குறியிட்டெண்களை ஒப்பிடுதல் (1929 — 1945)

ஆண்டு (1)	மொத்தக் குறியீடு (அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகளால் நிறையிடப் பெற்றது) $\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ (2)	மொத்தக் குறியீடு (குறித்த ஆண்டின் அளவுகளால் நிறையிடப் பெற்றது) $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ (3)	விழுமிய குறியீடு (2), (3)ஆம் பத்தியிலுள்ளவற்றின் பெருக்குச் சராசரி (4)	ஒப்புமைகளின் நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி (அடிப்படை ஆண்டின் மதிப்புகளால் நிறையிடப் பெற்றது) (5)
1929	100 0	100.0	100.0	100.0
1930	76.0	74.6	75.3	74.4
1931	49.5	48.3	48.9	47.7
1932	35.9	34.9	35.4	34.0
1933	60.7	60.0	60.3	60.1
1934	94.7	90.3	92.5	91.1
1935	70.0	68.9	69.4	69.1
1936	103.0	100.3	101.6	100.9
1937	66.4	65.3	65.8	64.6
1938	56.5	56.1	56.3	55.5
1939	65.5	65.8	65.6	64.9
1940	66.4	66.3	66 3	65.5
1941	89.7	88.6	89.1	88.4
1942	105.7	104.0	104.8	103.7
1943	136.5	135.8	136.1	134.1
1944	138.2	139.1	138.6	136.6
1945	142.3	143.3	142.8	140.2

இங்குக் காணப்படும் நாலு வகைகளில், விழுமிய குறியீடு, 1929ஆம் ஆண்டு விலைக்கும், ஏனைய ஆண்டு விலைகளுக்குமுள்ள மாற்றங்களை நன்கு அளவிடுவதாக அமைந்துள்ளது எனலாம். குறிப்பிட்ட இரண்டு காலங்களிடையே நேர்ந்துள்ள விலை மாற்றத்தை அளவிடவே அஃது அமைக்கப்பட்டுள்ளது; பல ஆண்டுகளுக்கிடையே உள்ளவைகளை அளக்க அன்று என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

1945ஆம் ஆண்டின் குறியீடு 1929-1945ஆம் ஆண்டுகளிடையே நிகழ்ந்துள்ள விலை, அளவுகளின் மாற்றங்களையே அளவிடும். இதில் இருவகை நிறையிடுதல்கள் உள்ளன ; ஆண்டுக்கு ஆண்டு நிறை



நான்கு நிறையிட்ட குறியீட்டெண்களை ஒப்பிடுதல்; 1929–45ஆம் ஆண்டுகளின் பண்ணைப் பயிர் விலைகளுக்கானவை (1929 = 100).

களும் மாறுகின்றன. இப்பொழுது 1939ஆம் ஆண்டை 1945ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடவேண்டுமென்றால், புதியதான ஒரு குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடவேண்டும் ; ஏனென்றால், அதில் 1939, 1945 ஆண்டுகளிலுள்ள விலை முதலியனவே இடம்பெறும். எனவே, 13-15ஆம் அட்டவணையிலுள்ள விழுமிய குறியீட்டெண்களை நேராக ஒப்பிடுதல் தவறாகலாம்.

வட்டச் சோதனை : கடைசியாகக் கூறிய குறிப்பிற்குச் சிறிது விளக்கம் தேவை. சில சமயங்களில், இருபடி ஒப்பிடுதல் (binary comparison) மட்டும் செய்யாமல், பல ஆண்டுகளிடையே நிகழும் விலை மாற்றங்களின் அளவைகளையும் அறியவேண்டியதாயிருக்கலாம். அப்பொழுது ‘ அடிப்படைப் பிறழ்ச்சி ’ (base-shifting) செய்ய நேரலாம் ; அஃதாவது, அடிப்படை ஆண்டை மாற்றலாம். எனவே, மேற்கண்ட 13-15ஆம் அட்டவணையிலுள்ள எந்தவொரு குறியீட்டெண்ணிற்கும் அடிப்படையை, 1929ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1939ஆம் ஆண்டுக்கு மாற்றலாம் அல்லது பிறழ்ச்சி செய்யலாம். பல நோக்கங்களுக்கு,

சிறப்பாக யுத்த காலங்களில் ஒப்பிடுதல்களுக்கு 1939ஆம் ஆண்டு 1929ஐவிடச் சிறப்பான அடிப்படையாக அமையும். அப்பொழுது எழும் பிரச்சினை என்னவென்பதைக் கவனிப்போம். 1929ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1939ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படையை மாற்றி, பிறகு 1945ஆம் ஆண்டுக்கான குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுவோம். முதலிலேயே 1939ஆம் ஆண்டையே அடிப்படையாகக் கொண்டு நேராக 1945ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணை, அதே வாய்பாட்டைக் கொண்டு கணக்கிட்டிருந்தோம் என்போம். இவ்விரண்டு முறைகளும் ஒரே விடையைத் தருமா என்பதே பிரச்சினை. இதற்கான—அடிப்படைப் பிறழ்ச்சிக்கான—சோதனைக்கு 'வட்டச் சோதனை' என்று பெயரிட்டுள்ளனர். இதனை விளக்க P_{12} என்ற அடையாளத்தை விலைக் குறியீட்டிற்குப் ('1' ஆண்டு அடிப்படையில் '2' ஆண்டுக்கானது) பயன்படுத்துவோம். P'_{12} என்பது 'அடிப்படை பிறழ்ச்சி'யால் கிடைக்கும் குறியீட்டைக் காண்பித்தால், பிறழ்ச்சிக்கான வாய்பாடு

$$P'_{12}=\frac{P_{02}}{P_{01}} \tag{13.14}$$

(இங்கு முதற்கண் அடிப்படையான ஆண்டு '0' என்பது.) வட்டச் சோதனை—இது காலத்திருப்பச் சோதனையின் மற்றொரு தோற்றம்—சரியாக வேண்டுமென்றால், $P'_{12}=P_{12}$ என்று அமைதல் வேண்டும்.

விழுமிய குறியீடோ, மாறக்கூடிய நிறைகளைக்கொண்ட எந்தக் குறியீடோ இச் சோதனைக்கு உட்படாது. மாறாத நிறைகளையுடைய மொத்தக் குறியீடும், மாறாத நிறைகளையுடைய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீடுமே இந்தச் சோதனைக்குட்பட்டவை. எனவே, அடிப்படைப் பிறழ்ச்சி செய்து 1939ஆம் ஆண்டு அடிப்படையில் 1945ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட்டால் (அட்டவணை 13-15-ன் விவரங்களிலிருந்து—140.2/64.9) 216.0 என்று வருகிறது. 1939ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாக வைத்து, 1929ஆம் ஆண்டின் நிறைகளைப் பயன்படுத்தி, பெருக்குச் சராசரி முறையில் 1945ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட்டாலும் இதே விடைதான் வரும். (நிறைகளை 1929ஆம் ஆண்டிலிருந்துதான்—முதல் அடிப்படை ஆண்டு—எடுக்கவேண்டுமென்ற விதி இல்லை. மாறாத நிறைகளையே P', P இரண்டிற்கும் பயன்படுத்திப் பெருக்கு வழியில் ஒப்புமை விலைகளைச் சராசரியாக்கினால், வட்டச் சோதனை சரியாக அமைந்துவிடும்.)

சுருக்கமும், ஏனைய வாய்பாடுகளும் (Summary : alternative formulas) : மேலே கூறப்பட்ட சோதனைகளின் முடிவுகளை நோக்கிய பின்பு, வாய்பாட்டைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். விவரங்களில்

எவை கிடைக்கும், எவை கிடைக்காதவை என்பதனையொட்டியும், எதற்காகக் குறியீட்டு எண்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும் என்ற நோக்கத்தையொட்டியும் வாய்பாடு மாறும். இருபடி (binary) ஒப்பிடுதல்—குறித்த இரு காலங்களிடையேமட்டும் ஒப்பிடுதல் என்பது ஒரு பிரச்சினை; பலபடி ஒப்பிடுவதற்கான—மாதாந்தர அல்லது வருடாந்தரவாரியாகக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுதல் மற்றொரு பிரச்சினை.

இரண்டே காலங்களிடை ஒப்பிடுதல்மட்டும் தேவையாயின், விழுமிய குறியீடுதான் காலச் சிறந்ததாகும். பொருளாதார மாற்றங்களை நன்கு அளவிடுவதற்கு, மிகத் தோராயமாக அமைவது இஃது ஒன்றுதான். இது காரணி திருப்பச் சோதனைக்கு உகந்ததாகவும் உள்ளது—எனவே, முரண்பாடற்ற அளவு, விலைக் குறியீடுகளை அளிக்கும் தனிச் சிறப்பும் பெற்றது. இந்த நோக்கத்தையே மட்ஜெட் (Mudgett) என்பவர் தம் நூலில் (துணைநூல் பட்டியல் 113) மிக முக்கியமானதென்று கூறியுள்ளார். விழுமிய குறியீட்டைச் சற்றே மாற்றியமைத்தால், மார்ஷல், மற்றும் எட்ஜ்வர்த் (Marshall and Edgeworth) என்பவர்களால் நிறுவப்பெற்ற வாய்பாடு கிடைக்கும். இதை

$$\frac{\Sigma(q_0+q_1)p_1}{\Sigma(q_0+q_1)p_0} \qquad (13\cdot15)$$

என்ற வாய்பாட்டால் குறிப்பிடலாம்; இதனை எட்ஜ்வர்த் வாய்பாடு என்றும் கூறுவர். இஃது ஒரு சாதாரண மொத்தக் குறியீடுதான்—அடிப்படை ஆண்டு, குறித்த ஆண்டு இரண்டின் அளவுகளின் மொத்தங்களை நிறையாகக் கொண்டது. எனவே, இரண்டு காலங்களிலுமுள்ள சூழ்நிலையைக் கருதுவதாக அமைகிறது. மற்றும், இதனை எளிதாகவும் விரைவிலும் கணக்கிட முடியும்; விழுமிய குறியீட்டெண்ணிற்கு மிகத் தோராயமான முடிவுகளையே இந்த வாய்பாடும் தரும். கணக்கிடு முறைகளை அட்டவணை 13, 16-ல் காணலாம். இங்கு விளக்கப்பட்ட பகுதிகளில் இருபடி ஒப்பிடுதலுக்கு ஒத்தவை, லாஸ்பெய்ரே, மற்றும் பாஸ்சேயின் வாய்பாடுகளாகும். இவைகளில் பயன்படுவது ஒரே ஒரு நிலையின் நிறைகள்தாம். அவைகளை அடிப்படை ஆண்டிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவேண்டுமா (லாஸ்பெய்ரே), அல்லது குறித்த ஆண்டிலிருந்து எடுக்கவேண்டுமா (பாஸ்ச்சே) என்ற முடிவு குறியீட்டெண்களின் பயனைப் பொறுத்திருக்கும்.

மொத்த விற்பனை விலைகளில் ஏற்படும் காலவாரியான மாற்றங்களை அளவிடுவதாக, பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labour Statistics) என்ற நிறுவனத்தார் வெளி

அட்டவணை 13–16

மொத்தக் குறியீட்டெண் கணக்கிடுதல், இரண்டு ஆண்டு நிறைகளையும் கொண்டது

பொருள் (1)	அலகு (2)	விலை 1929 (3)	அளவு 1929 + அளவு 1930 (மில்லியன்) (4)	விலை 1929 × மொத்த அளவுகள் பத்தி (3) × பத்தி (4) (5)	விலை 1930 (6)	விலை 1930 × மொத்த அளவுகள் பத்தி (6) × பத்தி (4) (7)
கூலம்	புஷ.	$ .774	4,596	$ 3,557,304,000	$ .655	$ 3,010,380,000
பருத்தி	பவு.	.164	13,747	2,254,508,000	·096	1,305,965,000
வைக்கோல்	சின்ன டன்.	12.19	139.73	1,703,308,700	12.62	1,763,392,600
கோதுமை	புஷ.	1.035	1,710.7	1,770,574,500	.600	1,026,420,000
ஓட்ஸ்	புஷ.	.426	2,388	1,017,288,000	.315	752,220,000
வெள்ளை உருளைக் கிழங்கு	புஷ.	1.288	677.2	872,233,600	.890	602,708,000
சர்க்கரை	பவு.	.038	13,028	495,064,000	.033	429,924,000
பார்லி	புஷ.	.544	582.2	316,716,800	.389	226,475,800
புகையிலை	பவு.	.183	3,181	582,123,000	.128	407,168,000
சணல்	புஷ.	2.843	37.6	106,896,800	1.398	52.564,800
ரை	புஷ.	·849	80.79	68,590,710	.384	31,023,360
அரிசி	புஷ.	·995	84.46	84,037,700	.773	65,287,580
				$ 12,828,645,810		$ 9,673,529,140

$$\frac{\Sigma(q_0 + q_1)p_1}{\Sigma(q_0 + q_1)p_0} = \frac{\$\ 9,673,529,140}{\$12,828,645,810}$$

= 75·4 [சதவீத அளவில் 1927-ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்ட 1930-ஆம் ஆண்டின் குறியீடு].

யிடும் தொடர்ச்சியான குறியீட்டு எண்கள் அமைந்துள்ளன. இவை போன்ற தொடர்ச்சியான குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதற்குகந்த வாய்பாடுகள் குறைவுதான். பாஸ்ச்சே, விழுமியது, மார்ஷல்-எட்ஜ்வர்த் இம் மூன்று வாய்பாடுகளும் இப்பொழுது பயன்படா: ஏனென்றால், அவைகள் 'குறித்த ஆண்டு' அளவுகளைப் பயன்படுத்துகின்றன; ஆனால், இவ்வளவைகள் கிடைக்காதவை. எனவே, இந்நிலையில் பயன்படக்கூடியது அடிப்படை ஆண்டு அளவைகளைக் கொண்ட லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடு ஒன்றேதான். அல்லது, ஏதாவதோர் ஆண்டிலிருந்தோ அல்லது வேறு கால இடைவெளியிலிருந்தோ மாறாத நிறைகளைத் திரட்டி, அவற்றைப் பயன்படுத்தி, இந்த வாய்பாட்டைச் சிறிது மாற்றி, கீழ்க்கண்டவாறு நிறுவலாம்:

$$\frac{\Sigma p_1 q_a}{\Sigma p_0 q_a} \qquad (13.16)$$

இங்கு 'q_a' என்பது 'தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கால'த்திற்கான அளவுகள்; இந்தக் காலம் அடிப்படைக் காலம் அன்று. பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தார் வெளியிடும் குறியீடுகளுக்கு அடிப்படை 1947, 1948, 1949 ஆகிய மூன்று ஆண்டுகளின் சராசரி; அவர்கள் பயன்படுத்தும் நிறைகள் 1947ஆம் ஆண்டின் அளவுகள்மட்டுமே. தொடர்ச்சியான குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட மேலே குறிப்பிட்டுள்ள நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண் வகை மிகவும் பயன்படுகிறது.

தொடர்ச்சியான குறியீடுகளுக்கான மூன்றுவதும், திருப்திகரமானதுமான குறியீடு ஒன்று உள்ளது. மாறாத மதிப்புகளை (இவைகளை அடிப்படை ஆண்டிலிருந்து, அல்லது வேறு தகுந்த கால இடைவெளியிலிருந்து எடுத்துக்கொள்ளலாம்) நிறைகளாகக் கொண்ட ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட்டால், இந்தக் குறியீடு கிடைக்கும். இதுபோன்ற நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியின் லாகிருதத்திற்கு வாய்பாடு:

$$\text{Log } M_g = \frac{\Sigma(\log p_1/p_0)\ p_a q_a}{\Sigma p_a q_a} \qquad (13.17)$$

இங்கு p_a, q_a என்பவை, எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட ஆண்டில் அல்லது காலவெளியில் பொருள்களின் விலைகளையும் அளவுகளையும் குறிக்கும். அவைகள் ஆண்டுக்காண்டு மாறாதவைகளாக இருக்கவேண்டும். விகிதங்களை அல்லது ஒப்புமை விலைகளைக் கூட்டாக்கும்பொழுது, பெருக்குச் சராசரியே மிகப் பொருத்தமானது. மாறாத நிறைகளையுடையதால், இஃது எளிதில் கையாளத்

தக்க (flexible) ஓரளவையாகும்; மற்றும், இது வட்டச் சோதனைக் குட்படுவதால், அடிப்படைக் காலத்தை நமது விருப்பம்போல் மாற்றிக்கொள்ளலாம். ஆனால், இது காலத்திருப்பச் சோதனைக்கும், காரணி திருப்பச் சோதனைக்கும் இசைந்ததன்று. மாதிரிப் பிழைகளைக் (sampling errors) கருதுவோமானால், பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்—பாஸ்ச்சே, லாஸ்பெய்ரே, அல்லது விழுமிய குறியீட்டெண்களைக் காட்டிலும் நிலையானது (stable) என்று கூற வேண்டும். ஆனால், சாதாரணமாகக் குறிக்கப்பட்ட விலைகளும் அளவைகளும் (price and quantity quotations) என்றுமே 'யூக அளவை மாதிரிகளாக' (probability samples)[4] அமைவதில்லை; எனவே, மாதிரிப் பிழையை அவ்வளவு முக்கியமானதென்று கூற முடியாது.

'சூழ்நிலை' மாற்றங்களும், நிலைமட்ட ஒப்பிடுதல்களும் (Changes in Regimen and the Comparison of Price Levels)

விலை ஒப்பிடுதல்களுக்கான கால இடைவெளி அதிகமானால், ஒப்புமை விலைகளின் அலைவெண் பரவல்களின் சிதறலளவைகளும் அதிகமாகும் என்ற பொதுவான விதியினை இந்த அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலேயே கண்டோம். (குறுகிய காலத்திலும், யுத்தம் முதலானவைபோன்ற காரணங்களால், பெருவாரியான பொருளாதார மாற்றங்கள் எழக்கூடும்.) எனவே, குறுகிய கால அளவிற்கு நன்கு கணக்கிடப்பட்ட விலைக் குறியீடுகளின் திருத்தம் அதிகம் என்று கொள்ளுதல் புள்ளியியல் முறையில் சரியானதே. கால இடைவெளி அதிகமானால், திருத்த அளவையும் குறைந்துவரும் எனக் கொள்ளலாம். இதனைப்பற்றி இப்பொழுது சற்று விரிவாக ஆராய்வோம்.

லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடான

$$L = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

என்பதில், பகுதியிலும் விகுதியிலும் மாறுவது விலைக் காரணிகள் மட்டுமே; அளவு-காரணிகளான q_0-க்கள் மாறுது உள்ளன. அஃதாவது, துய்ப்புப் பழக்கங்கள் (consumption habits), 'வாழ்க்கைத் தரங்கள் (living standards), உற்பத்திக் கெழுக்கள் (production coefficients), வருமானப் பரவல் (income distribution), மற்றும் பொருளாதாரத்தின் மற்ற விலைத் தொடர்பில்லாப் பண்புகள் இவை

[4] 19ஆம் அதிகாரத்தைப் பார்க்க.

யெல்லாம் மாறுமல் இருந்தன என்று கருதப்படுகிறது. இரண்டு காலங்களுக்கும் பொதுவானதாகக் கருதப்படும் இந்த இயக்கங்களின் சூழலை (enviornment) ஸர் ஜார்ஜ் நீப்ஸ் (Sir George Knibbs) என்பவர் 'ரெஜிமென்' (regimen) என்ற சொல்லால் குறிப்பிட்டுள்ளார். (நாம் இங்குச் 'சூழ்நிலை' என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துவோம்.) நாம் பயன்படுத்தும் அளவுகள் வியாபாரமாகும் அளவுகளே என்றலும், அவைகள் மிகப் பரந்த கருத்துகளும் கொண்டவை. குறித்த கால அளவில், விலைத் தொடர்பில்லா எல்லாப் பொருளாதாரப் பண்புகளையும் நேரிடையாகவோ அல்லது மறைமுகமாகவோ அவைகள் குறிக்கின்றன என்பதே நம் எண்ணம். இவையெல்லாம் இரண்டு காலங்களிலும் மாறுமல் இருக்குமாயின், மாறும் தன்மையுடைய காரணியான விலையின் மாற்றத்தைமட்டும் திருத்தமாக அளவிடலாம். ஆராய்ச்சிக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காரணியைத் தவிர மற்றவைகள் மாறுமல் உள்ளன என்ற பொதுவான விதியையே நாம் இங்குக் கருதுகோளாக அமைக்கிறேம். இந்தக் கருதுகோள் பழக்கத்திலுள்ள ஒன்றுதான்.

ஆனல், உண்மையில் 'சூழ்நிலை' மாறுமல் இருப்பதில்லை. மனிதர்களின் 'சுவைகளும்' (tastes), துய்ப்புப் பழக்கங்களும் மாறுகின்றன; வருமான அளவைகள் மாறுகின்றன; துய்ப்போர்களின் வாங்குந் திறனின் மாறுதல்களுக்கேற்பப் பொருள்களின் ஓட்டமும் (flow) மாறும்; நாம் அளவிடப்போகும் விலை மாற்றங்களே பல பொருள்களின் தேவைகளை வேறுபடுத்தி, அவைகளின் தயாரிப்பு அளவுகளையும் பாதிக்கும். வியாபாரப் பெயர் (trade name) மாருதிருந்தும், பொருளின் 'தரத்தில்' (quality) ஏற்பட்டுக் கொண்டே வரும் மாறுதல்களும் குறிப்பிடத்தக்கவையாகும். 1955ஆம் ஆண்டில் தயாரான மோட்டார் வண்டியும், 1910ஆம் ஆண்டில் தயாரான வண்டியும் பெயரளவில் ஒன்றுதான்; ஆனல், துய்ப்பவர்களுக்கு இரண்டும் வெவ்வேறு வகைப் பயன்களை (utilities) உடையனவாகத் தோன்றுகின்றன. இதேபோன்ற முக்கியமான தரமாற்றங்கள் பல பொருள்களிலும்—எஃகு, சவுளிகள், ரயில் எஞ்சின்கள், சாப்பாட்டுப் பொருள்கள்—நிகழ்ந்துள்ளன என்பது கவனிக்கத்தக்கது. எனவே, நாம் 1910-1955-க்கிடையில் விலைகளைத் தவிர மற்ற எல்லாம் மாறுமல் இருந்தன என்று எண்ணி, விலை மட்டங்களை ஒப்பிடுகிறேம்; இஃது ஐயத்திற்கிடமானதே ஆகும்.

அடிப்படை ஆண்டை எடுத்துக்கொள்ளாமல், குறித்த ஆண்டின் 'சூழ்நிலை'யை 'மட்டும் எடுத்துக்கொள்வதால், நம் இன்னல்கள் தீர்ந்துவிடுவதில்லை. இது பாஸ்ச்சேயின் வாய்பாட்டில் நிகழ்கிறது.

$$P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$$

இங்குக் கருதப்படும் அளவு விவரங்களும், அவைகளால் குறிப்பிடப்படும் ஏனைய துய்ப்புத் தரங்களும் புதுமை மிளிர்வனவாகப் படலாம்; ஆனால், ஒப்பிடக்கூடிய இரு 'சூழ்நிலை'களிடையே உள்ள வித்தியாசம் முன்போலவே அதிகமாக இருக்கும். நாம் இப்பொழுதும் விலைத் தொடர்பில்லாத மற்றக் காரணிகளை மாறாதவாறு வைக்க வில்லையாதலால், விலைமாற்ற ஒப்பிடுதல் திருத்தமாக அமையாது.

இரண்டு காலங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்ட அளவு நிறைகளைப் பயன்படுத்தி, விழுமிய குறியீட்டெண் ஓரளவிற்கு இந்தப் பிரச்சினையைத் தீர்க்கிறது. என்றாலும், இது மிகச் சிறந்த முறை என்று கூறுவதற்கில்லை. இரு 'சூழ்நிலை'களும் ஒரே வகையானவையாக இருக்கவேண்டியதே, ஒப்பிடுவதற்கான அடிப்படை விதி; இரு காலங்களிலுள்ள நிறைகளையும் கணக்கிடுவதால்மட்டும் ஒரேவகைச் 'சூழ்நிலை' ஏற்பட்டுவிடாது.

எனவே, நடைமுறையில் ஒப்பிடுதல்கள் திருத்தமாக அமைய வேண்டுமாயின், ஒப்பிடும் காலங்களை மிக மாற்றம் இல்லாத 'சூழ்நிலை'யுள்ளவைகளாகக் கொள்வதே நல்ல முறையாகும்; பொதுவாக, கால இடைவெளி குறுகியதாயின், 'சூழ்நிலை' மாற்றமும் அதிகமிருக்காது. குறுகிய கால இடைவெளியில் துய்ப்புப் பழக்கங்கள், வாழ்க்கைத் தரங்கள், தொழில்நுட்ப முறைகள் முதலியவற்றில் மிகையான மாறுதல்கள் ஏற்பட்டிரா; எனவே, இருகாலங்களிடையேயும், ஒரே வகையான பொருள்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும். இந்நிலையில், பொருள்களின் விலைகளில் ஏற்படும் பொதுவான மாற்றங்களை அளவிடுவனவான குறியீடுகளில் நம்பிக்கை அளவும் (confidence) அதிகமாயிருக்கலாம். கால இடைவெளி அதிகமானால் நம்பிக்கை அளவும் குறைந்துபோகும். பொருளாதார வாழ்க்கை முறைகளில் ஏற்படும் அடிப்படை மாறுதல்களின் இயக்கங்களை, வாய்பாடுகளை மாற்றுவதாலோ, நிறையிடும் முறைகளை மாற்றுவதாலோ தவிர்க்க முடியாது. அடிப்படைச் 'சூழ்நிலை' மாறாதிருந்தால்தான், தொடர்ச்சியான குறியீடுகளை நீண்ட காலத்திற்குப் பயன்படுத்த முடியும்.

யுத்தத்திலிருந்து சமாதானத்திற்கோ, சமாதானத்திலிருந்து யுத்தத்திற்கோ நிலைமாறும்பொழுதும், குறுகிய கால இடைவெளியாயிருந்தாலும் மிகையான 'சூழ்நிலை' மாற்றங்கள் நிகழக்கூடும். எனவே, அக்கால இடைவெளிகளில் விலை மாற்றங்களை அளவிடுவதும் கடினமானதே. முடிவாக, நெடுங்காலங்களுக்கிடையே விலை மட்டங்களை ஒப்பிடுதலில் நாம் எவ்வளவு கவனமாக இருக்க

வேண்டுமோ, அதே அளவில் யுத்த கால—சமாதான கால விலை மட்டங்களை மதிப்பிடும்பொழுதும் கவனம் செலுத்தவேண்டும் எனலாம்.

இரண்டு குறிப்பிட்ட காலங்களிடையே உள்ள 'சூழ்நிலை' வித்தியாசங்களே (regimen differences) நமக்குத் தேவை. இதன் அளவை மதிப்பிட மட்ஜெட் (Mudgett) என்பவர் D என்ற அடையாளக் குறியைப் பயன்படுத்துகிறார்.

$$D = L - P \qquad (13\ 18)$$

அஃதாவது, D என்பது லாஸ்பெயிரே, மற்றும் பாஸ்ச்சேயின் குறியீடுகளின் வித்தியாசம் q_0 என்பதனால் குறிப்பிடப்படும் 'சூழ்நிலை'க்கும், q_1ஆல் குறிப்பிடப்படும் 'சூழ்நிலை'க்கும் அதிக வித்தியாசமில்லாதிருப்பின், இரு குறியீடுகளும் மதிப்பில் மிகவும் ஒத்திருக்கும்; மிக்க வித்தியாசமுள்ள 'சூழ்நிலை'களாயின், இரண்டும் வெவ்வேருகவே அமையும். இவை எவ்வளவு 'ஒத்து' இருக்கவேண்டுமென்பதற்கு முழுமையான அளவை ஏதுமில்லை. ஆனால், குறித்த ஒரு நிலையில் D-ன் மதிப்பைக்கொண்டு, தேவைப்பட்ட சரிநுட்பத்திற அளவையும் (degree of precision) கருதி, ஒரு முடிவுக்கு வருவது சாத்தியமே. 1945ஆம் ஆண்டுக்கான (1929ஆம் ஆண்டு அடிப்படை) லாஸ்பெய்ரே, பாஸ்ச்சே குறியீடுகளை, அட்டவணை 13—15-லிருந்து பயன்படுத்த,

$$D = 142{\cdot}3 - 143{\cdot}3 = -1{\cdot}0$$

என்று வருகிறது. எனவே, வித்தியாசம் 1 சதவீதத்திற்கும் குறைவுதான். பொதுவாக, 1 சதவீத வித்தியாசம் நிகழக்கூடியது தான் என்று கருதினேமானல், இந்த எடுத்துக்காட்டில் 'சூழ்நிலை'க்கான பிழை அளவு ஆபத்தானதன்று.

தொடர்ச்சியாக—மாதாந்தரமோ வருடாந்தரமோ—குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்பொழுது, 'சூழ்நிலை' மாறுதல்களால் விளையும் சிக்கல்கள் குழப்பமூட்டக்கூடியனவாகும். அவைகளுக்கு முற்றும் திருப்திகரமான ஒரு முடிவு காணுதல் இயலாது என்றே கூறவேண்டும். இவ்வகை இன்னல்களைத் தீர்க்க, நிறைகளை அடிக்கடி மாற்றுவதே ஒரு வழியாகக் கருதப்படுகிறது. அஃதாவது, அடிப்படை ஆண்டை மாற்ருது, நிறைகளுக்கான ஆண்டுகளை மட்டும் அடிக்கடி மாற்றுவது. பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாட்டிஸ்டிக்ஸ் என்ற நிறுவனம் ஐந்தாண்டுகளுக்கொரு முறை நிறை ஆண்டுகளை மாற்ற வேண்டுமென்று முடிவு செய்துள்ளது. அப்பொழுது தனிப் பொருள்களுக்கு வேண்டிய சிறு மாறுதல்களைச்

செய்யும். இதனால் மாறாத நிறைகளைக்கொண்ட முறை பிழை மலிந்திருப்பதனின்று தடுக்கப்படுகிறது என்று நம்புகிறோம்.

சங்கிலிக் குறியீடுகள் (Chain indexes): ப்ரூஸ் டி. மட்ஜெட் என்போர் தம்நூலில் (துணைநூல் பட்டியல் 113) மற்றொரு முறையை மிகச் சிறப்பாகக் கூறியுள்ளார். அஃது இணைப்பு ஒப்புமைகளைச் (link relatives) சங்கிலியாக அமைப்பதாகும். குறைந்த இடைவெளி கொண்ட காலங்களுக்கு—அடுத்தடுத்த ஆண்டுகளுக்கு எனலாம்—P_{01}, P_{12}, P_{23}......போன்ற இணைப்பு ஒப்புமைகளை முதலில் கணக்கிடுவோம். காலத்தில் ஓரளவு ஒத்திருப்பவையும், ஒரே வகைச் 'சூழ்நிலை' கொண்டவையுமான இரண்டு காலங்களிடையே உள்ள விலைமாற்றத்தின் இணைப்பு ஒப்புமைகள் விழுமிய குறியீட்டெண் முறையைப் பயன்படுத்தினால் திருத்தமாக அமையும். பிறகு அவைகளை ஒன்றோடொன்று பெருக்குவதால் சங்கிலியாக அமைத்து, ஏனைய காலங்களிடையேயுள்ள விலை மாற்றங்களையும் அளவிடலாம். அஃதாவது,

$$P_{02}=P_{01}\cdot P_{12}$$

$$P_{03}=P_{01}\cdot P_{12}\cdot P_{23}=P_{02}\cdot P_{23}$$

இதுபோலவே மற்றவைகளும் அமையும்.

நிலையான அடிப்படைக் (fixed-base) குறியீட்டெண் சிறந்ததா அல்லது சங்கிலிக் குறியீட்டெண் சிறந்ததா என்பதனை முடிவு செய்வதற்கு ஏற்றவாறு எந்த வகைக் கெழுவும் இல்லாதது ஒரு குறைதான். இருமுறைகளில் கிடைக்கும் முடிவுகள்—அடுத்தடுத்தல்லாத இரு காலங்களுக்கானவை—மிகவும் வேறுபட்டிருக்கும். இவைகளில் எந்த ஒன்றையும் திருத்தமானது என்று கூறமுடியாதபடியால், காணப்பட்ட வேறுபாடு பிழையின் அளவைக் குறிக்கும் என்று கூறமுடியாது. நிலையான அடிப்படை முறை, இடையே சூழ்நிலை மாற்றமே இல்லை யென்ற கருத்தில், '0' ஆண்டிலிருந்து 'n' ஆண்டிற்கு ஒரே தாவலாகத் தாவிவிடுகிறது. சங்கிலி முறை இடையேயுள்ள எல்லா ஆண்டுகளின் சூழ்நிலைகளையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்கிறது. இடையேயுள்ள ஆண்டுகளில், துய்ப்புப் பழக்கங்கள், உற்பத்திக் கெழுக்கள், வருமான மட்டங்கள், வருமானப் பரவல்கள் முதலியவற்றிலெல்லாம் மாறுதல் நிகழ்ந்தே இருக்கும்; எனவே, 'சூழ்நிலை'கள் மாறிக்கொண்டே வரும். அப்பொழுது, மிகவும் மாறுதலான இரு 'சூழ்நிலை'களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தை இதுபோன்ற சங்கிலி முறையால் இணைப்பது நல்லது

என்று வாதாடலாம். ஆனால், இந்த வாதம் சரியானது என்று முடிவுகூற ஒரு சோதனையும் இல்லை. 'சூழ்நிலை' மாற்றங்கள் அதிகமாயுள்ள இரு காலங்களிடையே விலைமட்டங்களை ஒப்பிடுதலுக்குத் திருத்தமான முறையில்லை என்று கூறுவதுடன் நிறுத்திக் கொள்வது நல்லது என்று தோன்றுகிறது. எந்த முறையைப் பயன் படுத்தினாலும், அப்படி ஒப்பிடுவதால் நேரும் பிழை அளவுகள் அதிகமாகவே இருக்கும்.

செய்முறைகளைப்பற்றிய விளக்கமான ஆராய்ச்சியைச் சென்ற பகுதிகளில் கண்டோம். இதன்மூலம் சாதாரண நோக்கங்களுக்குப் பயன்படும் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடச் சில தவறான வாய்பாடு கள் உள்ளன என்பதை அறிந்தோம். ஓரளவு சிறப்பான வாய் பாடுகளும் உள்ளன. அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று பல நிலை களில்—சார்புடைமை, தேவைப்படும் விவரங்களின் தன்மை, மாதிரிப் பிழை அளவுகள்போன்ற நிலைகளில்—வேறுபட்டு அமைந்துள்ளன. குறித்த ஒரு நிலையில் தனக்குத் தேவைப்படும் வாய்பாட்டைத் தேர்ந்தெடுக்கும்பொழுது, ஆய்வாளர் இவைகளையெல்லாம் நன்கு மனத்தில் ஆராயவேண்டும். இவைகளைவிட எந்தக் கேள்விக்கு விடை தருவதற்காகக் குறியீட்டெண்ணைக் கண்டுபிடிக்கிறார் என்ற அவருடைய நோக்கம்தான் மிகச் சிறப்பாகக் கவனிக்கப்பட வேண்டும். உண்மை விலைகளின் நிரையிட்ட மொத்தக் குறியீட் டெண்ணைக் கண்டுபிடிக்கிறார் என்ற அவருடைய நோக்கம்தான் மிகச் சிறப்பாகக் கவனிக்கப்பட வேண்டும். உண்மை விலைகளின் நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண் ஒரு கேள்விக்குத் திட்டமான பதிலைத் தரும். குறித்த ஒரு காலத்தில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பொருட் பட்டியலின் (bill of goods) மொத்த விலைக்கும், வேறொரு காலத்தில் அதே பட்டியலிலுள்ள பொருள்களின் மொத்த விலைக்கும் உள்ள தொடர்பை இது காட்டும். ஒப்புமை விலைகளின் பெருக்குச் சராசரி மற்றொரு கேள்விக்கு விடை தரும்; கொடுக்கப்பட்ட பொருள்களின் ஒரு காலத்திய விலைகளுக்கும், அதே பொருள்களின் மற்றொரு காலத்திய விலைகளுக்குமுள்ள விகிதத்தை அது நன்கு அளவிடும். ஒப்புமை விலைகளின் நிறை யிடாத கூட்டுச் சராசரிக் குறியீடு போன்றவைகளால் விடை கிடைக்கும் கேள்விகளுக்குப் பொருளாதார வழியில் பொருள் காணுவது கடினம். ஓரிரண்டு பிரச்சினைகளே வாதத்தில் அதிக மான இடம்பெற்றுவிட்டதாலேயே 'மிகச் சிறப்பான' ஒரு குறி யீட்டைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டுமென்பது வலியுறுத்தப்பட்டது. எனினும், 'சிறப்பானது', 'விழுமியது' என்ற சொற்கள் ஏற்பட்டிருப்பது நமது துரதிருஷ்டம்தான். இப்படிக் கூறுவதால்

ஏதோ ஓர் அளவு முறையுள்ளது; அதைக் கொண்டு எல்லாக் குறியீடுகளும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப்பட்டுள்ளன என்று ஏற்படுகிறது. குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட வேண்டிய ஆராய்ச்சிப் பிரச்சினைகள் பற்பல வகைகளைச் சார்ந்தவை; அவைகளுக்கெல்லாம் ஒத்தவாறு அமைந்த அளவுமுறை ஒன்றுமில்லை. எனவே, தனக்குக் கிடைத்துள்ள விவரங்களுக்கேற்றதும், தனது நோக்கத்தை ஈடு செய்வதுமான வாய்பாட்டையே ஆய்வாளர் மேற்கண்ட பல வாய்பாடுகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பொருள்களின் விலைக்குறியீட்டெண் கணக்கிடுதலிலுள்ள பிரச்சினைகள்

விலை மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான ஒரு குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடும்பொழுது எழும் முறைப் பிரச்சினைகளைக் கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து சராசரியை எடுப்பதுபோன்றவைகளை முற்பகுதிகளில் பார்த்தோம். அடிப்படை விவரங்களை எப்படித் தேர்ந்தெடுப்பது என்பது சராசரி, நிறையிடுதல்களைப் போலவே முக்கியத்துவம் வாய்ந்த பிரச்சினையாக இருக்கிறது. குறித்த கால இடைவெளியில் வியாபாரத்திலுள்ள எல்லாப் பொருள்களின் விலைகளைப்பற்றிய எல்லாக் குறிப்புகளையும் கண்டெடுப்பது முடியாத காரியமே. எனவே, மாதிரியொன்றையேதான் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்; அது முழுமைத்தொகுதியின் உண்மைப் பிரதிநிதியாக (truely representative) அமைய வேண்டும். அப்பொழுது, மாதிரியில் இடம் பெறும் பொருள்கள் எவ்வகையைச் சார்ந்தவை, அவைகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு என்பனபோன்ற பிரச்சினைகளை முக்கியமாக ஆராயவேண்டும்.

சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டிய பொருள்கள்: முறைகளுக்கும் பயன்களுக்குமுள்ள தொடர்பைப்பற்றி முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். அதே தொடர்பு இங்கேயும் காணப்படுகிறது. எந்த நோக்கத்தைக் கொண்டு குறியீடு கணக்கிடப்படுகிறது. என்பதனைப் பொறுத்து, எவ்வகைப் பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும், எவ்வளவு எண்ணிக்கைப் பொருள்கள் மாதிரியில் இடம்பெறும் இவைபோன்ற பிரச்சினைகளுக்கு முடிவு காண்போம். பொதுவாக, மாதிரியின் எண்ணிக்கை பெரிதாக இருக்கவேண்டும் என்பது வெளிப்படை. ஒப்புமை விலைகளின் முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் வளைகோடு ஒன்று உள்ளது; பெரிதான மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கும் பரவல் வளைகோடு, மேற்கூறிய வளைகோட்டைப்போல் தோராயமாக

அமையும் ; ஆனால், சிறிதான மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கும் விளைகோடு அவ்வளவு தோராயமாக அமையாது. பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாட்டிஸ்டிக் என்ற நிறுவனம் முன்பு 900 விலைத் தொடர்ச்சிகளைக் கொண்டு தன் குறியீட்டைக் கணக்கிட்டு வந்தது ; இப்பொழுது அது 2,000 விலைத் தொடர்ச்சிகளைக்கொண்டு கணக்கிடுகிறது. எனவே, பொதுவான விலை அசைவுகளை மதிப்பிடுவதாக இவைகளைக் கொண்டால், தற்போதைய குறியீட்டில்தான் நமது நம்பிக்கை அதிகமாகும். பொருள்களில் பற்பல பகுதிகளுக்குத் தனித்தனியே குறியீடுகள் தேவையாயின், மாதிரியைப் பெரிதாக எடுத்துக்கொள்வது மிக நல்லது. எனினும், நன்கு தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட சில குறிக்கப்பட்ட விலைகளை (price quotations) மட்டும் பயன் படுத்திக் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்களைப் பயனற்றவை என்று தள்ளிவிடுவதற்கில்லை. விலைகளின் மொத்தப் போக்குகளை அளவிடுவதற்குத் தேவைப்படும் முடிவுகளுக்கு மிகத் தோராய மாகவும், குறைந்த செலவில் கிடைக்கக்கூடியனவாகவும் அவை அமையும். மேலும், சில குறித்த நோக்கங்களுக்குச் சில விலைக் குறிப்புகளைக்கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட குறியீட்டெண்கள் மிக்க பயனைத் தரும். பொதுவான விலைமட்டத்தில் நிகழ்ந்துள்ள மாறுதல் களைத் திருத்தமாக அளவிடுவதாக அவை அமையா. அவை எந்தப் போக்கில் மாறக்கூடும் என்பதனைமட்டும் சுட்டிக்காட்டக்கூடிய குறுயீட்டெண்கள் தேவையாயின், அவைகள் மிகச் சில விலைக்குறிப்புகளைக் கொண்டே கணக்கிடப்பட்டவையாகவிருக்கும். அவைகளை 'நுண்ணளவு'க் குறியீடுகள் (sensitive indexes) என்று கூறலாம். ஹார்வர்ட் 'நுண்ணளவு'க் குறியீடு இவ்வகையைச் சேர்ந்ததே; அது பதின்மூன்றே அடிப்படைப் பொருள்களின் (கச்சாப் பொருள்களின்) விலைக் குறிப்புகளைக்கொண்டு கணக்கிடப் பட்டதாகும். இவைகளில் இடம்பெறும் பொருள்கள், விலைகளைப் பொறுத்தமட்டில்அதிகமான மாறுதல்கள் உடையவைகளாகவிருக்கும்; எனவே, அதிக எண்ணிக்கையுள்ள பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்க மாட்டார்கள். அதே வகையைச் சார்ந்த மற்றொரு குறியீட்டை பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாட்டிஸ்டிக்ஸ் என்ற நிறுவனத்தார் தினசரி 'ஸ்பாட்' (spot) குறியீடுகளாக வெளியிடுகின்றனர் ; அஃது 22 பொருள்களைமட்டும் கொண்டது. இதுபோன்ற குறியீடுகளின் பயன்கள் வரம்புக்குட்பட்டவைகளே. பொதுவாகக் கூறின், விலைக் கூட்டங்களில் ஒருவித மந்தத்தன்மை (sluggishness) இருப்பது இயல்பே ஆகும் ; எனவே, விலை மாற்றங்களை நன்கு அளவிடுவன வான குறியீட்டெண்களும் அவ்வகை 'மந்தத்தன்மை' பெற்றிருத்தல் பொருத்தமே.

பொருள்களின் வகைகள், பொருள்களின் எண்ணிக்கை— இவ்விரண்டு பிரச்சினைகளையும் ஒருங்கேதான் ஆராயவேண்டும்

எத்தனை பொருள்களின் விலைத்தொடர்களைப் பயன்படுத்துகிறோம் என்பதைப் பொறுத்தே குறியீட்டின் பிரதிநிதித்துவம் வெளிப்படும்; ஆனால், எவ்வகைப் பொருள்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன என்பது இதைவிட முக்கியமான ஒன்று. பற்பல பொருட் கூட்டங்களில் ஏற்படும் விலை மாற்றங்களின் தன்மைகள் வெவ்வேருக இருக்கும்; எனவே, இந்தப் பொருள்களின் விலைகள், அவைகளிடையே நிகழும் உள்தொடர்புகள் (nterrelations), அவைகளின் போக்கு, பொருளாதார அடிப்படைக்கும் அவைகளுக்குமுள்ள தொடர்பு, செழுமைக் காலங்களிலும் மந்த காலங்களிலும் (prosperity and depression) அவைகளின் மாறுதல்கள் முதலியன வியாபாரிகளுக்கும், பொருளாதார அறிஞர்களுக்கும் மிக முக்கியமான பிரச்சினைகளாகும்.

குறிக்கப்பட்ட விலைகளினுலான ஒரு மாதிரியிலிருந்தே (sample) குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட வேண்டுமாதலால், மாதிரியானது நல்ல பிரதிநிதியாக இருத்தல் வேண்டும்; விலைகளின் எல்லாப் பிரிவுகளிலுமுள்ள விலைகளையும் தன்னுள் கொண்டதாக அஃது அமைய வேண்டும். இந்த நோக்கத்திற்குப் பொருள்களை அவைகளின் விலைகள் எவ்வாறு மாறுதல் அடைகின்றன என்பதைப் பொறுத்துப் பல பிரிவுகளாகச் செய்யலாம். இதுபோன்று பிரிவாக்கும்பொழுது நமக்கு வெளிப்படையாகத் தெரிகிற பிரிவுகள் வெவ்வேறு தொழில்களைக் (industry) கொண்டு அமைந்தவையாகும். எஃகு விலைகள். சவுளி விலைகள், தோல் விலைகள், இரசாயனப் பொருள் விலைகள், இவையெல்லாம் வெவ்வேறு வகையில் மாறக்கூடியவை. வர்த்தக மந்தமும், மறுமலர்ச்சியும் (trade depressions and revivals) எல்லா வகைப் பொருள்களையும் ஒரே அளவில் பாதிப்பதில்லை; ஒரே காலத்திலும் பாதிப்பதில்லை. எனவே, மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்ணில், எல்லாத் தொழில் விலைகளும் இடம் பெறவேண்டும். குறிப்பான சில தொழிற் பொருள்களின் விலைகளால்மட்டும் குறியீடு அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுமானால், அந்த அளவிற்கு அஃது உண்மைப் பிரதிநிதியாகாது.

எல்லாத் தொழில்களுக்கும் இடங்கொடுத்தால்மட்டும் போதாது; அப் பொருள்கள் எந்த முறையில் உண்டாயின என்பதைப் பொறுத்தும் (பண்ணையில், அல்லது வேறு இடங்களில் உற்பத்தியானது), அதேபோல் அவை இறுதியாக எதற்குப் பயன்படுகின்றன என்பதைப் (துய்ப்பதற்கோ அல்லது முதலாக்கத்திற்கோ) பொறுத்தும் விலைகளின் போக்கு அமையும். மற்றும், பொருள்களின் நீடிக்கும் தன்மை (durability), குறைந்த கால அளவில் அவைகளின் அளிப்புக் கட்டுப்பாடுகள் (controllability of

supply) முதலியனவும் கவனிக்கத்தக்கவைகளே. உற்பத்திப் பொருள் விலைமாற்றங்களும், துய்ப்புப் பொருள்களின் (கச்சா அல்லது உற்பத்தியானவை—இறுதியில் துய்ப்பவர்களால் நுகர்வுக்குத் தயாராக இருப்பவை) விலைமாற்றங்களும் வேறுபட்டவை. பொருள், அதன் தயாரிப்பின் எந்த நிலையில் உள்ளது என்பதைப் பொறுத்தும் விலைமாற்றங்கள் வேறுபடும். இதுபோன்ற பிரிவுகள் (எடுத்துக் காட்டப்பெறாத மற்றவைகள்) ஒன்றோடொன்று இணைந்து, விலைப்போக்கைப் பொறுத்தவரையில் மிக்க மாறுதல்களையுடைய பல படித்தான பொருள் விலைகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியை உண்டாக்குகின்றன. இதனின்று நமக்கு நல்ல பிரிதிநிதியான குறியீடு தேவை என்பது தெரிகிறது. எனவே, எல்லாப் பிரிவுகளிலுமுள்ள பொருள்களின் விலைகளையும் நாம் கவனிக்கவேண்டும்; மற்றும், ஒவ்வொரு பிரிவின் வர்த்தகத்திலும், அந்தப் பொருளின் ஒப்புமை வழி முக்கியத்துவத்திற்கு ஒப்பான நிறைகளையும் அமைக்க வேண்டும். குறிப்பான ஒரு நோக்கத்திற்குச் சிறப்பாக ஒரு குறியீட்டைக் கணக்கிடுவதென்றால், அந்த நோக்கத்திற்குத் தேவையான பொருட் பிரிவுகளைமட்டுமே ஆராய்தல் போதுமானதாகும்.

ஒப்பிடுவதற்கான அடிப்படை: அரசாங்கத்தார் பற்பல மாதாந்தர, வருடாந்தர விலைக் குறியீட்டெண்களையும் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களையும் வெளியிடுகின்றனர். அவைகளுக்கெல்லாம் ஓர் ஆண்டோ அல்லது பல ஆண்டுகளின் மொத்தமோ அடிப்படையாக இருப்பதைப் பார்க்கலாம். அடிப்படைக் காலம் மிகத் தொலைவில் அமைந்திருக்கக்கூடாது என்பதே தற்காலக் கருத்தாகும். 'சூழ்நிலை' மாறுவதாலும், காலப்போக்கில் விலைச் சிதறல்கள் அதிகமாகுவதாலும் கால இடைவெளி அதிகமாயின், ஒப்பிடுதலில் நிகழக்கூடிய பிழை அளவுகளும் அதிகமாகும். அடிக்கடி அடிப்படைக் காலத்தை மாற்ற வேண்டுமென்பதை இதிலிருந்து நாம் தெரிந்துகொள்கிறோம். விவசாயிகளால் பெறப்படும், விற்கப்படும் விலைகளுக்கான குறியீடுகள் (1910-14 அடிப்படையாகக் கொண்டவை) 40 ஆண்டுகளுக்கு முன் உள்ள அடிப்படைக் காலத்தைக் கொண்டவை. (இந்நூல் 1953-ல் எழுதப்பெற்றது—தமிழாக்கியோன்); இவ்வளவு தொலைவான காலத்திய அடிப்படை, திருத்தமான அளவைகளைப் பெறுவதில் இன்னல்களை விளைவிக்கிறது. எவ்வளவு காலமான பிறகு அடிப்படையை மாற்றியாகவேண்டும் என்று அறுதியிட்டுக் கூறமுடியாது. பொருளாதாரச் 'சூழ்நிலை'யை மாற்றக்கூடிய, உள்நாட்டு, வெளிநாட்டு நிகழ்ச்சிகள் புது நிறைகளைப் பெறுதல் கூடுமா என்பவை போன்றவைகளை நன்கு ஆராய்ந்து முடிவு காணவேண்டும்.

அடிப்படையாகத் தேர்ந்தெடுக்கக்கூடிய காலங்களில் நிகழ்ந்துள்ள வர்த்தக நிலைகளையும் நன்கு நோக்கிய பிறகே, அடிப்படைக் காலத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஒப்பிடுவதற்கான அடிப்படைக் காலமும் நிறைகளுக்கான அடிப்படைக் காலமும் வெவ்வேருக இருப்பினும் அக் காலங்களின் நிலைகள் மற்றக் காலங்களில் இருப்பதைவிட மிக்க மாறுபட்டிருந்தாலும், ஒப்பீடுகள் அவ்வளவு திருத்தமாக அமையும் என்று கூற முடியாது. இப்படிக் கூறுவதால் அடிப்படைக் காலம், 'நார்மல்' (normal) காலமாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்று எண்ணிவிடக்கூடாது. தற்காலத் தொழில், பொருளாதாரங்களின் உயிர்நாடி மாற்றத்தில்தான் உள்ளது; எனவே, எந்த ஒரு காலமும் 'நார்மல்' ஆக இருக்கிறது என்று சொல்வதற்கில்லை. எனவே, அதனைத் 'தர'மாக வைத்துக் கொண்டுமற்றக் காலங்களின் நிலைகளை அளவிடமுடியாது. அடிப்படையைத் தேர்ந்தெடுக்க, பொருளாதார நிலையில் மிகவும் மாற்றமில்லாத காலங்களையே குறியீட்டு அமைப்பாளர் தேடுவார்; ஆனல், 'தர'ப்படுத்தக்கூடிய காலமாக அதை அவர் எண்ணவே மாட்டார்; பொருள்களின் விலைகளுக்கு இது மிகவும் பொருந்தும். இயக்க நிலையிலுள்ள உலகத்தில் எல்லாமே மாறிக்கொண்டிருப்பதைப் போல், விலைகளும் எப்பொழுதும் மாறியவாறே இருக்கும்.

அடிப்படைக் காலங்களைத் தரப்படுத்துவதைப்பற்றிச் சிறிது கூறுவோம். அமெரிக்க நாட்டில் இன்று பொருளாதாரத் துறையில் பற்பல முறைகளால் கணக்கிடப்பட்ட பற்பல குறியீட்டெண்கள் வெளிவருகின்றன; இன்று வளர்ந்துவரும் உலகப் பொருளாதாரத் துறையிலும் இதனைக் காணலாம். இவைகள் வெவ்வேறு காலங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளன; எனவே, அவைகளினுல் ஏற்படும் பயன்களும் குறுகியவைகளே. அடிப்படைக் காலங்களை மாற்றித் தரப்படுத்துவதற்கான முதற்படியை அமெரிக்க அரசாங்கம் துவக்கிவைத்துள்ளது. அரசாங்கம் வெளியிடும் எல்லாக் குறியீட்டெண்களுக்கும் அடிப்படைக் காலம், 1947, 1948, 1949 ஆம் ஆண்டுகளின் சராசரியாகவே இருக்கவேண்டும் என்று ஆஃபீஸ் ஆஃப் ஸ்டாடிஸ்டிகல் ஸ்டாண்டர்ட்ஸ் (Office of Statistical Standards) என்ற நிறுவனம் சிபாரிசு செய்துள்ளது. அமெரிக்க நாட்டின் முக்கியப் பொருளாதாரத் துறைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான அளவைகளின் ஒரு பட்டியலைத் தயாரிப்பதற்கு இது முன்னேடியாக அமையும்.

முற்பகுதிகளில், குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுவதில் நேரக்கூடிய பொதுப் பிரச்சினைகளைப்பற்றிக் கூறினேம்—சிறப்பாக முழு விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்களைப்பற்றியே விளக்கினேம்.

இப்பொழுது மற்றும் இரண்டு துறைகளில் ஏற்படும் பிரச்சினைகளைச் சுருக்கமாக ஆராய்வோம்.[5]

துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்கள்
(Index Numbers of Consumer Prices)

குறியீட்டெண்களைப்பற்றிய நூல்களில் வாழ்க்கைச் செலவில் (cost of living) ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதைப்பற்றி விரிவான விளக்கம் இருக்கும். 'வாழ்க்கைச் செலவு' என்ற சொற்றொடர் அவ்வளவு திட்டவட்டமான பொருளுடையதன்று; இன்று பலரும் பல நிலைகளில் இதனைப் பயன்படுத்தும்பொழுது அதன் பொருள் குழம்பிய நிலையிலேயே உள்ளது. அதனை மிக திட்பமான முறையில் பயன்படுத்தும்பொழுது அதன் பொருள் கீழ்வருமாறு : வெவ்வேறு இரு காலங்களிலோ அல்லது இரு இடங்களிலோ ஒரே அளவான உண்மை வருமானத்தைக் (அதாவது திருப்தியை) கொடுக்கக்கூடியதான பொருள் வருமானங்களின் (commodity incomes) பண விலைமாற்றங்களைக் கணக்கிடுதல். அதாவது, வெவ்வேருன இரு நிலைகளில், குறித்த துய்ப்புப் பொருள்களினுல் சமமான மொத்தத் திருப்தி ஏற்படுகிறது என்போம்; அப்பொழுது அந்த இரு நிலைகளில் பொருள்களின் மொத்தப் பண விலைகளின் (aggregate money costs) விகிதமே வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்ணுகும். (துய்ப்புப் பொருள்கள் பட்டியல்களில் உள்ள பொருள்கள் வேறு வகையினவாக இருக்கலாம்; ஆனுல், அவைகளின் நுகர்வால் கிடைக்கும் திருப்தி அளவுகள் சமமாகவே இருக்கவேண்டும்.) இதுபோன்று விளக்கந் தருவதால், விருப்பங்களின் அமைப்பு (wants structure), சுவைத் தோரணிகள் (taste patterns) முதலியன நுகர்வோர் எல்லாருக்கும் சமமாகவும் மாருமலும் இருக்கவேண்டும் என்ற விதியை ஏற்படுத்திஞற்போலாகிறது. இந்த விதி நடைமுறையில் நிறைவேறுவது வெகு கடினமே. எனவே, இதுபோன்ற வாழ்க்கைச் செலவில் ஏற்படும் மாற்றங்களைத் திருத்தமாக அளவிடுவதும் கடினம்தான். தற்சமயம் 'உண்மையான' வாழ்க்கைச் செலவுக்

[5] குறிப்பிட்ட (particular) குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும் முறைகளை விரிவாக நாம் இங்குக் கூறப்போவதில்லை. அந்தந்த நிறுவனங்களிலிருந்து தேவையான விவரங்களைப் பெறலாம். அமெரிக்காவில் 'பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்' என்ற நிறுவனம் முழு விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்களையும், துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்களையும் வெளியிடுகிறது. விவசாய இலாக்காவின் 'அக்ரிகல்சரல் மார்கெட்டிங் ஸர்வீஸ்' (Agricultural Marketing Service) என்ற நிறுவனம் விவசாயிகளால் பெறப்பெற்ற, விற்கப்பெற்ற விலைக் குறியீட்டெண்களை வெளியிடுகிறது; மற்றும் சமமதிப்புக் (parity) குறியீடுகளையும், நிறுவப்பெற்ற சமமதிப்பு விகிதங்களையும் வெளியிடுகிறது. ஐக்கிய நாடுகளின் 'மந்த்லி புல்லெட்டின் ஆஃப் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்' (Monthly Bulletin of Statistics) என்ற நூலில் மற்ற நாடுகளில் குறியீடுகளை வெளியிடுகிற நிறுவனங்களைப்பற்றிய தகவல்களைக் காணலாம்.

குறியீட்டெண் எதுவும் கணக்கிடப்படவில்லை.[6] சாதாரணமாகத் தற்காலத்தில் இந்தப் பெயருடன் வெளிவரும் குறியீடுகளைத் துய்ப்பவர்களால் செலுத்தப்பெறும் விலைகளின் குறியீடுகள் என்று கூறுவதே மிகவும் பொருத்தமாகும்.

இந்த மாற்றத்தை அமெரிக்காவின் 'பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்' என்ற நிறுவனம் செய்தே உள்ளது. 'அவரவர்கள் வாழ்க்கை மட்டத்தை நிர்வகிப்பதற்காகப் பட்டணத்தில் கூலி பெறுவோர், மற்றும் குமாஸ்தா—குடும்பங்கள் வாங்கும் பொருள்களின், மற்றும் தொண்டுகளின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களின் குறியீட்டெண்'—என்பது அதன் விளக்கமாக அமைந்த முழுப் பெயராகும். சுருக்கமாக 'துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்' என்றும் கூறுவர்.

குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்பொழுது நேரும் நடைமுறைப் பிரச்சினைகள் இங்கேயும் நிகழ்கின்றன. குறித்த 'சூழ்நிலை'க்கு (regimen) அல்லது 'சூழ்நிலை'களின் சராசரிக்கு ஒத்தவாறு விலைமாற்றங்கள் அமையவேண்டும். குறித்த ஒரு காலத்தில் துய்ப்போர்களின் ஒரு பிரதிநிதியான மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்போம்; அந்தக் குடும்பங்களில் பல தேவைகளுக்குச் சராசரியாகச் செலவிடப்படும் அளவுகளைக் கொண்டு நிறைகளைக் கணக்கிடுவோம். இந்த நிறைகளே 'சூழ்நிலை'யை விளக்குவனவாகும். இன்று அமெரிக்காவில் கணக்கிடப்படும் குறியீட்டிற்கான நிறைகளை 1950ஆம் ஆண்டில் நடத்திய விரிவான ஆய்வு விசாரணை மூலம் பெற்றனர். மிகப் பெரிதான 12 நகரப் பகுதிகளிலிருந்தும், மற்றும் பற்பல நகரங்களிலிருந்தும் பிரதிநிதியான பல குடும்பங்களை மாதிரி முறையில் தேர்ந்தெடுத்தார்கள்; அந்தக் குடும்பங்களில் உணவு, உடை, மரச்சாமான்கள் (furniture) மற்றும் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் தொண்டுகளுக்கும் செலவான பண விவரங்களைக் கணக்கிட்டனர்; பிறகு இதிலிருந்து நிறைகளை ஏற்படுத்தினர். 1950ஆம் ஆண்டில் குறிக்கப்பெற்ற இந்தப் பொருள் பட்டியலை (market basket) 1951-52ஆம் நிதியாண்டு

[6] என்றாலும், துய்ப்போர் விலைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதில் திருத்தம் அதிகமாயிருக்கிறதென்பதையும் கவனிக்கவேண்டும்; இதற்குத் தேவைப்படும் கோட்பாடுகளில் ஏற்பட்டுள்ள முன்னேற்றங்களே காரணமாகும். அடிப்படைக் கருத்துகளைப்பற்றிய தெளிவான விளக்கத்திற்கு, ஃப்ரிஸ்ச், ஆர். (Frisch, R.) என்பவரின் 'Some Basic Principles of Price of Living Measurements' என்ற கட்டுரையைப் பார்க்கவும். ['Econometrica' 22ஆம் வால்யும், 4ஆம் இதழ். (அக்டோபர் 1954)]. வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களுக்கான அடிப்படைக் கோட்பாடுகளையும், கோனூஸ் (Konus) என்பவரின் முன்னோடியான செயல் விவரங்களையும், உல்மர் (Ulmer) என்பவர் தம் நூலில் (துணை நூல் பட்டியல் 164) விரிவாகத் தந்துள்ளார். அதே நூலில் ஸ்டாலே (Staehle), ஃப்ரிஸ்ச் (Frisch), ஹாபர்லர் (Haberler), வால்ட் (Wald), ஹிக்ஸ் (Hicks), ஆல்லன் (Allen) மற்றும் பலரின் ஆராய்ச்சிகளைப்பற்றியும் குறிப்புகள் உள்ளன.

(financial year) வரையில் நிகழ்ந்த மாற்றங்களைக் கொண்டு சிறிது மாறுதல் செய்துள்ளனர்; 1951-52ஆம் ஆண்டின் நிறைகளையே இப்பொழுது நிறை அடிப்படையாகக் கருதுகின்றனர்.

எனவே, மாறுதிருக்கும் 'சூழ்நிலை'யாகக் கருதப்பெறுவது 1951–52 நிதியாண்டுதான். ஆனால், ஒப்பிடுதலுக்கான அடிப்படை 1947-49ஆம் ஆண்டுகளின் சராசரி. இம் மூன்று ஆண்டுகளுக்குச் சராசரியாக 100 என்று வைத்துக்கொண்டு, ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும், மாதத்திற்குமான துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்களை வெளியிடுகிறார்கள். 'சூழ்நிலை'யில் இடம் பெற்றுள்ள பொருள்களின், மற்றும் தொண்டுகளின் எண்ணிக்கை 296. இந்தப் பட்டியலில் உள்ளவை 1951-52-ல் துய்ப்போர் வாங்கியவை. அவைகள் அளவிலும் தரத்திலும் (quality) மாறுமல் இருக்கின்றன என்று கொள்கிறோம். தனிப் பொருள்களின் தன்மைகளைப்பற்றிய தகவல்கள் மிக விரிவாகவும் திட்பமாகவும் அமைக்கப்பெற்றுள்ளன. இவைகளின் விலைகளை 46 நகரங்களிலிருந்து திரட்டினார்கள்; இவைகளே தற்காலக் குறியீட்டின் அடிப்படை விவரங்களாகும்.

துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்களின் நிறை அளவுகளைக் கீழே தந்துள்ளோம். 20ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் அமெரிக்காவின் துய்ப்போரின் வரவு செலவுத் திட்டம் (consumer budget) எவ்வாறு அமைந்திருந்தது என்பதை இஃது எடுத்துக்காட்டும்:

பகுதி	ஒப்புமை முக்கியத்துவம் (சதவீதம்)
உணவு	30
வீட்டு வசதி (விளக்கு, வெப்பம் முதலியன உள்பட)	32
உடை	10
போக்குவரத்துச் செலவு	11
வைத்தியம்	5
சொந்தச் செலவுகள் (personal care) ...	2
படிப்பும் பொழுதுபோக்கும் ...	5
மற்றப் பொருள்களும் தொண்டுகளும் ...	5
எல்லாப் பொருள்களும் ...	100

நிறைகள் மொத்தமாக நாட்டின் சராசரிகள் என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். விரிவாகக் கணக்கிடும்பொழுது 46 நகரங்களுக்கும் தனித்தனியே நிறைப்பட்டியல் வைத்துள்ளார்கள். அந்த நகரத்திலும், அதேபோன்ற மற்ற நகரத்திலும் துய்ப்போர் செலவுகளையொட்டியே நிறைகளை ஏற்படுத்தியுள்ளனர். பல நகரங்களின் குறியீடுகளை மொத்தமாக்கும்பொழுது, அதிலுள்ள கூலி பெறுவோர்,

குமாஸ்தாக்கள் முதலியோர் விகிதத்திற்கேற்றவாறு நிறைகள் அமைத்துக் கொள்வார்கள். எனவே, உழைப்பாளி மக்கள்தொகை நிறைகளையும், குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட நிறைகளையும் ஒன்றுகச் சேர்த்து நாட்டின் குறியீடுகளை நிறுவியுள்ளனர்.

துய்ப்போர் விலைக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதில் முதல்படி, குறித்த ஒரு மாதத்திற்கான அல்லது வருடத்திற்கான குறியீட்டை அதற்கு முன் சென்ற மாதத்தை அல்லது ஆண்டை அடிப்படை யாகக்கொண்டு கணக்கிடுவதாகும். இங்குப் பயன்படுத்துவது சற்றே மாற்றியமைத்த லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடு :

$$I_{(i-1)i} = \frac{\Sigma p_i q_a}{\Sigma p_{(i-1)} q_a}$$

இங்கு p_i என்பது குறித்த மாதத்திய அல்லது ஆண்டின் ஒரு பொருளின் விலை; $p_{(i-1)}$ என்பது அதே பொருளின் முந்திய மாதத்திய அல்லது ஆண்டின் விலை; q_a என்பது 1951-52ஆம் ஆண்டுக் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டங்களிலிருந்து கிடைத்த அளவு நிறை. $I_{(i-1)i}$ என்பது $(i-1)$ காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு i காலத்திற்கான குறியீடு. இந்த வாய்பாடு ஒப்புமை விலைகளின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்துகிறது.

இரண்டாவதாக, அடிப்படையை 1947-49-க்கு மாற்றுவது; இந்தக் காலத்தை '0' என்போம். அதற்கான வாய்பாடு.

$$I_{0i} = I_{0(i-1)} \times I_{(i-1)i}$$

இங்கு I_0 என்பது தேவைப்பட்ட i காலத்திற்கான குறியீடு, 0 காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது; $I_{0(i-1)}$ என்பது அதே போன்று 0 காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட $(i-I)$ என்ற காலத் திற்கான (முந்திய காலத்திய) குறியீடு.

முழு விற்பனை விலைக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடும்பொழுது ஏற்படும் நடைமுறைப் பிரச்சினைகள், துய்ப்போர் விலைக் குறியீடு களைக் கணக்கிடும்பொழுது மேலும் அதிகமாகும். 'சூழ்நிலை' மாற்றங்கள் இயக்க நிலையிலுள்ள பொருளாதார அமைப்பில் அடிக்கடி ஏற்படுவதால் நிறைகள் பொருத்தமற்றுப் போய்விடும். பொருள்களின் 'தர'த்தில், வியாபாரப் பழக்கங்களில், அந்தந்தப் பகுதிப் பழக்க வழக்கங்களில் பல மாறுதல்கள் ஏற்பட்டவாறே இருக்கும். எனவே, பிரதிநிதியான, திருத்தமான விலைக் குறிப்பு களைப் பெறுவது மிகக் கடினமாகிறது. இவைகளுக்கெல்லாவற்றிற்கும் மேலாக, பியூரோவிற்கு இத்தகைய குறியீட்டைக் கணக்கிடும் வேலை யும் சேர்ந்துள்ளது. இந்தக் குறியீடுகளைக் கொண்டு நாட்டின் முழுவதுமுள்ள ஆயிரக்கணக்கான பாட்டாளிகளின் கூலி வீதங்கள்

அமைக்கப்படுகின்றன; பொதுவாக நாட்டின் போக்கைப் பாதிக்கும் முடிவுகளும் இவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. எனவே, 'பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்' என்ற நிறுவனத்தின் பொறுப்பு எளிதானதன்று.

பண்ணை விலைகளும் சம மதிப்புக் குறியீடும்
(Farm Prices and the Parity Index)

விவசாயப் பொருளாதாரத் துறையில் முக்கியமான தனித்த பல குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிட்டு வருகின்றனர். அவைகள் சிறப்பான நோக்கங் கொண்டவை. 1933ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்க நாட்டில் 'அக்ரிகல்சரல் அட்ஜஸ்ட்மென்ட் ஆக்ட்' (Agricultural Adjustment Act) என்ற சாஸனம் நிறைவேறியது. அதற்குப் பிறகு இந்தக் குறியீட்டு எண்களைக் கொண்டுதான் விவசாயத் துறையில் அரசாங்கம் தன் கொள்கைகளை அமைத்து வருகின்றது. எனவே, இவைகளின் முக்கியத்துவம் அந்தக் காலத்திற்குப் பிறகு அதிகரித்துள்ளது. ஆகையால், அக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுதலும் பயன் படுத்தலும் காங்கிரஸின் (அமெரிக்க அரசாங்கத்தின்) பொறுப்பாக உள்ளது.

பண்ணை உற்பத்தியாளர்களின் நாணய மாற்றங்களில் (exchange) ஏற்படும் வித்தியாசங்களை அளவிடுவதற்காகப் பல குறியீடுகளைக் கணக்கிடுகிறார்கள். பண்ணை விவசாயிகள் தங்கள் உற்பத்தியை விற்கும்பொழுது பெற்றுக்கொள்ளும் விலைகளுக்கான குறியீடு ஒன்று; தங்கள் குடும்பத்திற்கும் உற்பத்திக்கும் தேவையான பொருள்களை வாங்கும்பொழுது அவர்கள் கொடுக்கும் விலைகளுக்கான குறியீடு ஒன்று; இரண்டாம் குறியீட்டையும், அடைமானக் கடன்களுக்கான வட்டி, பண்ணை நிலத்தின் வரிகள், பண்ணையில் வேலைக்கு வைத்துக்கொண்ட ஆட்களின் கூலி முதலியவற்றையும் கொண்டு கணக்கிட்ட 'சமமதிப்புக் குறியீடு' ஒன்று; ஆக மூன்று வகைக் குறியீடுகளை நிறுவுகிறார்கள். முதல் குறியீட்டிற்கும் (விவசாயிகளுக்கு அவர்கள் பண்ணைப் பொருள்களுக்காகக் கிடைக்கும் விலைக் குறியீடு), மூன்றும் சமமதிப்புக் குறியீட்டிற்கும் உள்ள விகிதத்தை 'சமமதிப்பு விகிதம்' என்று கூறுகிறார்கள்; பண்ணைப் பொருள்களின் சராசரி வாங்கும் திறன்களில் (purchasing power) ஏற்படும் மாற்றங்களை இஃது அளவிடும்.

ஐம்பது பண்ணைப் பொருள்களை வைத்து ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் விவசாயிகளுக்குக் கிடைக்கும் விலைக் குறியீட்டைக் கணக்கிடுகிறார்கள். முதல் விற்பனையில் கிடைக்கும் விலைகளையே எடுத்துக்

கொள்கிறார்கள். முதல் விற்பனை உள்ளூர்ச் சந்தையிலாவது அல்லது மற்ற எந்த விற்பனை இடங்களிலாவது நிகழலாம். எல்லாத் தரங்களினுடைய (qualities) விலைகளையும் எடுத்துக்கொள்ளுகிறார்கள்; மொத்த விற்பனைகளில் குறிப்பிடப்படும் 'தர'ங்களைக் கவனிப்பதில்லை. எனவே, பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தாரால் வெளியிடப்படும் குறியீடுகளில் இடம்பெறும் பண்ணை விலைகளுக்கும், இந்தக் குறியீட்டிற்கான பண்ணை விலைகளுக்கும் வேறுபாடு உண்டு. முதலாவதற்கு, 'தர'ப்படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் மொத்த விலைகளே—பெரும் விற்பனை இடங்களிலோ, பண்டமாற்று இடங்களிலோ நிகழுபவை—பயன்படும். நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டு வகையைச் சேர்ந்ததுதான் இந்தக் குறியீடும்; நிறைகளிலும் விற்பனையாகும் பொருள் அளவுகளிலும் ஏற்படும் மாற்றங்களுக்காக அவ்வப்பொழுது சிறிது மாறுதல்களும் செய்யப்படும். சராசரியாக விற்பனையான அளவுகளின் அடிப்படையில் நிறைகளைக் கணக்கிடுகிறார்கள்—இப்பொழுது வெளியிடப்படும் குறியீடுகளுக்கு 1937-41ஆம் ஆண்டுகளிலிருந்து நிறைகள் கண்டுபிடித்துள்ளனர். குறியீட்டின் அடிப்படை, 1910ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாதத்திலிருந்து, 1914 டிஸம்பர் வரையுள்ள ஐந்து ஆண்டுகளின் சராசரியாகும். பயிர்களுக்கும், கால்நடை, மற்றும் கால்நடைப் பொருள்களுக்கும், மற்றும் 13 சிறு பிரிவுகளுக்கும் தனித்தனியே குறியீடுகளை வெளியிடுகிறார்கள்.

மாற்றத்திற்கான அல்லது சமமதிப்பு விகிதத்திற்கான குறியீட்டில் இடம்பெறும் இரண்டாம் குறியீட்டைத் தற்காலத்தில் 'சமமதிப்புக் குறியீடு' என்கிறார்கள். இது மூன்று பகுதிகளைக்கொண்ட ஒரு பன்முக அளவையாகும் (composite measure). இவைகளில் மிக முக்கியமானது (1953-ல் மொத்தத்தின் 44 சதவீதம்) குடும்ப வாழ்க்கைக்கான பொருள்களுக்காக அவர்கள் கொடுக்கும் விலைகளின் குறியீடு. நுகர்வுப் பொருள்களுக்கு, விவசாயிகள், நாட்டின் எல்லாப் பாகங்களிலும் கொடுக்கும் விலைகள் இதில் இடம்பெறும். 'தர'த்திற்கான குறியீடுகள் நிறுவப்படுவதில்லை; விவசாயிகள் பொதுவாக எந்தத் 'தர'த்தை விரும்புகிறார்களோ, அவைகளின் விலைகளே கருதப்படும். 1953ஆம் ஆண்டில் 194 விலைத் தொடர்களைப் பயன்படுத்தினர். பல்லாயிரக்கணக்கான, சில்லறை மற்றும் 'சங்கிலி'க் கடைகளுக்குத் (chain-stores) தபால்மூலம் கேள்வித்தாள்கள் (questionnaires) அனுப்பித் தகவல்களைத் திரட்டுகின்றனர். பண்ணைக் குடும்பங்களால் வாங்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளின் மதிப்பீடுகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு நிறைகளை நிறுவுகின்றனர். முந்தைய குறியீட்டைப் போலவே இதுவும் நிறையிட்ட மொத்த வகையைச் சேர்ந்ததே; அடிப்படைக் காலமும் ஜனவரி 1910 முதல் டிஸம்பர் 1914வரை ஆகும்.

சம மதிப்புக் குறியீட்டின் இரண்டாவது பகுதி 1953ஆம் ஆண்டில் 37 சதவீதம் நிறையாக இருந்தது. இது பண்ணைத் தயாரிப்பிற்கான பொருள்களின் விலைக்குறியீடாகும். குடும்ப வாழ்க்கைக் கான குறியீட்டில் இடம்பெற்ற 42 பொருள்களையும் சேர்த்து, இந்தக் குறியீட்டில் 192 விலைக் குறிப்புகள் மொத்தமாகின்றன. இதில் இடம் பெறும் பொருள்களில் சில—தீனி, விதை, கால்நடை, மோட்டார் வண்டிகள், அவைகளின் உறுப்புகள், எருக்கள், மற்றும் பண்ணைப் பொறிகள் (farm machinery) முதலியன. இதன் அடிப்படைக் காலம், வாய்பாடு அமைப்பு, நிறை அடிப்படை, விலைக்குறிப்பெடுப்புகள் முதலியன முன் குறியீட்டினுடையது போன்றவையே. இரண்டு குறியீடுகளிலும் உட்பிரிவு அளவைகளையும் கணக்கிடுகிறார்கள்.

வட்டிவீதங்களில், வரிவீதங்களில், பண்ணைக் கூலிகளில் ஏற்படும் வித்தியாசங்களின் அளவைகளையும் மேற்கூறிய இரு குறியீடுகளுடன் சேர்க்கிறார்கள்; அப்படி மொத்தமாக்கிக் கிடைப்பது விவசாயிகளுக்குத் தேவைப்பட்ட பொருள்களையும் தொண்டுகளையும் வாங்குவதற்கான செலவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதாக அமையும் 'சமமதிப்புக் குறியீடா'கும். கடைசியாகக் கூறப்பட்ட மூன்று பகுதிகளின் மொத்த நிறை 1953ஆம் ஆண்டில் மொத்த சமமதிப்புக் குறியீட்டில் 19 சதவீதமாகும். எந்த ஒரு மாதத்திற்கோ, அல்லது ஆண்டிற்கோ விவசாயிகளுக்குக் கிடைத்த விலைக்குறியீட்டிற்கும் சமமதிப்புக் குறியீட்டிற்குமுள்ள விகிதத்தைக் கணக்கிட்டு, அதனைச் சமமதிப்பு விகிதம் என்றழைக்கின்றனர். விவசாயிகளுக்கும், நாட்டின் மற்றப் பொருளாதாரப் பிரிவுகளுக்கும் நிகழும் பணமாற்றங்களில் ஏற்படுகிற வித்தியாசங்களை இந்த விகிதம் அளவிடும்; அடிப்படைக் காலம் ஜனவரி 1910 முதல் டிசம்பர் 1914 வரையிலாகும்.

அடிப்படைக் காலத்திற்கும் அண்மை ஆண்டுகளுக்கும் மேலே விளக்கப்பட்ட பல அளவைகள் அட்டவணை 13-17-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சமமதிப்பு விகிதம் எதனை அளக்கிறது என்பதைப்பற்றி முன்பு கூறியுள்ளோம்; இப்பொழுதும் மறுமுறை சிறிது மாற்றி விளக்குவோம். இது பண்ணை உற்பத்திகளின் ஒரு சராசரி அலகின் (unit) வாங்கும் திறனின் ஓர் அளவையாகும். 1953ஆம் ஆண்டில் அதுபோன்ற ஒரு சராசரி அலகிற்கு விவசாயிகளுக்குக் கிடைத்த விலை, 1910-14ஆம் ஆண்டுக் காலத்தில் கிடைத்ததைவிட 158 சதவீதம் அதிகம் (2ஆம் பத்தி). அவர்கள் வாங்கவேண்டிய பொருள்கள் தொண்டுகளுக்கான சராசரி அலகின் செலவு 179 சதவீதம் அதிகமாயிருந்தது (5ஆம் பத்தியைக் காண்க). எனவே, பண்ணை உற்பத்தியின் சராசரி அலகு ஒன்றின் உண்மையான மதிப்பு அல்லது வாங்குந்

திறன் 100-லிருந்து 92 ஆகக் குறைந்துள்ளது; அதாவது, அடிப்படை ஆண்டைவிட 1953-ல் 'சமமதிப்புநிலை'யிலிருந்து வாங்குந்திறன் 8 சதவீதம் குறைவாகியுள்ளது.

அட்டவணை 13-17

விவசாயிகளுக்குக் கிடைத்த விலைகள், அவர்கள் வாங்கிய விலைகள், சமமதிப்புக் குறியீடு, சமமதிப்பு விகிதம், சில ஆண்டுகளுக்கு, 1910-14லிருந்து 1954 வரை.

ஆண்டு (1)	விவசாயிகளுக்குக் கிடைத்த விலைகள் (2)	விவசாயிகள் வாங்கிய பொருள் விலைகள் குடும்ப வாழ்க்கைக்கு (3)	உற்பத்திக்கு (4)	சமமதிப்புக் குறியீடு (வாங்கிய விலைகள், வரி, கூலி, கடன் வீதங்கள், உள்பட) (5)	சம மதிப்பு விகிதம் (2) ÷ (5) (6)
1910-1914	100	100	100	100	100
1939	95	120	121	123	77
1940	100	121	123	124	81
1941	123	130	130	133	92
1942	158	149	148	152	104
1943	192*	166	164	171	112
1944	196*	175	173	182	108
1945	206*	182	176	190	108
1946	234*	202	191	208	112
1947	275	237	224	240	115
1948	285	251	250	260	110
1949	249	243	238	251	99
1950	256	246	246	256	100
1951	302	268	273	282	107
1952	288	271	274	287	100
1953	258	270	253	279	92
1954	250	274	252	281	89

* யுத்த காலத்தில் விவசாயிகளுக்குக் கிடைத்த சில உதவிக் கொடைகளும் உள்பட.

விவசாயப் பொருள்களின் விலைகளுக்குத் தரவேண்டிய உதவியின் அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க, சமமதிப்புக் குறியீடு [அட்டவணை 13-17-ன் (5 ஆம் பத்தி] பெரிதும் பயன்படும். இது பொதுவான சமமதிப்பு விகிதத்தைக் கணக்கிடுவதற்கும் உதவுகிறது; மற்றும் இதனைப் பயன்படுத்திக் குறித்த ஒரு பொருளின், குறித்த ஒரு காலத்திற்கான சமமதிப்பு விலையைக் கண்டுபிடித்துவிடலாம். அந்தப் பொருளின் அடிப்படைக் காலத்தின் விலையையும், அந்தக்

காலத்திற்கான சமமதிப்புக் குறியீட்டையும் பெருக்கினுல் சமமதிப்பு விலை கிடைக்கும்.[7] இந்தச் சமமதிப்பு விலையைக் கொண்டுதான், அந்தப் பொருளின் விலைக்கான உதவி முறைகளை அரசாங்கம் நிறுவும்.

விவசாயிகளால் பெறப்படும் விலைகளையும் அவர்கள் வாங்க வேண்டிய விலைகளையும் அளவிடுவதாக அமைந்த மேற்கூறிய பல குறியீடுகளை ஆராய்ந்தோம். இவைகள் ஒரு தனி முக்கியத் தயாரிப்புப் பகுதியினரின் வாங்குதலிலும் விற்பனையிலும் நிகழும் பிறழ்ச்சிகளை விளக்குவதாக அமைந்தவை. எனவே, இவை அப் பகுதியினரின் பொருளாதார மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான விரிவான முறைகளாகும். இந்தக் குறியீடுகளின் சில சிறப்புத் தன்மைகளை மட்டுமே இந்தச் சுருக்கமான விளக்கத்தில் தந்துள்ளோம். பொதுவான மொத்த விற்பனை இடங்களில் நிகழும் விலைகளும் இந்தக் குறியீட்டு விலைகளும் வெவ்வேருனவை என்பதைக் கண்டோம். இக் குறியீட்டு விலைகள் உற்பத்தியாளர்கள் முதல் வியாபாரத்தில் பெறும் விலைகளே ஆகும். அவைகள் பல 'தர'ப்பட்ட பொருள் விலைகளின் சராசரிகளேயன்றி, மாற்றமில்லாத் 'தர' த்தையுடைய பொருளின் விலைகளின் சராசரிகளன்று. எனவே, இக் குறியீடுகளில் காணப்படும் மாற்றங்களுக்கு விலைமாற்றங்களும் காரணமாயிருக்கலாம்; அல்லது 'தர' மாற்றங்களும் காரணமாயிருக்கலாம். விவசாயிகளால் வாங்கப்பட்ட விலைகளுக்கான குறியீட்டிற்குக் கடைசிக் குறிப்பு மிகப் பொருந்தும். இங்குத் திட்டமான எந்தத் 'தர'க் குறிப்புகளும் நிறுவப்படவில்லை; விவசாயிகளால் அந்தந்தக் காலங்களில் வாங்கப்படும் 'தர'ங்களுக்கான விலைகளே பயன்படுகின்றன. இப் பொருள்களின் 'தர'ம் உயர்ந்தால், குறியீட்டினுல் சுட்டிக் காட்டப்பெறும் விலை உயர்வுகள், இவ் வகை 'தர' உயர்வுகளையே பிரதிபலிக்கும். மற்றும், இந்தக் குறியீடு விவசாயிகளின் 'வாழ்க்கைச் செலவை' (cost of living) அளவிடும் குறியீடாகவும் கருதப்படலாம். பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாட்டிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தாரால் வெளியிடப்படும் துய்ப்போர் விலைக்குறியீடு நிலையான 'தர'ங்களை யுடையது; எனவே, இவ்விரண்டு குறியீடுகளும் வெவ்வேறு வகையானவை; தனித்த இரு முழுமைத் தொகுதிகளை வெவ்வேருன முறைகளில் அளவிடுபவை.

பண்ணைவிலைக் குறியீடுகள் 40 ஆண்டுகளுக்கும் அதிகமான காலத்திற்கானவை. இயக்கநிலை (dynamic) பொருளாதாரத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைத் திருத்தமாக ஒப்பிடுவதற்கு முடியாத

[7] 'பழைய வாய்பாடு' எனப்படுவதை இந்தச் செய்தி குறிக்கிறது. நகரும் (moving) அடிப்படைக் காலத்தைக் கொண்டு (சென்ற பத்தாண்டுகள்) ஒரு 'புதிய வாய்பாட்டை'க் கணக்கிட்டு அதனைச் சட்டத்திலும் அமைத்துள்ளனர்.

நெடுங்காலத்திற்கானவை. எனவே, பகுத்தறிவிற்கும் தொழில் நுட்பத்திற்கும் ஏற்பப் புள்ளியியலறிஞர், சிறிது காலத்திற்குப் பிறகு அமைந்த அடிப்படையை விரும்புவர். (1910-14 என்ற அடிப்படைச் சட்டத்தால் அமைக்கப்பெற்றதாகும்.) அண்மையில் 1937-41 ஆண்டுகளையே அடிப்படையாகப் பயன்படுத்தி வருகிறார்கள்; [இதுவும், யுத்த காலத்திற்குப் பிறகு ஏற்பட்டுள்ள வாழ்க்கை, மற்றும் உற்பத்தி முறைகளில் (patterns) நிகழ்ந்துள்ள மாற்றங்களைக்கொண்டு மாற்றி அமைக்கப்படும்.] எனவே, தோராயமாக தற்காலத்திய நிறைகளையே பயன்படுத்துவதால், விவசாயிகளின் பண மாற்றங்களில் ஏற்படும் பிறழ்ச்சிகளை நுட்பமாக அளவிட முடிகிறது.

விலைக் குறியீட்டெண்களைச் 'சுருக்கல்' கருவிகளாகக் கருதுதல்

(Price-Index Numbers as Instruments of 'Deflation')

பணத்தொடர்புடைய ஒரு வரிசையை, 'உண்மை' அளவுகளாக மாற்றுவதற்கும், விலைக் குறியீட்டெண்களை அடிக்கடிப் பயன்படுத்துவர். ஒருவிதத்தில் இது தற்கால டாலர்களில் (அல்லது வேறு பண அலகுகளில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் தொடர்ச்சியைச் சுருக்கும் ஒரு முறையாகும். பண அலகில் ஏற்பட்டுள்ள மாறுதல்களையும் கணக்கெடுத்துக்கொண்டு, அதன்படி கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியைத் திருத்தமாக்குவதே இந்த முறையின் நோக்கமாகும். திருத்தப்பட்ட தொடர்ச்சி 'மாறுத டாலர்கள்' (constant dollars) அல்லது மாறுத வாங்குந்திறன் கொண்ட டாலர்கள் அலகுகளில் கொடுக்கப்படும். இத் துறையில் மூன்றுவகை தனித்த ஆனால், தொடர்புடைய பிரச்சினைகளைக் காணலாம். இதில் பயனாகும் சொற்களும் நடைமுறையும் சிறிது திட்பமற்றவைகளே.

பணமாற்றுவழியில் பிறழ்ச்சிகளை அளவிடல்

இப் பிறழ்ச்சிகளை அளவிடுதலைப்பற்றி முன்பே கூறியுள்ளோம். சாதாரணமாக இது 'சுருக்கல்' நிகழும் நிலையாகக் கருதப்படுவதில்லை; என்றாலும், இதனை விரிவான செய்முறையின் ஒரு முதல் தோற்றமாக எண்ணுதல் பயனளிக்கும். '0' மற்றும் '1' ஆன ஆண்டுகளில் A, B என்ற இரு பொருள்களின் விலைகளான p_a, p_b என்பவற்றைக் கவனிப்போம்.

உண்மை விலைகளைமட்டும் நோக்கினால் '0' ஆண்டில் A பொருளின் 100 அலகுகளை B பொருளின் 200 அலகுகளுக்குப் பண

வழியில் மாற்றலாம்; '1' ஆண்டில் A பொருளின் 100 அலகுகளை B பொருளின் 400 அலகுகளுக்கு மாற்றலாம். எனவே, இக் கால இடைவெளியில் மாற்றுவீதங்கள் A பொருள் உற்பத்தியாளர்களுக்கு

		விலை	
		'0' ஆண்டு	'1' ஆண்டு
p_a	உண்மை	\$1·00	\$ 1·20
	ஒப்புமை	100	120
p_b	உண்மை	0·50	·30
	ஒப்புமை	100	60
p_a/p_b		100	200

ஆதரவாக நகர்ந்துள்ளன. நிகழ்ந்துள்ள பிறழ்ச்சியை 100 ஆக இருந்து, இப்பொழுது 200 ஆக மாறியுள்ள ஒப்புமை விலைகளின் விகிதத்தால் குறிப்பிடலாம்.

பொதுவாக இதனைப் பெறப்படும் அலகு விலைகளின் சராசரிக்கும், வாங்கப்படும் அலகு விலைகளின் சராசரிக்குமுள்ள விகிதமாக எண்ணலாம்—அதாவது, P_r/P_p. இந்த விகிதத்தின் மதிப்பு அதிகமானல், P_r என்பதால் குறிக்கப்பட்டுள்ள உற்பத்தியாளர்களுக்குச் சாதகமான நிலையைக் குறிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக P_r என்பது தொழிற்சாலை உழைப்பாளிகளின் மணிக்கூலி (hourly-wages) வீதத்தையும், P_p என்பது துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டையும் குறிக்கிறது என்போம்; அப்பொழுது இந்த விகிதம், 'உண்மை' மணிக் கூலியில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதாக அமைகிறது. P_r என்பது விவசாயிகளால் பெறப்பட்ட விலைகளின் குறியீட்டையும், P_p என்பது அவர்களால் வாங்கப்பட்ட பொருள்கள், தொண்டுகளின் விலைக் குறியீட்டையும் குறிப்பிட்டால்—அப்பொழுது இந்த விகிதம் முன்பு விளக்கப்பட்ட 'சமமதிப்பு' விகிதமே ஆகும். அதாவது—பண்ணைப் பொருள்களின் மதிப்பலகு ஒன்றுக்கு அவர்களுக்குத் தேவையான பொருள்கள் எவ்வளவு கிடைக்குமோ, அவைகளின் மதிப்பின் ஓர் அளவாகும். P_r என்பது ஏற்றுமதி விலைக் குறியீடாகவும், P_p என்பது இறக்குமதி விலைக் குறியீடாகவும் இருக்கும் என்போம்; அப்பொழுது $\frac{P_r}{P_p}$ என்ற விகிதம், ஏற்றுமதிகளின் மதிப்பலகு ஒன்றுக்கு எவ்வளவு இறக்குமதிப் பொருள்கள் கிடைக்கும் என்பதன் ஓர் அளவையாகும். எனவே, ஒப்பிடுதல் அலகுகளின் வழியிலேயே கொடுக்கப்படுகிறது. (அதாவது, மாற்றுக் கொடுக்கப்பட்ட பொருள்களின் ஓர் அலகின் வாங்குந் திறனில் ஏற்படும் பிறழ்ச்சிகளை

அளவிடுகிறது.) இரு குறியீடுகளும், மாற்றமாகும் (exchange) பொருள்களின் அல்லது தொண்டுகளின் விலைகளைத் திருத்தமாக அளவிடுமேயானால், இந்த விகிதமும் சிறப்பான பயனைத் தரும். இதுபோன்ற மாற்ற விகிதம், எல்லா நிலைகளிலும் பயனுள்ளதே—ஒவ்வொரு மனிதனுக்கும், ஒவ்வொரு பகுதியிலிருக்கும் ஒவ்வொரு நாட்டிற்கும்—அவைகள் மற்றப் பொருளாதாரக் குழுக்களுடன் தொடர்புகளை வைத்துக்கொண்டிருக்கும் வரை—பயனுள்ளதாகும்.

மொத்த வாங்குந் திறனின் மாறுதல்களை அளவிடுதல் (Measurement of Changes in Aggregate Purchasing Power)

வாங்குந் திறனில் ஏற்படும் மாறுதல்களை அளவிடும்பொழுது, ஓர் அலகிற்கல்லாது மொத்தமாக அளவிடுமாறு அமைப்பது எளிது. பெறப்பட்ட அலகு விலைகளுக்குப் (unit prices) பதிலாக விற்பனை செய்யப்பட்ட மதிப்பு மொத்தங்கள் (disposable value aggregates) தெரிந்திருக்கும் என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது, இந்த மொத்தங்களின் மொத்த வாங்குந்திறனை—இவைகளைத் தகுந்த விலைக் குறியீட்டெண்களைக் கொண்டு 'சுருக்கல்' செய்வதால்—கணக்கிடலாம். விற்பனை செய்யப்பட்ட மதிப்பு மொத்தமொன்றை V_d என்றும், P_p என்பதால் இந்த V_d–ஐச் செலவிடுபவர்களின் வாங்கும் சராசரி அலகு விலைக் குறியீட்டையும், Q_c என்பதால் வாங்கக் கூடிய பொருள்களின் வாயிலாக V_d-யின் மொத்த மதிப்பையும் குறிப்பிடுவோம். அப்பொழுது முறை :

$$Q_c = \frac{V_d}{P_p}$$

இதுபோன்ற 'சுருக்கலு'க்குப் பற்பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கூறலாம். குறித்த ஆண்டுகளில் பொறிவழிப் பாட்டாளிகளின் (manufacturing workers) மொத்தக் கூலிகளை அவர்களுக்குகந்த துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்களால் வகுத்தால், அந்தப் பிரிவுப் பாட்டாளிகளின் உண்மைக் கூலிகளில் உண்டாகும் மாறுதல்களின் அளவைகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன. விவசாயிகளின் உண்மையான வருமானங்களில் ஏற்படும் மாறுதல்களையும் இவ்வாறே அளவிடலாம். எனவே, மதிப்பு மொத்தங்களையோ, அல்லது அவைகளிலிருந்து கிடைத்த ஒப்புமைகளையோ, அந்த மொத்தங்கள் எந்தெந்தப் பொருள்களுக்காகவும் தொண்டுகளுக்காகவும் பயன்பட்டனவோ, அவைகளின் விலைக்குறியீட்டெண்களால் வகுப்பதுதான் இவ் வகைச் 'சுருக்கலி'ன் முக்கியப் பகுதி.

டாலர் மொத்தங்களை பருப்பொருள் பருமச் சமன்களாக மாற்றுதல் (Conversion of Dollar Sums into Physical Volume Equivalents)

'சுருக்கல்' முறையில் இதுதான் மிகவும் பழக்கமான பகுதி. கட்டடங்கள் கட்டுதலுக்கான மதிப்புகள் வருடவாரித் தொடர்ச்சியாக நமக்குத் தெரியுமென்று கொள்வோம்; கட்டடங்களின் மொத்தத்தில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றங்களை நாம் மதிப்பிட எண்ணுகிறோம் என்போம், அல்லது, தற்கால (current) டாலர்களில் நாட்டின் மொத்த ஆக்கம் பல ஆண்டுகளுக்கு உள்ளது; அவைகளை மாறுத (constant) டாலர்கள் அளவில் 'சுருக்க' வேண்டும் என்போம். இந்த இரு உதாரணங்களிலும் 'வாங்கக்கூடிய அளவுகளை' (quantities commanded) இங்கு நாம் மதிப்பிட விரும்பவில்லை; அந்த மொத்த மதிப்புகளுக்கான பருப்பொருள் பருமச் சமன்களையே நாம் மதிப்பிட எண்ணுகிறோம். இந்த மதிப்பு மொத்தங்களில் விலைமாற்றங்களால் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய விளைவுகளை நீக்கி, நிகரமான அளவுகளின் மாற்றங்களையே காண விரும்புகிறோம். முன்போலவே இப்பொழுதும் குறைத்தலுக்கான தகுந்த விலைக் குறியீட்டெண்ணைத் திருத்தமாகத் தேர்ந்தெடுத்தலே இந்தப் பிரச்சினையின் நடுப்பகுதியாகும்.

இரண்டே இரண்டு ஆண்டுகளுக்கான மொத்த மதிப்புகளை மட்டும் கருதினோமானால், அது இருபடி ஒப்பிடுதலாகும். அப்பொழுது விழுமிய குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்துவதே சிறப்பானது. இந்தக் குறியீடு காரணி மாற்றுச் சோதனைக்கு உட்பட்டதென்பதை முன்பே பார்த்துள்ளோம்—அதாவது, விலை, அளவு, மதிப்பு மூன்று குறியீடுகளும் முரண்பாடில்லாமல் அமைகின்றன. தற்போதைய பிரச்சினைக்கு இஃது எப்படிப் பயன்படுகிறது என்று பார்ப்போம். மதிப்புக் குறியீடான $\left(\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}\right)$ என்பதை விழுமிய குறியீட்டு முறையில் கணக்கிடப்பட்ட விலைக் குறியீடான $\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$ என்பதால் வகுத்தோமானால், நமக்குக் கிடைப்பது விழுமிய முறையில் கணக்கிட்ட அளவுக் குறியீடான $\sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$ என்பதாகும். அதாவது, நிறுவப்பட்ட இந்த அளவுக் குறியீட்டிற்கு, அடிப்படை, குறித்த ஆண்டுகள் ஆகிய இரண்டின் விலைகளும் நிறைகளாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

மதிப்புக் குறியீட்டை லாஸ்பெய்ரேயின் விலைக் குறியீட்டால் 'சுருக்கல்' செய்தால் — அதாவது, $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என்பதை $\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$

என்பதால் வகுத்தால்—நமக்குக் கிடைப்பது பாஸ்ச்சே முறையில் கணக்கிடப்பட்ட அளவுக் குறியீடாகும்—$\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}$—அதாவது, ஒப்பிடப்படும் இரு ஆண்டுகளில் இரண்டாவது ஆண்டின் விலைகளை (p_1) நிறைகளாகக் கொண்டது போலாகிறது. அதாவது, இவ்வகைக் குறைத்தலில் 'சூழ்நிலை'யானது அடிப்படை ஆண்டிலிருந்து குறித்த ஆண்டிற்கு மாறுகிறது. நாம் விலை ஒப்பிடுதலிலிருந்து அளவை ஒப்பிடுதல்களுக்கு மாறும்பொழுது, அதே போலவே, மதிப்புக் குறியீட்டை பாஸ்ச்சேயின் முறை விலைக் குறியீட்டால் 'சுருக்கல்' செய்தால்—அதாவது $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என்பதை $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ என்பதால் வகுத்தால்—அடிப்படை ஆண்டிலிருந்து எடுத்த விலை நிறைகளைக் கொண்ட அளவுக் குறியீடான $\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$ என்பது வரும்; இது லாஸ்பெய்ரே முறையில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாகும். பல ஆண்டுகளுக்கான மதிப்புக் குறியீடுகளைக் குறைத்து, மாறாத அடிப்படை ஆண்டு விலைகளை நிறையாகக் கொண்ட அளவுக் குறியீடுகளை நிறுவவேண்டும் என்போம்; அப்பொழுது நாம் 'குறித்த' (given) ஆண்டுகளின் அளவுகளை நிறைகளாகக் கொண்ட (பாஸ்ச்சேயின்) விலைக் குறியீடுகளைச் 'சுருக்கல்' கருவிகளாகக் கொள்ளவேண்டியதாகும்.[8] இது நடைமுறைக்கொவ்வாத முறையாகும். சாதாரணமாக, லாஸ்பெய்ரேயின் விலைக் குறியீட்டினால் குறைப்பர்; அப்பொழுது மேற்கூறப்பட்ட விளைவுகள் பயன்படும். அல்லது q_aக்களை நிறைகளாக்கிச் சிறிது மாறிய லாஸ்பெய்ரே குறியீட்டையும் பயன்படுத்துவர். நிகழ்வது ஒருவகை கலப்படமான அளவுக் குறியீடாகும். அது அடிப்படை ஆண்டு, குறித்த ஆண்டு, நிறையாகக் கொள்ளப்பட்ட a ஆண்டு—மூன்றின் 'சூழ்நிலை'களாலும் பாதிக்கப்படும். ஆகையினால், 'சூழ்நிலை' மாற்றங்களால் ஏற்படும் பிரச்சினைகளை இங்கும் சந்திப்போம். இவைகளின் அளவு சுமாரானவைகளாக இருப்பின், 'சுருக்க'லுக்கு எவ்வகையில் நிறைகளை ஏற்படுத்தினாலும் பாதகமில்லை. கொடுக்கப்பட்ட காலத்தினிடையே 'சூழ்நிலை' மாற்றங்கள்

[8] முன் கூறப்பட்டதையே வேறொரு விதமாகவும் விளக்கலாம். விலைக் குறியீடு, அளவுக் குறியீடு இரண்டும் பொருத்தமாயிருந்தால், அவைகளின் பெருக்கல் பலன் மதிப்புக் குறியீடாகுமல்லவா! எனவே, ஒரு குறியீட்டிற்கு லாஸ்பெய்ரேயின் முறையும், மற்றொன்றிற்கு பாஸ்ச்சேயின் முறையும் பயன்படுத்துவதால், ஒன்றோடொன்று பொருத்தமான விலைக்குறியீடு, அளவுக் குறியீடுகளை அதே முறைகளால் கணக்கிடலாம். அதாவது, அடிப்படை ஆண்டு நிறை கொண்ட லாஸ்பெய்ரேயின் விலைக் குறியீட்டை, குறித்த ஆண்டு நிறைகளைக் கொண்ட பாஸ்ச்சேயின் அளவுக் குறியீட்டுடன் பெருக்கினால், உண்மை மதிப்புக் குறியீடு கிடைக்கும். இதுபோலவேதான், லாஸ்பெய்ரேயின் அளவுக் குறியீட்டையும், பாஸ்ச்சேயின் விலைக் குறியீட்டையும் பெருக்கினால் கூட நிகழும்.

அதிகமாக விருப்பின், 'சுருக்கல்' திருத்தமாக அமையாது போவது இயல்பே. பொதுவாகக் கூறின், சிறு கால இடையில் நிகழும் குறைத்த மதிப்புத் தொடர்ச்சிகளை ஒப்பிடுவது சற்றுத் திருத்தமாகவும் பெருங் கால இடையில் ஒப்பிடுவது சற்றே திருத்த மற்றும் அமையும் எனத் துணியலாம்.

முன் பகுதிகளில் காரணிகளை மாற்றுவது எப்படி என்பதனைக் கூறியுள்ளோம். விலை அசைவுகளே இல்லாமலிருந்தால் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய அளவு மாற்றங்களை அந்த முறை உண்மையாக அளக்கும் என்று கூறமுடியாது என்பதை நாம் நினைவில் வைத்துக் கொள்ளவேண்டும். மிகக் குறைவான கால இடைவெளியில் நிகழும் பொருளாதார மாற்றங்களும் பெரிதும் சிக்கலானவை; அவைகளின் விளைவுகளையெல்லாம் சரிக்கட்டக்கூடியதாக (offset) எந்த இயற் கணித முறைகளும் (algebraic manipulations) அமைய முடியாது. ஆனால், தோராயங்கள்கூட மிக்க பயனுள்ளவை யாதலின், அவைகளைப் பெறும் கணித முறைகள் பொருத்தமுள்ளவைகளாக (consistence) அமைவது நல்லது. இதுபோன்ற 'சுருக்கல்' முறைகளில் வாய்பாட்டைவிட முக்கியமானது—'சுருக்க'லுக்கான குறியீட்டைப் பெறுவதற்குப் பயன்படும் குறிக்கப்பட்ட விலைகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதே யாகும். எந்த மதிப்பு மொத்தத்தைக் குறைக்கவேண்டுமோ, அதனுள் இடம்பெறும் பொருள்கள், தொண்டுகளின் பிரதிநிதிகளையே இங்கும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். (வாங்குந் திறனைப் பற்றியும், வாங்கப்படக்கூடிய அளவுகளைப்பற்றியும் கருதிய நிலை இதைக் காட்டிலும் வேறானதே.) பொருளாதாரத் துறையில் பொருத்தமற்ற விலைக்குறியீடுகளால் 'சுருக்கல்' செய்வது மிகச் சாதாரணமாக நிகழ்ந்துவரும் பிழையாகும்.

நாட்டு வருமானம், அல்லது நாட்டு ஆக்க மதிப்பீடுகளைத் 'தற்கால' (current) டாலர்களிலிருந்து 'மாறுத' (constant) டாலர்கள் அளவில் மாற்றுவதே பொருளாதாரச் 'சுருக்கலில்' நடைபெற்றிருக்கும் முக்கியச் செயலாகும். மொத்தமாக ஒரே ஒரு வகுத்தலால் கூட்டு மொத்தங்களைச் சுருக்கல் செய்யாமல், விரிவாக உட்பகுதிகளில் 'சுருக்கல்' செய்வதே இங்குச் செயலாக்கப்படும் முறை. எனவே, தனிப் பகுதிகளுக்கு 'சுருக்கல்' அளவைகளைத் (deflators) தயாரிக்கவேண்டியதாகும்; ஒவ்வொரு பொருளாதாரப் பிரிவிலும் நிகழும் விலை மாற்றங்களுக்குத் திருத்தல் அமைக்குமாறு, 'சுருக்கல்' அளவைகளைக் கணக்கிடவேண்டும்.[9]

[9] அமெரிக்க டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமர்ஸாரின் (U.S. Department of Commerce) நாட்டு வருமானக் குழுவினர் (National Income Unit), நாட்டு மொத்த ஆக்கத்தைச் 'சுருக்கலு'க்கான முறைகளை வகுத்துள்ளார்கள். 'ஸர்வே ஆஃப் கர்ரன்ட் பிஸினஸ்' (Survey of Current Business) என்ற வெளியீட்டின், அண்மையில் வெளிவந்த 'நாட்டு வருமானச் சேர்க்கையில்' (National Income Supplement) இதற்கான விவரங்களைக் காணலாம்.

'சுருக்கல்' முறைக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு : அமெரிக்காவில், மாதவாரியாகவும் ஆண்டுவாரியாகவும் வழங்கப்படும் பெரும் பொறியியல் காண்ட்ராக்டுகளைப் (contracts) பற்றிய புள்ளிவிவரங்களை 'தி என்ஜினீரிங் நியூஸ் ரிகார்டு' (The Engineering News Record) என்ற வெளியீடு தொகுக்கிறது. இவை தொழில் வழி, பொது வழி, பெரும் வியாபாரக் கட்டடங்களைக் கட்டுவதற்கும்; மற்றும் நெடுஞ்சாலைகள், நீர்த்தேக்கங்கள், பாலங்கள் போன்ற பல பெரிய தான கட்டடங்களுக்குமானவை. இத் திட்டங்களுக்கான மொத்த டாலர் மதிப்புகளைப் பருப்பொருள் பருமச் சமன்களாக (volume equivalents) மாற்றவேண்டும். எனவே, கட்டும் விலை

அட்டவணை 13-18

உண்மையான, மற்றும் 'சுருக்கல்' செய்யப்பட்ட மதிப்புகள், 1939-53 ஆண்டுகளில் வழங்கப்பெற்ற காண்ட்ராக்டுகளுக்கு

ஆண்டு (1)	வழங்கப்பெற்ற கட்டடக் காண்ட்ராக்டுகளின் மொத்த மதிப்பு: உண்மையானது* (மிலியன் டாலர்களில்) (2)	வழங்கப்பெற்ற கட்டடக் காண்ட்ராக்டுகளின் மொத்த மதிப்பு: ஒப்புமை (3)	கட்டட விலைக் குறியீடு (4)	கட்டடப் பருமத்திற்கான குறியீடு (3) ÷ (4) (5)
1939	1,264	100.0	100.0	100.0
1940	2,190	173.3	102.7	168.7
1941	3,768	298.1	107.1	278.3
1942	6,170	488.1	112.6	433.5
1943	1,817	143.7	115.9	124.0
1944	972	76.9	118.9	64.7
1945	1,485	117.5	121.1	97.0
1946	3,373	266.9	132.8	201.0
1947	3,375	267.0	158.5	168.5
1948	4,145	327.9	174.5	187.9
1949	5,092	402.8	178.2	226.0
1950	9,529	753.9	190.2	396.4
1951	9,457	748.2	202.9	368.8
1952	11,466	907.1	210.5	430.9
1953	9,911	784.1	218.2	359.3

* பெரிதான கட்டடங்களுக்கான காண்ட்ராக்டுகளே இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. என்ஜினீரிங் நியூஸ் ரெகார்டில் மதிப்புச் சிறுமங்கள் (minimum) உள்ளன. இந்த அடிப்படை விவரங்களுக்குதவியதற்காக, அந்த வெளியீட்டாருக்கு எனது நன்றி உரித்தாகும்.

† அமைப்பு எஃகு உருவங்கள், போர்ட்லெண்டு சிமெண்ட், மரம், திறம் பெற்ற தொழிலாளி முதலியன, அவைகளுக்கேற்ற நிறைகளுடன் கட்டட விலைக் குறியீட்டில் இடம் பெற்றுள்ளன.

களுக்கான ஒரு குறியீடும், கட்டடங்கள் இல்லாத திட்டங்களுக்கான ஒரு குறியீடும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. இந்த எடுத்துக்காட்டிற்கான கட்டட கன்ட்ராக்டுகளையும், கட்டட விலைகளின் குறியீடுகளையும், 'சுருக்கல்' செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியையும் (பெரிதான கட்டடங்கள் கட்டுவதன் பருப்பொருள் பருமங்களைக் குறிப்பிடுவதானவை) அட்டவணை 13-18-ல் காணலாம். உண்மையான, மற்றும் குறைக்கப்பட்ட மதிப்புகள் படம் 13.5-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட 15 ஆண்டு இடையில், கட்டுதல்களுக்கான விலைகள்—விலைக்குறியீட்டில் இடம்பெற்றுள்ள மாதிரிப் பொருள்களாலும், தொண்டுகளாலும் அளவிடும்பொழுது—இருபங்கைவிட அதிகமாயுள்ளன. வழங்கப்பெற்ற கன்ட்ராக்டுகளின் பதிவுகளை முதலில் 'தற்கால' டாலர்களில் கூறியுள்ளோம்; பிறகு நிகழ்த்தப்பட்ட மாற்றங்களினால் கட்டடப் பருமத்திற்கான குறியீடுகளைக் கணித்ததால், முதலில் கிடைத்த மதிப்புகள் பெரும் அளவில் மாறியுள்ளன.

துணை நூல்கள்

Allen, R. G. D., 'Statistics for Economists,' Chap. 6.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics,' Chaps. 20, 21.

Fisher, Irving, 'The Making of Index Numbers.'

Frisch, R., 'Annual Survey of Economic Theory: The Problem of Index Numbers,' 'Econometrica,' Jan., 1936.

Frisch, R., 'Some Basic Principles of Price of Living Measurements,' 'Econometrica,' Oct., 1954.

Konus, A. A., 'The Problem of the True Index of the Cost of Living', 'Econometrica,' Jan., 1939.

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business,' Chaps. 8, 9.

Mills, F. C., 'The Behavior of Prices,' pp. 219-251, 323-355.

Mitchell, W. C., 'The Making and Using of Index Numbers,' Bulletin 656, U. S. Bureau of Labor Statistics.

Mudgett, B. D., 'Index Numbers.'

Riggleman, J. R. and Frisbee, I. N., 'Business Statistics,' 3rd ed., Chap. 13.

Simpson, G. and Kafka, F., 'Basic Statistics,' Chap. 9.

Staehle, H., 'A Development of the Economic Theory of Price Index Numbers,' 'The Review of Economic Studies,' June, 1935.

Stauber, B. R., Koffsky, N. M. and Randall, C. K., 'The Revised Price Indexes,' 'Agricultural Economics Research,' April 1950.

Ulmer, M. J., 'The Economic Theory of Cost of Living Index Numbers.'

U. S. Bureau of Labor Statistics, 'The Consumer Price Index,' 'Bulletin' 1140, 1953.

U. S. Bureau of Labor Statistics, 'A Description of the Revised Wholesale Price Index,' 'Monthly Labor Review,' Feb. 1952.

U. S. Bureau of Labor Statistics, 'Techniques of Preparing Major BLS Statistical Series,' 'Bulletin' 1168, Dec. 1954, pp. 63-95.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method,' 3rd ed., Chap. 14.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chap. 25.

இந்த அத்தியாய முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும் பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும் நூலின் இறுதியிலுள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

14. உற்பத்தியின் குறியீடுகளும் உற்பத்தித்திறனின் குறியீடுகளும்

இரு யுத்தங்களுக்கிடையேயும், இரண்டாவது உலக யுத்தத்திற்குப் பிறகும், பொருளாதார விவரங்களை அளவிடும் கருவிகள் என்று சொல்லக்கூடியவைகளின் எண்ணிக்கையிலும் திட்பத்திலும் மிகுந்த முன்னேற்றத்தைக் காண்கிறோம். அமெரிக்காவில் சிறப்பாக முன்னேற்றம் காணப்படுகிறது. எனினும், மற்ற நாடுகளிலுங்கூட முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது எனலாம். பொருளாதாரத் துறைகளைப்பற்றிய எத்தகைய பெரிய பகுதிகளை நாம் இன்னமும் அறியவில்லை என்பதனை, முதல் உலக யுத்தத்தின் போது கண்டோம். அப்பொழுது பற்பல பொருளாதாரத் துறைகளைப்பற்றிக் கிடைக்கக்கூடிய தகவல்கள் மிகக் குறைவாகவே இருந்தன; முக்கியமாகக் கீழ்க்கண்டவற்றைக் குறிப்பிடலாம். உற்பத்தியின் தன்மை மற்றும் பருமத்தின் அளவுகள்; உற்பத்தித் திறன்; நாட்டு வருமானத்தின் அளவும் பரவலும்; சேமிப்பின் பருமமும் மூலங்களும்; துய்ப்போரின் செலவிடுவதற்கான வருமானங்கள். பொருள்களின் இருப்பும் இருப்பிடங்களும் யுத்தத்தின் முடிவிற்குப் பிறகு வியக்கத்தக்க முன்னேற்றமடைந்தன. அரசாங்கத்தின், வியாபாரத் துறையின், பாங்கு முறையின், மற்றும் பல பொருளாதாரத் துறைகளின் தேவைகள் புள்ளியியல் துறையில் மிகையான ஊக்கத்தை உண்டுபண்ணி, அத் துறையிலும் பல முன்னேற்றங்களை ஏற்படுத்தின. இவைகள் 1920-க்குப் பிறகான செழுமையுள்ள பத்தாண்டுகளில் தொடங்கப்பெற்று, 1930-க்கப்பால் மந்தநிலையுடைய பத்தாண்டுகளிலும், யுத்தத்தினால் பெரிதும் பாதிக்கப்பட்ட 1940-க்கப்பாலான பத்தாண்டுகளிலும் சுழற்சியுணர்வு (cycle-conscious) பெற்றும், 1950-க்குப் பிறகான பத்தாண்டுகளில் வளர்ச்சியடைந்தும் வந்துள்ளன. இந்த ஆண்டுகளில் ஏற்பட்ட பல முன்னேற்றங்களில் முக்கியமானது, உற்பத்தி அல்லது வெளிப்பாட்டுக்கான திருத்தமானதும் விரிவானதுமான குறியீடுகளை அமைத்தல் ஆகும்.

உற்பத்தியை அளவிடுவதைப்பற்றிய முன்னேற்றங்கள் இரு முனைகளில் ஏற்பட்டன. நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி, மற்றும் நாட்டின் வருமானத்தை அளவிடும்பொழுது, எல்லாப் பொருளாதாரத் துறைகளையும் சேர்த்து, நாட்டிற்கு மொத்தமான விவரங்களை வெளியிடுவதற்கான ஏற்பாடுகள் செய்யப்பட்டன. முதலில், இந்த அளவைகள் தற்கால (current) பண அலகுகளான, டாலர், பவுண்டுகளில் கொடுக்கப்பட்டுவந்தன. நாட்டின் மொத்தப் பொருளாதார இயக்கங்களுக்கான டாலர் அளவைகளாக அவை இந்த நாட்டில் (அமெரிக்காவில்) வழங்கின. அமெரிக்காவில் நாட்டின் ஆக்க, வருமான அளவைகளுடன் மற்றும் பல குறியீடுகளும் கணக்கிடப்பெற்றுவந்தன; அவைகள் வியாபாரத்தின் பருமத்தையும், குறித்த பல துறைகளில் ஏற்பட்டுள்ள உற்பத்தியையும் அளவிடும் குறியீடுகள். தொடக்கத்திலிருந்தே, இத் துறைகளில், புள்ளியியலறிஞர்கள், பருப்பொருள் அலகுகளையே (physical units) வைத்து, நாட்டின் வருமானத்தையும் உற்பத்தியையும் பாதிக்கின்ற விலை மாற்றங்களால் பிறழாத குறியீடுகளைக் கணக்கிட்டுவந்தனர். நாட்டின் உற்பத்தியையும், அதன் பல பகுதிகளையும் 'சுருக்கல்' செய்யக்கூடிய கருவிகளைப் பயன் படுத்தி, விலை மாற்றங்களின் விளைவுகளுக்கு அக் குறியீடுகளைத் திருத்தமாக்கத்தக்க முறைகள் ஏற்பட்டுவந்தன; இவைகளுக்குப் பிறகு இந்த இருமுனை முன்னேற்றங்களும் ஒன்றுசேர்க்கப் பெற்றுள்ளன. 'சுருக்கலு'க்கான முறைகளில் திட்பம் ஏற்பட்ட பிறகும், பருப்பொருள் அலகுகளில் உற்பத்தியை அளவிடும் குறியீடுகளைப் பல பகுதிகளில் பொருளாதாரக் குறிப்பீடுகளாகப் (indicators) பயன்படுத்திவருகின்றனர்; முக்கியமாக, மாதாந்தர அல்லது மூன்று மாதத்திற்குரிய தொழில் உற்பத்தியை அளவிடப் பயன்படுத்துகின்றனர். அத்தகைய உற்பத்திக் குறியீடுகளின் கணக்கிடும் முறைகளைப்பற்றி இனிக் கூறுவோம்.

அடையாளக் குறியீடுகள் (Notation): பருப்பொருள், பருமக் குறியீடுகளைக் குறிக்க Q, Q_{01} என்ற அடையாளங்களையும், விலைக் குறியீடுகளுக்கு P, P_{01} என்ற அடையாளங்களையும் முன்பே பயன்படுத்தியுள்ளோம். இந்த அதிகாரத்தில் புதிதாக மற்றும் சில அடையாளங்களைப் பயன்படுத்துவோம்:

F: ஓர் உற்பத்தி முறையில் காரணி உட்பாட்டின் (factor input) ஓர் அளவை.

E: ஓர் உற்பத்தி முறையில் புகும் மனித முயற்சியின் (human effort) மொத்தம்.

M: உழைப்பு உட்பாட்டின் (labor input) மனித-மணிகளின் (man-hours) ஓர் அளவை.

N: ஓர் உற்பத்தி முறையில் வேலை பார்க்கும் பணியாட்களின் எண்ணிக்கை.

P_r: உற்பத்தித்திறன் விகிதம், அல்லது உற்பத்தித் திறன் குறியீடு—Q/F, Q/M, Q/N என்பனபோன்றவை.

R: ஒரு வெளிப்பாட்டு அலகிற்குத் தேவையான காரணிகளின் குறியீடு : F/Q, M/Q அல்லது N/Q.

Q/E: மனித முயற்சியானது காரணி உட்பாடாக இருக்கும்பொழுது உற்பத்தித்திறன் குறியீடு.

Q/M: உழைப்பு உட்பாட்டின் ஒரு மனித-மணிக்கான வெளிப்பாட்டை அளவிடும் உற்பத்தித்திறன் குறியீடு.

(Q/E மற்றும் Q/M இரண்டும் சமமாகவிருக்கலாம் ; ஆனால், சில சமயங்களில் இரண்டாவது சற்றுக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டதாகும்).

M/Q: வெளிப்பாட்டின் ஓர் அலகிற்குத் தேவைப்படும் மனித–மணி உழைப்பின் குறியீடு.

தனித் தொழில்களுக்கும், தனிப் பொருள்களுக்கும், தனித் தொழிற்சாலைகளுக்குமான வெளிப்பாடு, உழைப்பு உட்பாட்டின் மனித-மணிகள், அல்லது வெளிப்பாட்டின் ஓர் அலகிற்குத் தேவைப் படும் உழைப்பு முதலியனவற்றைக் குறிப்பிட முறையே சிறிய q, m, r-களை ஒட்டுக் குறிகளாகப் (subscripts) பயன்படுத்துவோம்.

உற்பத்திக் குறியீடுகளின் விளக்கம்

குறித்த ஒரு பொருளாதாரப் பகுதியின் உற்பத்திக்கான குறியீட்டைக் கணக்கிட வேண்டுமானால், வெளிப்பாடுகள் பலவற்றிற்கான அளவைகளைத் தகுந்த முறையில் தொகுக்கவேண்டும். நாட்டின் ஆக்கத்திற்கான மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடும்பொழுது, இவை போன்ற அளவைகள் மதிப்பலகுகளில் கொடுக்கப்பட்டிருக்குமானால், அவைகளைத் தொகுப்பது எளிதுதான். எல்லா மதிப்புகளுமே டாலர் அலகுகளில் இருக்கும். அப்படி நேராமல், அடிப்படை விவரங்கள்—பவுண்டுகள், காலன்கள், புஷல்கள், கஜங்கள் போன்ற—அளவினங்களில் கிடைக்குமானால், அவைகளை நேரிடையாக மொத்தமாக்குவது இயலாது. எல்லாவற்றிற்கும் பொதுவான ஒரு காரணியை உட்புகுத்திய பிறகே பொருளுள்ள சேர்க்கை செய்யப்படவேண்டும். எனவே, உற்பத்திக் குறியீடு, பருப்பொருட் பருமங்களின் சாதாரண மொத்தமன்று என்பதனை மேற்கூறிய பொதுப்படையான ஒரு காரணி தேவைப்படுவது நமக்கு உணர்த்தும். இக் குறியீடுகளை நன்கு அறிவதற்கு இந்தத் தேவையும் பயன்படுகிறது. அத்தகைய பொதுவான அடிப்படையானது பயன்பாடு (utility) என்ற கருத்து வழியில் அமையுமானால், அது பொருளாதார அறிஞருக்கு மகிழ்ச்சியைத் தரும். பல்வகைப்

பொருள்களின் அலகுகளைக் குறித்த எண்ணிக்கையுடைய 'பயன்பாட்டு' அலகுகளுக்குச் சமமாக்க முடிந்தால் (அந்த எண்ணிக்கை துய்ப்போர் எல்லோருக்கும்கூடச் சமமாகவேண்டும்), அந்தப் பயன்பாட்டு அலகுகளை எளிதில் மொத்தமாக்கிவிடலாம்; பிறகு, உற்பத்திப் பருமத்தின் அசைவுகளைத் திட்பமாக அளவிடலாம். இந்த அடிப்படையில் கணக்கிடப்பட்ட லாஸ்பெய்ரேயின் குறியீடு :

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 u_0}{\Sigma q_0 u_0} \qquad (14.1)$$

என்ற வடிவத்தில் அமையும். இங்கு u_0 என்பது அடிப்படை யாண்டில், குறித்த ஒரு பொருளின் பரும அலகு ஒன்றிற்கான பயன்பாட்டு அலகுகளைக் குறிப்பிடும். இந்த முறை நம்மால் செயற்படுத்த முடியாதது வருந்தத்தக்கதாகும். பயன்பாடு என்பது, துய்ப்புப் பொருளின் நன்கு பிடிபடாத ஒரு தன்மை (elusive quality) ஆகும். அது மனிதனுக்கு மனிதன் மாறக்கூடியது; தனி மனிதனிடத்திலும் மாறக்கூடியது; பருப்பொருள் அலகுகளைப் பயன்பாட்டு அலகுகளாக மாற்றுவதற்கு நம்மிடம் அளவுகோல்கள் இல்லை. எனவே, உற்பத்திக் குறியீடுகளை நலத்தின் (welfare) உறுப்புகளாகக் கருதமுடியாது என்பதும் தெளிவாகிறது.

பருப்பொருட் பருமங்களைத் தொகுப்பதற்குக் கிடைக்கும் பொதுப் பகுவெண்கள் (denominators) இரண்டு — விலைகளும், உழைப்புக்காலமும். பருப்பொருள் பரும அலகுகளை, ஓர் அலகிற்கான விலையால் பெருக்குவதால் நமக்கு டாலர் அளவைகள் கிடைக்கின்றன; எனவே, இவைகளைத் தொகுத்து மொத்த மதிப்புகளாக்கி, மற்றக் காலங்களுக்கும் மொத்த மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்; அல்லது, ஓர் அலகுப் பொருளைத் தயாரிப்பதற்குத் தேவைப்படும் மனித-மணிகளைப் பருப்பொருட் பரும அளவு அலகுகளால் பெருக்கினால், நமக்கு ஒவ்வோர் உற்பத்திக்கும் பொருத்தமான மனித-மணிகள் கிடைக்கும்; இந்த மனித-மணி அளவைகளை, மனித-மணி மொத்தங்களாக்கி, மற்றக் காலங்களுக்கும், அதே வகை மொத்தங்களைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். பொதுப்படையான மதிப்புகளைப் பெற நாம் அலகுகளுக்கான விலைகளைப் பயன்படுத்துவதால், நிறை அடிப்படையாகக் கொண்ட காலத்தின் 'சூழ்நிலை'யை (Regimen) அதன் விலை-அமைப்பைக்கொண்டு குறிப்பிட்டாற்போலாகிறது. அதற்குப் பதில், மனித-மணிகளை எடுத்துக்கொள்வதால், 'சூழ்நிலை'யை, உற்பத்திப் பெருக்கில் இடம்பெறும் பொருள்களுக்கான உழைப்பு-அலகுகளால் குறிப்பிட்டதாகிறது. இரு நிலைகளிலுமே, சூழ்நிலைக் காலத்தின் (அதாவது, நிறை அடிப்படையாகும் காலத்தின்) நிகழ்ச்சிகளும் நிறுவனங்களும், உற்பத்திக் குறியீட்டின்மேல் தங்கள் ஆக்கத்தைச் செலுத்தும்.

உற்பத்திக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதில், நிறைகளைத் தேர்ந்தெடுத்துப் பயன்படுத்தும் முறைகளைப்பற்றிப் பின்பு கூறுவோம். பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டின் குறியீடுகள், பருப்பொருள் மாற்றங்களைமட்டும் அளவிடும் கருவிகளல்ல என்பதை அழுந்தக் கூறுவதே இந்த விளக்கத்தின் நோக்கமாகும். நடைமுறைச் 'சூழ்நிலை'களில் நிகழும் ஏனைய துணை நிகழ்ச்சிகளிலிருந்து இவைகளைத் தனித்து எடுத்துவிடமுடியாது. காணப்பட்ட வெளிப்பாட்டு மாற்றங்களுக்கு விலை-அமைப்போ, உழைப்பலகுத் தேவைகளின் அமைப்போ காரணமாகும்; இவைகளுக்குக் காரணம் சிக்கல் நிறைந்த பொருளாதாரச் 'சூழ்நிலை'யே.

பின், உற்பத்திக் குறியீட்டெண்களை எப்படி விளக்குவது? குறித்த பொருளாதாரப் பகுதிகளில் நடைபெற்றுள்ள வேலையின் பருப்பொருட் பருமத்தின் அளவைகள் அவை; வேலையை வெளிப்பாட்டு மொத்தங்களால் அளவிடுகிறோம். ஆனால், குறித்த ஒரு 'சூழ்நிலை'யை, அல்லது பலவற்றின் தொகுப்புகளைக் கொண்டு மதிப்புகளை (அல்லது நிறைகளை) இடுகிறோம். தனித்த உற்பத்திகளின் தொடர்ச்சிகளை மதிப்பிடுவதிலும் அல்லது நிறையிடுவதிலும்தான் நாம் பொதுப்படையான பகுவெண்ணைப் (denominator) பயன்படுத்தி, அவைகளை மொத்தமாக்குகிறோம்.

பிற்பாடு நிகழும் விளக்கத்தில் நான்கு வகையான உற்பத்திக் குறியீடுகளைப் பிரித்தறிதல் நல்லது. முதற்கண் உள்ளவை திட்டம் பெறாத குறியீடுகளான முதனிலைக் குறியீடுகள்; இவை முன் அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்ட விலைக்குறியீடுகளைப் போன்றவைகள்; அவற்றைப் போலவே கணக்கிடப்படுபவை. இரண்டாவதாக, பருவகாலத் திருத்தங்கள் (seasonally corrected) அமைக்கப்பெற்ற மாதாந்தர அல்லது மூன்று மாதத்திற்கான குறியீடுகள். இவைகளை, நடைமுறையில் திருத்தப்பெற்ற குறியீடுகள் என்று அமெரிக்காவில் கூறுவதுண்டு; ஐக்கிய நாடுகளின் புள்ளிவிவர அலுவலகம் இவற்றை இரண்டாம் நிலைக் குறியீடுகள் என்று கூறுகிறது. மூன்றாவது வகை நெடுங்காலப் போக்கிற்குத் திருத்தப்பெற்ற குறியீடுகள் (trend-adjusted); இவை பருவகால மாற்றங்களுக்கும், நெடுங்காலப் போக்கிற்கும் திருத்தமாக்கப்பட்டவை. ஆராய்ச்சியாளரின் நோக்கம், வியாபாரப் பருமத்தில் நிகழும் சுழற்சி மாற்றங்களை அறிவதாகவிருந்தால், இவ் வகைக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவர் என்பதனை இக் குறியீடுகளின் பெயரே நமக்கு விளக்கிவிடும் தொடக்கத்தில் மதிப்புகள் வழியில் (value terms) காணப்படும் வெளிப்பாட்டின் தொடர்ச்சிகளைச் 'சுருக்கு'வதால் கிடைக்கும் பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டின் அளவைகளை நான்காவது வகையாகக் கூறலாம். இவை

களைப்பற்றித்தான் சென்ற சிலபக்கங்களில் விவரித்தோம்; இவைகளை 'வருவிக்கப்பெற்ற' (derived) குறியீடுகள் என்று அழைப்போம்.

முதல்நிலை உற்பத்திக் குறியீட்டெண்கள்

விலைக் குறியீட்டெண்களை அமைக்கும்பொழுது எழுந்த பிரச்சினைகளேதாம், இப்பொழுதும், முதல்நிலை உற்பத்திக் குறியீடுகளை அமைப்பதிலும் எழும். வாய்பாடு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுப்பது, நிறைகளை அமைப்பது, மாதிரியின் மொத்த அடக்கத்தை (coverage) அளவிடுவது, நிறை அடிப்படை ஒப்பிடுதல் அடிப்படைகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது—இவைகளைப்பற்றிச் சுருக்கமாகக் கீழே கூறுவோம்.

வாய்பாடு தேர்ந்தெடுத்தல்

இரண்டு காலங்களில் ஏற்பட்டுள்ள உற்பத்தி மட்டங்களை ஒப்பிடுவதற்கு (இருநிலை ஒப்பிடுதல்)நமக்குள்ள வாய்பாடுகள்—லாஸ்பெய்ரேயினது, பாஸ்ச்சேயினது, விழுமியது, எட்ஜ்வர்த்தினது, மற்றும் மாற்றப்பட்ட லாஸ்பெய்ரேயினது ஆகியவையாகும் (அதிகாரம் 13ஐப் பார்க்க). அளவினக் குறியீடுகளை அமைக்கும்பொழுது p, q-க்களை மாற்றி அமைக்கவேண்டும். லாஸ்பெய்ரேயின் உற்பத்திக் குறியீட்டு வாய்பாடு :

$$Q_{01} = L = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \qquad (14.2)$$

பாஸ்ச்சேயினது $$Q_{01} = P = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \qquad (14.3)$$

மற்ற வாய்பாடுகளும் இவ் வகையிலேயே மாறி அமையும். p, q இரண்டுல் மாறி வந்துள்ளன. 'சூழ்நிலை'யைக் குறிப்பிட விலை அமைப்பை அல்லது நிறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம் என்பதை உணர்த்தும் என்று முன்பே விளக்கியுள்ளோம். எனவே, லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாட்டின் (14.2) பகுதியானது '1'ஆம் காலத்தில் உற்பத்தியான பொருள் அளவுகளை '0' காலத்தில் இருந்த விலைகளால் பெருக்கி வந்த மதிப்புத் தொகைகளின் மொத்தம் ; விகுதியானது, '0' காலத்தில் உற்பத்தியான பொருள் அளவுகளை, அதே காலத்திய விலைகளால் பெருக்கி வந்த தொகைகளின் மொத்தம். இரண்டிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் அளவு மாற்றங்களால் ஏற்பட்டதுதான்.

அடிப்படை-ஆண்டுச் 'சூழ்நிலை', குறித்த-ஆண்டுச் 'சூழ்நிலை' இரண்டின் கலப்பான ஒன்று, அல்லது இரண்டுக்குமிடையே இருக்கக்கூடிய ஒரு காலத்திய 'சூழ்நிலை'—இவைகளில் எதைத்

தேர்ந்தெடுப்பது என்பதே பிரச்சினை. தேவைப்பட்ட விவரங்கள் கிடைக்குமாயின், அடிப்படை, மற்றும் குறித்த ஆண்டுகளின் 'சூழ்நிலை'கள் இரண்டையும் பயன்படுத்தும் விழுமிய, மற்றும் எட்ஜ்வர்த்தின் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தலாம். அடிப்படை-ஆண்டின் 'சூழ்நிலை'க்கும் குறித்த-ஆண்டின் சூழ்நிலைக்குமுள்ள வித்தியாசம் சிறிதாயிருப்பின்—$E_2 = L - P$ என்பதனால் அளவிடப் படுவது—எந்த வாய்பாட்டையும், தேவைக்கேற்பப் பயன்படுத்தலாம்; சூழ்நிலை வித்தியாசங்கள் அதிகமாகவிருந்தால், எந்த வாய் பாட்டைப் பயன்படுத்தினாலும், ஒப்பிடுதல் ஆபத்தானதாகவே இருக்கும்.

உற்பத்திக் குறியீடும், அதேபோன்ற விலைக் குறியீடும் ஒன்றுக் கொன்று பொருத்தமாகவிருந்து, அவைகளின் பெருக்கல் பலன் உண்மை மதிப்புக் குறியீடாக அமைவது மிக நல்லது என்று கருதப்படுகிறது. ஐக்கிய நாடுகளின் புள்ளிவிவர அலுவலகம் இந்தத் தன்மையை எந்த அளவுக் குறியீடும் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்று வலியுறுத்துகிறது; இதனை முதல்நிலை முக்கிய மானது என்று மட்ஜெட்டும் (Mudgett) கருதுகிறார். விழுமிய குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினால், இத் தன்மை நிறைவடையும் என்பதை எளிதில் அறியலாம். நிறை-அடிப்படையை மாற்றுவ தாலும் இதை நிகழ்த்தலாம். அஃதாவது, Q_{01} என்பதனை, லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாடான $\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$ என்பதிலிருந்தும், P_{01} ஐ பாஸ்ச்சேயின் வாய்பாடான $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ என்பதிலிருந்தும் கணக் கிட்டால், அவைகளின் பெருக்கல் பலன் $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ அல்லது V_{01} ஆகும். இதே பலனை, பாஸ்ச்சேயின் அளவுக் குறியீட்டையும் லாஸ்பெய்ரேயின் விலைக் குறியீட்டையும் பெருக்குவதாலும் பெறலாம். நடைமுறையில் இந்த விதியைப் பின்பற்றுவது கடினமே; குறித்த காலம்—மாதம், அல்லது ஆண்டு—மிக அண்மையதாயிருந்தால், விவரங்கள் கிடைப்பது அரிது.

அலகு விலைகளால் (unit prices) நிறையாக்காமல், அலகு உழைப்புத் தேவைகளால் நிறையாக்குவதாலும் உற்பத்திக் குறியீ டொன்றைக் கணக்கிடலாம். அந்தக் குறியீட்டிற்கான லாஸ்பெய் ரேயின் வாய்பாடு :

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 r_0}{\Sigma q_0 r_0} \quad (14.4)$$

இங்கு r_0 என்பது, அடிப்படைக் காலத்தில் குறித்த ஒரு பொருளின்

ஓர் அலகினை உற்பத்திசெய்யத் தேவைப்படும் மனித-மணி உழைப்பைக் குறிக்கும். மேற்கண்ட அளவையின் பகுதியும் விகுதியும் மனித-மணிகளின் மொத்தங்களாகும். நிறையாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது r_0 ஆதலால், இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் '0' காலத்திலிருந்து '1' காலத்திற்கான உற்பத்தி அளவுகளில் நிகழ்ந்துள்ள மாற்றத்தை அளவிடும். உற்பத்தித்திறனை அளவிடுவதே குறியீடுகளின் நோக்கமாக இருப்பின், இத்தகைய குறியீட்டைச் சிறப்பாக ஏற்கவேண்டியதே. ஆனால், தற்காலத்தில் தேவைப்படும் உழைப்பு அலகுகளைப்பற்றிய தகவல்கள் நம்மிடம் மிகக் குறைவாகவே இருப்பதால், இந்த வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தமுடியாது என்றே கூறவேண்டும்.

மேற்கண்ட விளக்கம் இரு காலங்களிடையே உள்ள உற்பத்தி மட்டங்களை ஒப்பிடுதலைப்பற்றியதே ஆகும். அடிக்கடி நிகழும் மாற்றங்களை அறிவதற்காக ஒரு தொடர்ச்சியான குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடும்பொழுது, நிறைகள், வாய்பாடுகளைப்பற்றிய நமது சுதந்திரம் மேலும் பாதிக்கப்பெறும். எனவே, இந்த நிலையில், லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாட்டையோ, லாஸ்பெய்ரேயின் சிறிது மாற்றிய வாய்பாட்டையோ பயன்படுத்தவேண்டும். இந்தத் துறையில், பண்டுகளிலும், முறைகளைத் தரப்படுத்த ஐக்கிய நாட்டு ஸ்தாபனம் முயற்சிசெய்து வருகிறது. மாதாந்தர, அல்லது காலாண்டுக்குரிய தொழில் உற்பத்திக் (விவசாயமல்லாதது என்று பொருள்) குறியீடுகளைக் கணக்கிட, அடிப்படை-ஆண்டு நிறைகளைக் கொண்ட லாஸ்பெய்ரேயின் குறியீட்டைப் பயன் படுத்தவேண்டும் என்று அது சிபாரிசு செய்துள்ளது. ஒப்பிடுதலுக்கான அடிப்படைக் காலத்தைத் தவிர்த்து, வேறு ஓர் ஆண்டிலிருந்தோ அல்லது காலத்திலிருந்தோ நிறைகளைப் பெறவேண்டியிருக்கும் என்பதையும் கூறியுள்ளது. அஃதாவது, மாற்றப்பட்ட லாஸ்பெய்ரேயின் ($\Sigma q_1 p_a / \Sigma q_0 p_a$) வாய்பாட்டைச் செயலாற்றினாற் போலாகிறது. ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டம் (Federal Reserve System) என்ற நிறுவனத்தின் கவர்னர்களின் குழு இந்த வாய்பாட்டையே பயன்படுத்துகிறது. FRB-குறியீட்டின் ஒப்பிடுதலுக்கான அடிப்படை 1947-49; நிறைகளுக்கான அடிப்படை 1947ஆம் ஆண்டு மாருத நிறைகளுக்கு எந்த அடிப்படையைத் தேர்ந்தெடுத்தாலும் சரி, விலைக் குறியீட்டெண்களைப்பற்றி விளக்கும்பொழுது கூறிய முடிவு, இந்த இடத்திற்கும் பொருந்தும்; மாருத அடிப்படை நிறைகளை அடிக்கடி—ஐந்தாண்டுக் கொருமுறை, அல்லது 10 ஆண்டுக் கொருமுறையேனும்—மாற்றிக் கொண்டிருக்க வேண்டும்; அப்பொழுதுதான், நிறைகளால் சுட்டிக் காட்டப்படும் 'சூழ்நிலை'கள் பின்தங்கியவைகளாக (out-doted) இரா.

உற்பத்திக் குறியீட்டில் இடம்பெறும் விலைகள், அளவுகளின் தன்மை

வெளிப்பாட்டுக் குறியீடுகளை அமைப்பதில் தகுந்த 'உற்பத்தித் தொடர்ச்சிகளை' (production series)யும் நிறைகளையும் தேர்ந்தெடுப்பது முக்கியமாகக் கவனிக்கவேண்டிய தொன்று. நம் பிரச்சினை ஒவ்வொரு பண்ணையிலும், சுரங்கத்திலும், தொழிலிலும், தொழிற்சாலையிலும் நடைபெறும் 'வேலை'யை அளவிடுவதே ஆகும்; அப்படி அளவிட்டபிறகு, குறித்த ஒரு கால இடைக்கான பொதுவான குறியீட்டெண்ணைக் கண்டுபிடிப்பதாகும். பண்ணைகளைப்பற்றிக் கூறினும் என்றாலும், நம் கவனம் சிறப்பாக விவசாய சம்பந்தமற்ற உற்பத்திகளிலேயே செல்லும்.

நாலு அளவைகளைப்பற்றிக் கூறலாம். நடைபெற்ற வேலையை (work done) அளவிடுவதாக—வெளிப்பாட்டுப் பருமத்தையோ, வெளிவழங்கப்படும் (deliveries) பொருள் பருமத்தையோ, அடிப்படைப் பொருள்களின் உட்பாட்டையோ (input of basic materials), வேலைநேர உட்பாட்டையோ—கருதலாம். ஒவ்வொன்றிற்கும் சில குறைபாடுகள் உள்ளன. உற்பத்தியான கார் (car) களின் எண்ணிக்கை அல்லது புதிதாகக் கட்டி முடித்த வீடுகளின் எண்ணிக்கை முதலியவைகளைக் கணக்கிடுவதால் கிடைக்கும் முடிவு, நடைபெற்றுக்கொண்டிருக்கும் வேலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கருதாமற் போகும். தற்கால வேலைகளில் பழுது பார்த்தல் (repairs) முக்கியமான ஒரு பாகமாக அமையுமாயின்—கட்டட வேலையில் பெரும்பாலும் இது நிகழத்தான் செய்யும்—புதிதாகக் கட்டி முடித்த வீடுகளைமட்டும் கணக்கிட்டால், இவைகள் விட்டுப்போகும். முடிவாக்கப்பெற்ற (finished) பொருள்களின் வெளிவழங்குதல்களைக் கணக்கிட்டாலும், இதே போன்ற குறைபாடு நிகழக்கூடும்; மேலும், தயாரிப்பாளர்களின் கையிருப்பில் (stock) ஏற்படுகிற மாறுதல்களையும் கருதாததாலும் குறைபாடுகள் நிகழும். அடிப்படைப் பொருள்களைக் கருதுவோமானால் (பருத்தித் துணித் தொழிலில் நடைபெறும் வேலையின் அளவாகப் பருத்தித் தூய்மைக் கருதலாம்), அதிலும் குறைபாடுகள் நிகழலாம். தொழில் முறையின் நடுவில் சாமான்களைப் பற்றிய குறிப்புப் பட்டியல்கள் (inventories) மாறுவதாகவிருந்தால், இப்படி நிகழக்கூடும். மற்றும், முடிவுபெறும் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தேவைப்படும் அடிப்படைப் பொருள்களின் அளவு மாறுவதாலும், அல்லது பொருள்களின் அமைப்பில் ஏற்படும் மாறுதல்களாலும், இந்த அளவும் பாதிக்கப்படும். வெளிப்படையாகத் தோன்றக்கூடிய வேலை-உட்பாட்டை, மனித—மணிகளில்

அளவிட்டு அந்த அளவினைக் கருதுவதும், உற்பத்தித்திறனில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அசட்டை செய்வதால் குறைபாடுள்ளது தான். வேலை-உட்பாட்டு அளவையைத் தற்கால உற்பத்தித் திறனைக் குறிப்பதான ஒரு கெழுவினால் பெருக்கலாம்; ஆனால், இந்த முறையில் கெழுவைக் கணக்கிடுவதில் நிகழக்கூடிய குறை பாடுகள் இடம்பெறக்கூடும். சாதாரணமாக, தொழிற்சாலைகளில், உற்பத்தித் திறனில் ஏற்படும் மாற்றங்கள், கால அளவில் மாறிலிகள் அல்லாதவையாதலால், இந்தக் குறைபாடு ஆபத்தான தாகலாம்.

பொதுவாக, வெளிப்பாட்டின் பருமத்தில் அல்லது பகுதியில் உண்டாகும் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்காக உற்பத்திக் குறியீடுகளை அமைக்கிறோம். எனவே, மேலே விளக்கப்பட்ட நாலு அளவை களில், முதலாவதுதான் மிகப் பொருத்தமானதாகும். சில சமயங் களில் மற்றவைகளையும் பயன்படுத்தலாம்; என்றாலும், அவை வெளிப்பாட்டின் தோராயங்களே. எனவே, உற்பத்தியான பொருள்களை விரிவாகக் கணக்கிடுவதுதான் நம் முதல் நோக்க மாகும். அடிப்படைப் பொருள்கள், தொழில் முறையின் நடுநிலைப் பொருள்கள், அல்லது முடிவுற்ற பொருள்களைப்பற்றிய பட்டியல் களில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப்பற்றிய தகவல்கள், அல்லது தொழில்நுட்ப முறைகளில் உண்டாகிய முன்னேற்றங்களைப் பற்றிய தகவல்கள் கிடைக்குமானால், இயன்றவரையில் திருத் தங்கள் அமைப்பது நல்லது.

முதல்நிலை உற்பத்திக் குறியீடு ஒப்பிடக்கூடிய மாதாந்தர, காலாண்டுகளுக்கான, அல்லது ஆண்டுகளுக்கான அளவைகளைத் தரும். எனவே, வெளிப்படையாகக் கருத்துகளைப் பாதிக்கக்கூடிய சூழ்நிலைகளுக்குத் திருத்தங்கள் அமைத்தே ஆகவேண்டும். இவை போன்றவைகளில் மிக முக்கியமானது ஒவ்வொரு மாதத்திற்கு உண்டான நாட்களிலுள்ள வேற்றுமைகளே. எனவே, தகவல்களை மாதத்திற்குக் கருதாது, வேலை நடக்கும் ஒரு நாளுக்கு அல்லது ஒரு வாரத்திற்கு இவ்வளவு உற்பத்தியென்று கணக்கிடுவது முறையாகக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது. (ஐக்கிய நாடு நிறுவனம், வாரத்தையே சிபாரிசு செய்துள்ளது.) சுமாராக ஒழுங்கான காலங் களில் வரும் பொது விடுமுறை நாட்களுக்கான திருத்தமும், பருவகாலத் திருத்தம் செய்யும்பொழுது அமைக்கப்பெற்றுவிடும். இதனைப் பின்பு விளக்குவோம்.

மொத்த உற்பத்திக் குறியீட்டெண்களில் நிறைகளாக இடம் பெறும் p-க்கள் எல்லாமே, பொதுவாக மார்க்கெட்டுகளில், அப் பொருள்களுக்கான விலைகள் அல்ல. குறித்த பொருளானது,

இரும்புத் தாதுவைப் (iron ore) போன்ற ஓர் அடிப்படைப் பொருளாக இருந்தால் (இதன் விற்பனை விலை அதன்மேல் செய்யப்பட்ட எல்லா வேலைகளுக்கான கூலிகளையும் கொண்டதாகும்) அதன் சாதாரண விலையே பயன்படுத்தப்படும். பல தொழிற்சாலைகள் அடிப்படைப் பொருள்களைத் தொகுப்பதாகவோ, அல்லது முழுவதும் முடிவுபெறாத பொருள்களைத் தயாரிப்பதாகவோ இருக்கும். அப்பொழுது, அந்தத் தொழிற்சாலையின் விலை, பயன்படுத்திய பொருள்களின் மதிப்பையும், அங்கு செய்யப்பட்ட வேலைகளுக்கான கூலியையும் மொத்தமாக்கியதாகும். அந் நிலையில் நிறையாகக் கருதப்படும் p-ன் மதிப்பு தயாரிக்கப்பட்ட பொருள் ஒன்றுக்கான கழிவு வெளிப்பாட்டின (net output) மதிப்பாகவே இருக்க வேண்டும். தொகுப்புச் செய்யும் தொழில் முறைகளைக் கவனிக்கும்பொழுது, தொகுப்புச் செய்வதற்கான தொண்டுகளில், ‘ விலை ’களையே கருதவேண்டும்; இந்த ‘ விலை ’கள் குறிக்கப்படுவதில்லை (not quoted) என்பது தெரிந்ததே. ஆனால், கழிவான வெளிப்பாட்டின் மொத்த மதிப்பு தெரிந்தால், மதிப்புகளால் நிறையிடப்பட்ட ஒப்புமை அளவுகளைப் பயன்படுத்தலாம்; அப்படிச் செய்தாலும், நிகழும் குறியீடுகள், நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீடுகளுக்குச் சமமானவைகளே. எனவே, லாஸ்பெய்ரேயின் குறியீட்டிற்குப் பதில், குறியீட்டு அமைப்பாளர் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துவார் :

$$Q_{01} = \frac{\Sigma \left(\dfrac{q_1}{q_0} \times q_0 p_0 \right)}{\Sigma q_0 p_0} \qquad (14.5)$$

இங்கு $q_0 p_0$ என்பது குறித்த ஒரு பொருளின் கழிவான வெளிப்பாட்டின் மதிப்பாகும்; அல்லது அவர், குறித்த ஒரு காலத்தில் உற்பத்தியான பொருள்களின் எண்ணிக்கையால் கழிவான வெளிப்பாட்டைக் ‘ குறைப்பதால் ’, ஓர் அலகின் ‘ விலை ’யைப் பெறலாம்; பிறகு, மொத்தக் குறியீட்டு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.[1]

[1] இரண்டு வழிகளைப் பின்பற்றும்பொழுதும், நாம் உட்பாட்டு அளவுகள் (அதாவது, கச்சாபொருள்கள், கருவிகள், பாதிமுடிவான பொருள்கள் முதலியன) வெளிப்பாட்டு அளவுகளுடன் விகித சமமுறையில் மாறுகின்றன என்று கொண்டுள்ளோம். இக்கொள்கை ஏற்றதல்லவென்றால், கழிவு வெளிப்பாட்டிற்கான திருத்தமான குறியீட்டை அடியில் கண்ட வாய்பாட்டினால் பெறலாம் :

$$\text{கழிவு } Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_0 - \Sigma q'_1 p'_0}{\Sigma q_0 p_0 - \Sigma q'_0 p'_0}.$$

இங்கு $p'q'$ என்பவை உட்பாடுகளின் விலைகளையும், அளவுகளையும் குறிக்கும்; p, q என்பவை அமைப்பிற்கான பொருள்களின்—அதாவது, வெளிப்பாட்டின் விலைகளையும் அளவுகளையும் மொத்த அடிப்படையில் (gross basis) குறிப்பிடும். ஃபாப்ரிக்கன்ட் (Fabricant) என்பவரின் நூலையும் (துணைநூல் பட்டியல் 39), கியரி (Geary) என்பரின் நூலையும் (துணை நூல் பட்டியல் 62) பார்க்க.

சாதாரணமாக சென்ஸஸ் பதிவேடுகளில் 'சேர்க்கப்பெற்ற மதிப்பு' (value added) என்ற தலைப்பின்கீழ்க் கிடைக்கும் விவரங்கள், குறித்த ஒரு தொழிலின் கழிவான வெளிப்பாட்டின் நெருக்கமான தோராயங்கள் ஆகும். காரணி விலை அடிப்படையில் தான் (factor cost basis) கழிவு வெளிப்பாடு தேவைப்படும்; எனவே, வரி செலுத்துதல், இன்ஷ்யூரன்ஸ், விளம்பரம் போன்ற வியாபாரத் தொண்டுகளுக்கான விலைகள் முதலியவற்றை நீக்கி, சென்ஸஸ் காலத்தில் வேலை அளவுகளில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றங்களுக்கான திருத்தங்கள் நிகழ்த்தச் சிறிது சரிகட்டல் (adjustment) செய்யவேண்டும்.

உற்பத்திக் குறியீட்டெண்களின் மொத்த அடக்கம் (Coverage of Production Index Numbers)

உற்பத்திக் குறியீடுகளின் நோக்கங்களையும், மொத்த அடக்கத்தையும் ஆராயும்பொழுது, புதுப் பிரச்சினைகள் ஒன்றும் எழுவதில்லை. பொருளாதார அமைப்பின் எல்லாப் பகுதிகளும் சரிவர இடம் பெற்றிருத்தல் வேண்டும் என்று கூறவேண்டியதில்லை. தற்காலத்தில், குறியீட்டெண்களைத் தொழில் உற்பத்தித் துறையில் பெரிதும் பயன்படுத்துகிறார்கள். ஐ.நா. புள்ளியியல் அலுவலகத்தின் சிபாரிசின்படி, குறியீடுகள் எல்லாத் தொழிற்சாலைகள், பட்டறைகள், சுரங்கங்கள், கைத்தொழில் நிலையங்கள் முதலியவற்றின் வெளிப்பாடுகளையெல்லாம் சேர்த்து அளவிட வேண்டும்; இதில் இடம்பெறாதவை, வீடுகளிலும், பண்ணைகளிலும் செய்யப்படும் பொருள்கள்மட்டுமே. எனவே, வீட்டில் செய்யப்படும் பொருள்கள் நீங்கலாக, மற்ற எல்லா விவசாயத் துறையல்லாத பொருள்களையும் சேர்த்துக்கொண்டாற்போலாகிறது. நடைமுறையில், மிகச் சிறிய அளவு தொழிற்சாலைகளும் நீக்கப்பெறும். இப்படி விளக்கப்பட்ட தொழில் உற்பத்தியின் முக்கியப் பிரிவுகள் கீழ்க் கண்டவை—சுரங்கத்தொழில், பொறிவழித் தொழில்கள், கட்டும் தொழில்கள், மின்சாரம், மற்றும் காற்றுப் (gas) பயன்பாடுகள். ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் (Federal Reserve System) கவர்னர்கள் குழு, இந்த சிபாரிசைக் கொள்கைவரையில் ஏற்றுக்கொண்டுள்ளது. ஆனால், தற்சமயம் FBI குறியீடு சுரங்கம், பொறிவழித் தொழில்களுக்குமட்டுமே பொருந்தும். [அமெரிக்காவில் பியூரோ ஆஃப் அக்ரிகல்ச்சரல் எகனமிக்ஸ் (Bureau of Agricultural Economics) என்ற நிறுவனம் விவசாய உற்பத்தியின் பருப்பொருட் பருமக் குறியீட்டொன்றை வருடாந்தர முறையில் வெளியிடுகிறது.]

உள்நாட்டு ஒப்பிடுதலுக்கும், வெளிநாட்டு ஒப்பிடுதலுக்கும் ஏற்றவாறு பொருளாதாரப் பகுதிகள் அண்மையில் அமைக்கப்

பெற்றுள்ளன; இது தொழில்வழியில் 'தர'ப்படுத்தப்பட்ட பாகுபாடுகளால் சாத்தியமாகிறது. இப்பொழுது, பல்நாட்டுப் பாகுபாட்டு முறையில் தொழில் பிரிவுகள் அமைந்துள்ளன.[2] மற்றும், அமெரிக்காவிற்குமட்டும் இதே முறையில் அமைந்த பாகுபாட்டுமுறையொன்றும் உள்ளது. இது அமைப்பில் ஏறக்குறைய முந்தையதையொட்டி இருக்கிறது; பியூரோ ஆஃப் திபட்ஜட் (Bureau of the Budget) என்ற நிறுவனத்தின் 'புள்ளியியல் தரங்கள்' (Statistical Standards) என்ற அலுவலகத்தினர் ஏற்படுத்தியது.[3] இந்தப் பாகுபாட்டைப் பின்பற்றி ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் கவர்னர்கள் குழு, 21 பொறிவழித் தொழிற் பகுதிகளுக்கும், 5 சுரங்கத்தொழில் பகுதிகளுக்கும், மற்றும் இவைகளின் சில தொகுப்புகளுக்குமான மாதாந்தரக் குறியீடுகளை வெளியிடுகிறது. நீடித்த, நீடிக்காத தயாரிப்புகளைத் தனித்தனியே பிரித்துள்ளது. முடிவாக, துய்ப்பு மார்க்கட்டுகளுக்கு வரும் நீடித்த தயாரிப்புகளின் அளிப்புகளில் (supplies) ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடும் ஒரு வெளிப்பாட்டுக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது; இதற்கு மொத்த மதிப்புகள் (gross values) தாம் நிறைகள்; முக்கியமான எல்லா நீடித்த பொருள்களும் இதில் இடம் பெற்றுள்ளன. அடிப்படைத் தொழில்களின், மற்றும் உற்பத்திகளின் தொகுப்புகளை அமைப்பதால், சுழற்சி, மற்றும் பொருளாதார முறைகளால் ஏற்படும் மாற்றங்களை ஆராய்வதற்கான தனித்த குறியீடுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இத்தகையதொரு குறியீட்டில் இடம்பெறும் உற்பத்திகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்? ஐக்கிய நாட்டு அலுவலகம் 100ஐச் சிறுமமாகவும், 500ஐப் பெருமமாகவும் கருதுகிறது. ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டம் கவர்னர்கள் குழுவானது, 275 தொடர்ச்சிகளை அதனுடைய தொழில் உற்பத்திக் குறியீட்டிற்குப் பயன்படுத்துகிறது.

ஒப்பிடும் அடிப்படையும் நிறை அடிப்படையும்

விலைக் குறியீடுகளைப்பற்றிக் கூறும்பொழுது, குறைந்த கால ஒப்பிடுதல்களே சிறந்தவை என்றோம். அதே காரணங்களுக்காக

[2] ஐக்கிய நாடுகள், புள்ளியியல் துறையினரின் வெளியீடான 'ஸ்டாட்டிஸ்டிக்கல் பேப்பர் ஸீரிஸ், M, No. 4 (Statistical Papers Series M, No. 4) என்ற நூலில், தொழில் வழியில் எல்லாவிதமான பொருளாதார நடவடிக்கைகளுக்கான, பன்னாட்டுத் 'தர'ப்படுத்தப்பட்ட பாகுபாடு முறையைக் காணலாம்.

[3] 'பியூரோ ஆஃப் தி பட்ஜெட்' என்ற நிறுவனத்தாரின் 'ஸ்டாட்டிஸ்டிகல் ஸ்டாண்டர்ட்ஸ்' என்ற அலுவலகத்தாரால் வெளியிடப்பட்ட 'ஸ்டாண்டர்ட் இண்டஸ்ட்ரியல் க்ளாஸிஃபிகேஷன் மானுவல்' (Standard Industrial Classification Manual) என்ற நூலைப் பார்க்கவும்.

உற்பத்திக் குறியீடு ஒப்பிடுதல்களும், குறைந்த காலங்களுக்கு மட்டும் இருப்பது நல்லது. 'சூழ்நிலை' மாற்றங்கள் அதிகம் நிகழ்வதால், மாருத நிறைகள் பிரதிநிதிகள் அல்லாமல் போகும்; இயக்க நிலையிலுள்ள பொருளாதார அமைப்பில் இதுபோன்ற மாற்றங்கள் நிகழ்வது இயல்பானது. ஐ.நா. புள்ளியியல் அலுவலகம் ஐந்தாண்டுகளுக் கொருமுறை நிறை அமைப்புகளைத் திரும்பவும் பார்வையிட்டு, தேவையானால் மாற்றி அமைக்க வேண்டும் என்று பல்நாட்டு செய்முறைகளுக்கான தன் சிபாரிசு களில் கூறியுள்ளது. விரிவான மாதிரித் தேர்வுகளை நடத்தியோ ஸென்ஸஸ் முறையிலோ தொழில் உற்பத்திகளைக் கணக்கிட்டு, நிறைகளை ஏற்படுத்த வேண்டும். உற்பத்தி மாற்றங்களின் அளவைகள் திருத்தமாக அமைய வேண்டுமென்ருல், இது போன்ற விசாரணைகள், அடிக்கடி நிகழ்தல் மிக்க அவசியம். இந்தச் சிபாரிசுகளிலிருந்து, ஒப்பிடுதலுக்கான அடிப்படை, கால வழியில் வெகு தொலைவில் இருக்கக்கூடாது என்ற மற்ரேர் உண்மை தெளிவாகிறது. ஐந்தாண்டுகளுக் கொருமுறை மாற்றுவது விரும்பத்தக்கதாக இருக்கலாம்; ஆனுல், குறியீடு கணக்கிடும் நிறுவனங்களின் நடைமுறையில் இது நடக்காது என்றே சொல்ல வேண்டும். ஃபெடரல் ரிஸர்வ் போர்டாரின் குறியீடு தற்சமயம் 1947 49ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும்; இப் பொழுது இதுதான் அமெரிக்க நாட்டின் 'தர' அடிப்படையு மாகும். நிறை அடிப்படையாக 1947ஆம் ஆண்டு கருதப் பட்டுள்ளது.

மாதாந்தரக் குறியீடுகள் முக்கியமாகக் குறுகிய-கால ஒப்பிடுதல் களுக்கு ஏற்றவைகள் இவைகளுக்கு மாருத நிறைகள் இருக்க வேண்டியது ஒரு நடைமுறை அவசியமாகும். இவைகளையும் பயன்படுத்தி, நெடுங்கால அளவில் உற்பத்தி மாற்றங்களை அள விடுவதற்கான குறியீடுகளையும் அமைக்கலாம். வருடாந்தர, அல்லது ஐந்தாண்டுகளுக் கொருமுறை நடக்கும் ஸென்ஸஸ் கணக்கீடுகளிலிருந்து, தகுந்த, திருத்தமான நிறைகளைப் பெற முடியும். அவைகளைக்கொண்டு விழுமிய வகை அல்லது எட்ஜ் வர்த் வகையைச் சேர்ந்த 'குறுக்கு நிறை' (cross-weight) குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடலாம். (13ஆம் அதிகாரத்தைப் பார்க்க.) இவைகளைச் சங்கிலிகளாக்கி அல்லது வேறு முறை களில் தொகுத்து, நெடுங்கால ஒப்பிடுதல்களுக்கான அளவை களைப் பெறலாம். இது அமெரிக்காவில், பல ஆண்டுகளுக்குச் செய்யப்பட்டுள்ளது. பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ், மற்றும் நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் (Bureau of Ceusus and National Bureau of Economic Research) என்ற

நிறுவனங்கள் ஸென்ஸஸ் விவரங்கள் கிடைக்கும்பொழுது அவைகளைப் பயன்படுத்தி 'பென்ச் மார்க்' குறியீடுகளைக் (bench-mark indexes) கணக்கிடுகின்றனர். இவைகளை வைத்துத் தற்கால ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீடுகளும் திருத்தப்பெற்றுள்ளன. ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீட்டை ஆராயவும் திருத்தவும் விரிவாகத் தனித்த முறையில் ஆண்டுகளுக்கான அளவைகளைக் கணக்கிட்டுப் பயன்படுத்தி வருகின்றனர். 'பெஞ்ச்மார்க்' முறையைப் பயனுக்குவதால், 'சூழ்நிலை' மாற்றங்களால் ஏற்படும் சிக்கல்கள் தீர்ந்துவிடுவதில்லை என்பது உண்மைதான். ஆனல், விரிவான விவரங்களைப் பயன்படுத்துதல், திருப்திகரமான நிறைகளை அமைத்தல், 'சூழ்நிலை' மாற்றங்களையும் கருதுகின்ற வாய்பாடுகளையும் உபயோகித்தல்—முதலியவைகளால் கிடைக்கும் குறியீட்டெண்கள் மாருத நிறைகளையுடைய, மாதாந்தர, விரிவடையாத குறியீட்டெண்களைவிட, நெடுங்கால ஒப்பிடுதல்களுக்கு ஏற்றவைகளாகவே இருக்கும்.

பருவகாலத்திற்குத் திருத்தமாக்கப் பெற்ற குறியீடுகள் (Seasonally Adjusted Indexes)

பல தொழில்களில் உற்பத்தியின் அளவு பருவகாலத்தையொட்டி மாறுதல் அடையும். இது விவசாயத்துறையில் நிகழ்வது யாவரும் அறிந்ததே; அதேபோன்ற, ஆனல் அளவில் சற்றுச் சிறியவான மாற்றங்கள் சுரங்கத் தொழில், நிலக்கரி உற்பத்தி, உணவு, பானவகை உற்பத்தித் தொழில்கள் முதலியவற்றில் மாதத்திற்கு மாதம் ஏற்படுவதைக் காண்கின்றோம். உற்பத்திகளில் காணப்பெறும் இந்த மாற்றத் தோரணிகள், பொருள்களின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களைவிட ஒழுங்காகவும் தெளிவாகவும் இருக்கும். எனவே, மாதாந்தர விலைக்குறியீடுகளை நிறுவும் பொழுது அமைக்கப்பெருத சிறு மாற்றங்கள் (adjustment) மாதாந்தர உற்பத்திக் குறியீடுகள் அமைக்கும்பொழுது செயலாக்க வேண்டியனவாகும். இத் திருத்தங்கள் அமைப்பதால் பருவகாலத்திற்கேற்ற மாற்றங்கள் நீங்கிவிடும்; பிறகு மீதியாகக் காணும் மாதக் குறியீடுகளிலுள்ள வேறு பல விசைகளால் ஏற்பட்ட மாறுதல்களைத் தெளிவாக நோக்கலாம். இவ்வகையான திருத்தம் சிறிதானதன்று; ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீட்டில் (Federal Reserve Index) பருவகாலத்தின் சிறும நிலைக்கும் (minimum) பெரும நிலைக்கும் (maximum) உள்ள வித்தியாசம் 10 சதவீதம்வரையில் இருப்பதைக் காணலாம்.

நெடுங்காலப் போக்கினுலும், சுழற்சிகளாலும், பருவகாலங்களாலும், மற்றும் ராண்டம் காரணிகளாலும் உண்மையான உற்பத்தி

யில் ஏற்படும் மாற்றங்களை நன்கு அறிவது முக்கியம். இவைகளை முதனிலை அல்லது பருவகாலத் திருத்தம் அமைக்கப்பெருத ஒரு குறியீட்டிஞல் அளவிடுவோம். பருவகாலத் திருத்தம் செய்யப் பட்ட குறியீடு இரண்டாம் நிலைக் (secondary) குறியீடுகளில் ஒன்ருகும். பொருளாதார மாற்றங்களை அளவிடுவதில் இரு அளவைகளும் பயன்படும்.

பருவகாலத்திற்குத் திருத்தமாக்கப்பெற்ற குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதில், 'தர'மாக்கப்பட்ட முறைகளையே கையாளு கிரூம். ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டக் கவர்னர்களின் குழு வானது 12 மாதங்களுடைய ஒரு நகரும் சராசரியைப் பயன்படுத்து கிறது (11ஆம் அதிகாரத்தைப் பார்க்கவும்). குறித்த ஒரு மாதத்தின் திருத்தப்பெருத குறியீட்டை, அந்த மாதத்திய பருவகாலத் திற்கான குறியீட்டை (seasonal index) ஒரு விகிதமாக மாற்றிய பிறகு (பருவகாலத்தின் குறியீடு 110ஆக இருப்பின், அதனை 1.10 என்று கருதுவோம்), வகுத்துத் திருத்தம் அமைப்போம். அஃதாவது, குறித்த ஒரு மாதத்திற்கான பருவகாலக் குறியீடு 100-க்கு அதிகமாக இருப்பின், அம் மாதத்திய உற்பத்தியின் முதனிலை அளவை, திருத்தமாக்கும்பொழுது குறையும்; பருவகாலக் குறியீடு 1.00ஐவிடக் குறைவாஞல், மாத அளவை அதிகமாகத் திருத்தப் பெறும்.

உற்பத்திக் குறியீடுகளில் இடம்பெறும் பற்பல தனித்த வரிசை களுக்கே பருவகாலத் திருத்தங்கள் அமைக்கலாம்; அல்லது இதனைத் திருத்தப்பெருத பிரிவுக் குறியீடுகளுக்கும் அமைக்கலாம். அமெரிக்காவில் ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீடுகளில் இரண்டாவது முறையைத்தான் தற்சமயம் செயலாக்குகின்றனர். நேரிடையாக 26 பிரிவுக் குறுயீடுகளுக்குப் பருவகாலத் திருத்தங்களை அமைக் கிருர்கள். பிறகு, இந்த 26 திருத்தம்பெற்ற குறியீடுகளைக் கூட்டாக்கித் திருத்தம்பெற்ற மொத்தக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடு கிருர்கள்.[4] பருவகாலத் தோரணிகளில் மாற்றங்கள் ஏற்படக் கூடும்; அந்த மாற்றங்களைச் செய்முறையில் செயலாக்குவது இந்த முறையில் எளிதாகிறது.

1952ஆம் ஆண்டில் மொத்தத் தொழில் உற்பத்திக் குறியீடு களிலும், முக்கியமான சில தொழிற் பகுதிகளின் உற்பத்திக் குறியீடு களிலும் நிகழ்ந்த பருவகால மாற்றங்களின் வீச்சுகளை அட்டவணை 14-1-ல் காணலாம். மொத்தமாகப் பார்க்கும்பொழுது, தோரணி ஆண்டுக்காண்டு மாருமல் இருக்கிறது; ஆஞல், சில தொழிற் பகுதிகளில் மாற்றங்கள் அடிக்கடி ஏற்படுகின்றன.

[4] 'ஃபெடரல் ரிஸர்வ் புல்லெட்டின்' (Federal Reserve Bulletin) என்ற மாத இதழில், முதனிலை அல்லது திருத்தம்பெருத குறியீடுகளையும், பருவகாலத் திருத்தம் அமைக்கப்பெற்ற ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீடுகளையும் காணலாம்.

அட்டவணை 14-1

ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டக் கவர்னர் குழுவினரால் வெளியிடப்பெறும், 1952ஆம் ஆண்டின் மாதாந்தர உற்பத்திக் குறியீடுகளில் உள்ள பருவகால மாற்றங்கள் *

	ஜன.	பிப்.	மார்.	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்.	செப்.	அக்.	நவம்.	டிஸம்.
மொத்தக் குறியீடு	99	101	102	100	99	100	94	100	102	103	101	99
முக்கிய உலோகங்கள்	102	104	105	104	102	101	91	95	98	101	100	97
மின்சார எந்திரங்கள்	102	105	106	102	99	95	84	97	100	106	104	100
போக்குவரத்துத் தளவாடங்கள் ...	97	102	105	104	101	103	97	99	99	100	97	96
மரமும் மரச்சாமான்களும்	90	96	101	105	102	107	94	105	106	105	99	90
துணி ஆலைகளுக்கான பொருள்கள் ...	101	105	104	100	99	100	86	103	102	102	101	97
ரப்பர் பொருள்கள்	101	104	104	102	99	101	88	96	101	106	102	96
பெட்ரோலியமும் நிலக்கரிப் பொருள்களும்	101	100	99	97	98	100	100	102	101	101	101	100
உணவு, பானவகைத் தயாரிப்புகள் ...	92	91	92	92	94	102	104	109	114	111	103	96
நிலக்கீலார்ந்த நிலக்கரி	105	100	100	100	95	98	75	100	104	109	109	105
ஆந்த்ரசைட் நிலக்கரி	100	100	92	96	102	106	79	96	105	121	110	93
உலோகம் வெட்டியெடுக்கும் தொழில்கள்	72	75	76	101	118	121	119	120	119	113	92	74

* 'ஃபெடரல் ரிஸர்வ் புல்லெட்டின்' வெளியீட்டின் 1953, டிசம்பர் இதழ், பக்கம் 54-55-ல் வெளிவந்துள்ள 'திருத்தப்பெற்ற மாதாந்தர ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீடுகள் (தொழில் உற்பத்திக்கானவை)' என்ற கட்டுரையிலிருந்து.

ஜுலை மாதத்தில் அந்த ஆண்டுச் சராசரியைவிட 6 சதவீதம் குறைவு திடீரென்று ஏற்பட்டுள்ளதை நோக்கவும் ; இது பருவகாலத் தோரணியில் திடீரென்று ஏற்படக்கூடிய மாற்றத்திற்கு ஒரு சிறப்பான எடுத்துக் காட்டாகும். யுத்தத்திற்கு முந்திய தோரணிகளிலிருந்து நிறுவப்பெற்ற பருவகாலக் குறியீடுகளைக் கொண்ட, திருத்தப்பெறாத ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீடு, இதே மாதத்திற்கு 100ஆக விருந்தது. யுத்தத்திற்குப் பிறகு புதிதாக அமைக்கப் பெற்ற தொழிற் பாகுபாடுகளே இந்த வித்தியாசத்திற்குக் காரணம். திடீரென்று ஏற்பட்ட ஒரு மாறுதலாகும் இது. சாதாரணமாகச் சமூகப் பழக்கங்களாலும், தொழில்நுட்ப மாற்றங்களாலும், வியாபாரக் கொள்கைகளாலும் நிகழும் நிதானமான மாற்றங்களையுடைய பருவகாலத் தோரணிகளைப் போன்றல்லாதது இது.

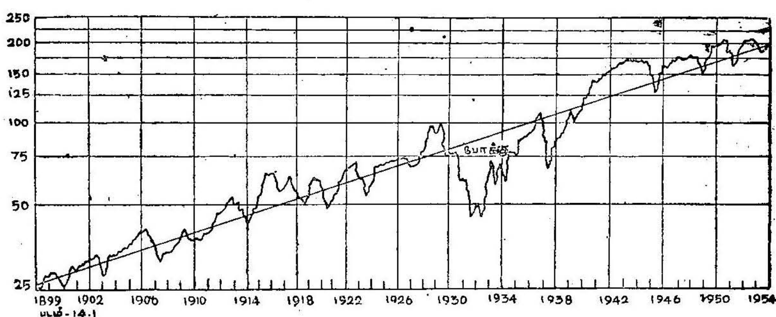
தொழிற் செயலின் ஒரு குறியீடு
(An Index of Industrial Activity)

காலத் தொடர்வரிசைகளை ஆராயுங்கால், சுழற்சி ஏற்ற விறக்கங்கள்தாம் பெரும்பாலும் முதன்மையான ஆராய்ச்சிப் பகுதிகளாக இருக்கும் என்று குறிப்பிட்டோம். இது பருப்பொருட் பரும மாற்றங்களின் ஆராய்ச்சிகளுக்குப் பெரிதும் பொருத்தமானதாகும் ; ஏனென்றால், உற்பத்தி, வியாபார மாற்றங்களே வியாபாரச் சுழல்களில் வெகு முக்கியமானவைகள். தனித்த தொடர்ச்சிகளில் இருக்கும் சுழற்சி ஏற்றவிறக்கங்களை அளவிடுவதற்கான முறைகளை முன் அத்தியாயங்களில் விளக்கியுள்ளோம். (இத்தகைய ஏற்ற விறக்கங்கள் பெரியவும் சிறியவுமான அசைவுகளுடன் விடுவிக்க முடியாதவாறு பிணைந்துள்ளன.) பொதுவான வியாபார மாறுதல்களை ஆராயும்பொழுது, நாம் அடுத்தபடியாகக் கவனிக்க வேண்டியது—நெடுங்காலப் போக்கிற்கும், பருவகால அசைவுகளுக்கும் திருத்தம் செய்யப்பட்ட, பருப்பொருட் செயலுக்கான விரிவான ஒரு குறியீட்டைக் கணக்கிடுவதாகும்.

சிறிது வேறான இரு முறைகளால் இதுபோன்ற குறியீடுகளைக் கணக்கிடுகிறார்கள். முதல் முறையில், பொதுக் குறியீட்டில் இடம் பெறுகின்ற தனித்த தொடர்ச்சிகளுக்கெல்லாம் தனித்தனியே போக்குக் கோடுகள் இணைப்போம் ; பிறகு உண்மையான விவரங்களைப் போக்கு மதிப்புகளின் (trend values) சதவீதங்களாகக் காட்டுவோம்; பிறகு இந்தச் சதவீதங்களுக்குப் பருவகாலத்திற்கான திருத்தங்கள் அமைப்போம்; கடைசியில், அந்தத் திருத்தம்பெற்ற சதவீதங்களைத் தொகுத்துப் பொதுக் குறியீடொன்றைப் பெறுவோம். கிடைக்கும் குறியீடு ‘ஒப்புமை’ வழியில் இருந்தாலும், அது கால அளவில் ஒரு குறித்த அடிப்படைக்கு ஒப்புமை அன்று ; கற்பனை

யான ஒரு 'நார்மல்' நிலைக்கு ஒப்புமையே. இரண்டாவது முறையில், முதலில் ∴பெடரல் ரிஸர்வ் லிஸ்டத்தின் குறியீடு போன்ற, பருவகாலத் திருத்தமாக்கப்பெற்ற குறியீடொன்றை அமைக்க வேண்டும். இத்தகைய குறியீடுகளின் தொடர்ச்சியின் நெடுங்காலப் போக்கினை நமக்கு முன்பே தெரிந்த வழிகளில் கணக்கிட வேண்டும். இந்தப் போக்கு தனித்த தொடர்வரிசைகளிலுள்ள பல போக்குகளின் ஒரு கூட்டு ஆகும். உண்மையான மாதாந்தர மதிப்புகளை, அவைகளுக்குப் பொருத்தமான போக்கு மதிப்புகளின் சதவீதங்களாகக் கணக்கிட்டு, போக்குத் திருத்தம் செய்யப்பெற்ற முடிவு நிலைக் குறியீடுகளைப் பெறுவோம்.

அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனியின் (American Telephone and Telegraph Company) பிரதான (Chief) புள்ளியியலறிஞரின் பகுதியாரால் கணக்கிடப்பட்ட 'தொழிற் செயலின்' குறியீடு மேற்கண்ட இரண்டாம் முறையில் அமைக்கப் பெற்றதாம்.[5] மாதாந்தர விவரங்களே இக் குறியீட்டின் உறுப்புகளாதலால், பருவகாலத் திருத்தம் அமைக்கப்பட வேண்டும்.



1889—1954ஆம் ஆண்டுகளுக்கிடையே அமெரிக்க நாட்டின் தொழிற் செயலின் வளர்ச்சி* (1939=100)

* மூலம்: அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனி.

இந்தத் திருத்தத்தை முதலில் செயலாக்கியபின், தகுந்த நிறைகளைப் பயன்படுத்தி 25 தொடர்ச்சிகளைச் சராசரியாக்கி, நெடுங்கால வளர்ச்சியையும் சுழற்சி-தற்செயலான ஏற்ற விறக்கங்களையும்

[5] பெல் ஸிஸ்டம் (Bell System) நிறுவனங்களில் வேலைபார்ப்போர்களின் உபயோகத்திற்காகவே இந்தக் குறியீடு கணக்கிடப்படுகிறது; எனவே, எல்லோருடைய பயனுக்கும் கிடைக்காது. அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனியாரின் அன்பார்ந்த அனுமதியின்பேரில் இவைகளை வெளியிட்டுள்ளோம்.

ஒருங்கே அளவிடுகிற ஒரு பொதுக் குறியீட்டைக் கணக்கிடுகிறோம்.[6] இந்தத் தோற்றத்தில் குறியீட்டிற்குப் போக்குத் திருத்தங்கள் இன்னமும் அமைக்கப்பெறவில்லை. இஃது அமெரிக்காவின் தொழிற் செயலின் வளர்ச்சியை அளவிடும். நெடுங்காலப் போக்குக் காரணிகளின் அசைவுகளையும், சுழற்சி ஏற்றவிறக்கங்களையும் இது பிரதிபலிக்கிறது.

1899-1954ஆம் ஆண்டுகளுக்கான இத்தகைய வளர்ச்சிக் குறியீடு படம் 14·1-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு தனி மனிதனுக்கான தொழிற் செயலின் அளவுகளுக்கு இணைக்கப்பெற்ற சற்றே மாறுதலான எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டின் போக்கைத்தான் அதில் காண்கிறோம். (மக்கட் குறியீட்டினுல்) மாற்றப்பட்ட இந்தக் குறியீட்டுப் போக்கு, மக்கள்தொகை வளர்ச்சியையும், ஒரு மனிதனுக்கான தொழிற் செயல் அதிகரிப்பையும் ஒருங்கே காட்டுவதாக அமைகிறது. இந்தக் குறியீட்டில் இடம்பெற்றுள்ள தொடர்ச்சிகளை நோக்குவதால், இஃது ஓர் உற்பத்திக் குறியீடன்று என்பது தெளிவாகும். ஐந்து வேலைத் தொடர்ச்சிகளையும் கொண்ட அந்தத் தொடர்ச்சிகளைச் 'செயற்' குறிப்புகளாகக் கருதியுள்ளோமே அல்லாது, பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டைக் குறிப்பனவாக அன்று.

மாதாந்தரக் குறியீட்டின் மதிப்பை, போக்கு மதிப்பின் ஒரு சதவீத விலக்கமாகக் கொள்ளலாம். அப்பொழுது நமக்குக் கிடைப்பது, நெடுங்காலப் போக்கைக் குறிக்கும் தொழிற் செயலின் குறியீடாகும். 1937-54ஆம் ஆண்டுகளுக்கான இத்தகைய குறியீடுகளை,

[6] 1939ஆம் ஆண்டிலிருந்து தற்காலம்வரையில் கீழ்கண்ட தொடர்ச்சிகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளது :

உலோகங்கள் (நிறை 30 சதவீதம்): எஃகு உற்பத்தி ; செப்புத் துய்ப்பு ; ஈயத்துய்ப்பு ; துத்தநாகக் கப்பலேற்றங்கள் ; அலுமினியம் ; கட்டியுருவாகிய பொருள்கள்.

துணிகள் (நிறை 15 சதவீதம்): பருத்தித் துய்ப்பு; கம்பளித் துய்ப்பு; ரேயான், அஸிடேட் உற்பத்தி; சில்லறை அணிகள் கப்பலேற்றங்கள்.

காகிதமும் அச்சுத் தொழிலும் (நிறை 10 சதவீதம்): காகித உற்பத்தி; அச்சுக் காகித உற்பத்தி; செய்தித்தாள் காகிதத் (newsprint) துய்ப்பு.

மர உற்பத்தி (நிறை 5 சதவீதம்).

உணவு (நிறை 10 சதவீதம்): கால்நடை வெட்டுதல்; பன்றிகளை வெட்டுதல்; கோதுமை அரைப்புகள்; கூல அரைப்புகள்; மால்ட், மற்றும் சாராய உற்பத்திகள்.

நான்கு பொறிவழித் தொழில்களின் மனித-மணிகள் (நிறை 15 சதவீதம்): ரசாயனப் பொருள்கள், மற்றும் அவைகளைச் சார்ந்தவைகள்; கல், மண், கண்ணுடிப் பொருள்கள்; பெட்ரோலியம், நிலக்கரிப் பொருள்கள்; ரப்பர் பொருள்கள்.

தொழில் மின்னுற்றலும் மனித–மணிகளும் (நிறை 15 சதவீதம்): பெரிய வாணிக, தொழிற்சாலைகளுக்கு விற்பனை செய்யப்பட்ட கிலோவாட் மணிகள்; தொழிற்சாலைகளால் உண்டாக்கப்பட்ட மின்சாரப் பொறிவழித் தொழில்களின் மனித–மணிகள்.

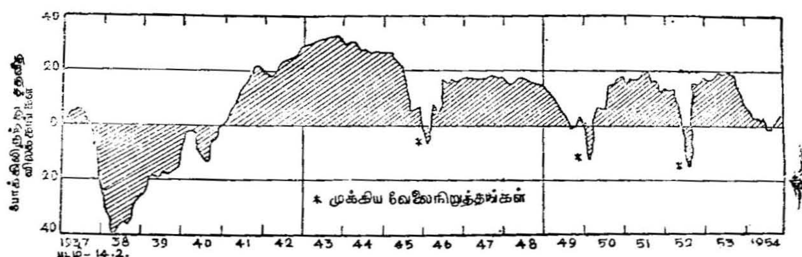
அட்டவணை 14-2

நெடுங்காலப் போக்கைக் குறிக்கும் தொழிற் செயல்; 1937-1954ஆம் ஆண்டுகளுக்கானது; போக்கிலிருந்து சதவித விலக்கல்கள்.

	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945
ஜன.	+ 0.6	—38.4	—19.8	— 3.6	+ 9.4	+22.2	+29.9	+31.4	+27.0
பிப்.	+ 2.5	—36.7	—18.8	— 8.6	+11.7	+22.4	+30.8	+31.9	+27.5
மார்ச்	+ 4.5	—36.1	—17.4	—12.6	+14.5	+22.8	+31.1	+31.4	+27.5
ஏப்.	+ 4.8	—37.0	—19.0	—13.6	+16.7	+23.7	+31.4	+31.4	+26.3
மே	+ 5.1	—37.5	—19.6	— 9.9	+19.5	+23.2	+31.7	+29.4	+24.5
ஜூன்	+ 0.5	—37.6	—17.7	— 5.0	+21.0	+22.7	+31.4	+28.1	+23.1
ஜூலை	— 0.6	—32.4	—16.9	— 3.2	+21.2	+25.0	+32.2	+28.3	+20.1
ஆகஸ்.	— 3.4	—28.2	—14.7	— 2.4	+21.1	+25.1	+32.5	+28.3	+12.4
செப்.	— 7.9	—25.8	— 9.6	— 0.4	+19.9	+25.7	+33.8	+27.9	+ 7.1
அக்.	—20.5	—24.2	— 3.2	+ 1.5	+19.3	+27.6	+33.9	+27.5	+ 3.9
நவம்.	—33.0	—19.1	— 0.7	+ 3.8	+20.4	+28.3	+33.5	+27.8	+ 5.5
டிசம்.	—39.5	—20.2	— 1.2	+ 7.2	+21.5	+29.0	+30.5	+28.5	+ 7.2
ஆவ.	— 7.2	—31.1	—13.2	— 3.9	+18.0	+24.8	+31.9	+29.3	+17.7

	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954
ஜன.	+ 0.6	+17.8	+17.7	+12.8	+ 8.5	+17.6	+11.9	+15.7	+ 3.7
பிப்.	— 9.8	+18.4	+17.0	+11.1	+ 7.8	+17.3	+13.7	+17.7	+ 3.5
மார்ச்	+ 2.1	+17.3	+15.7	+ 8.4	+ 7.4	+17.3	+13.5	+19.9	+ 2.5
ஏப்.	+ 7.6	+17.2	+13.5	+ 5.1	+12.7	+20.4	+ 9.7	+19.4	+ 2.4
மே	+ 1.2	+17.3	+15.7	+ 2.4	+14.9	+20.2	+ 7.2	+20.3	+ 2.9
ஜூன்	+ 4.8	+16.0	+17.6	— 0.3	+15.8	+20.1	— 7.8	+19.9	+ 4.3
ஜூலை	+11.6	+15.1	+17.9	— 1.3	+17.7	+18.3	—16.4	+18.6	+ 2.1
ஆகஸ்.	+15.9	+14.9	+17.3	+ 0.5	+18.8	+16.0	+ 3.6	+16.6	+ 0.3
செப்.	+15.6	+15.6	+16.6	+ 3.9	+18.3	+14.7	+14.1	+13.6	+ 0.2
அக்.	+15.8	+17.7	+16.5	—12.0	+19.0	+12.0	+14.7	+11.5	+ 2.6
நவம்.	+17.1	+19.1	+15.4	—10.4	+17.5	+12.6	+16.6	+10.0	+ 5.8
டிசம்.	+15.4	+18.0	+14.6	+ 3.5	+18.1	+12.2	+15.7	+ 5.3	+ 6.4
ஆவ.	+ 8.2	+17.0	+16.3	+ 2.0	+14.7	+16.6	+ 8.0	+15.7	+ 3.0

அட்டவணை 14-2ல் காணலாம். (போக்குக் கோடு இணைக்கப்பட்ட காலத்தின் ஒரு பகுதிமட்டும்தான் இது). இதே விலக்கங்களை



நெடுங்காலப் போக்கைக் குறிக்கும் தொழிற் செயல்—1937-1954ஆம் ஆண்டுகளுக்கானது (சதவீத விலக்கங்கள்)*

* மூலம்: அமெரிக்கன் டெலிஃபோன் அண்டு டெலிகிராஃப் கம்பெனி.

படம் 14·2-ல் வரைபடமாகக் காட்டியுள்ளோம். அமெரிக்க நாட்டில், 25 தொடர்ச்சிகளால் குறிப்பிடப்பட்ட தொழிற் செயலின் சுழற்சி-தற்செயலான ஏற்றவிறக்கங்களை, இந்தக் குறியீட்டின் அசைவுகள் எடுத்துக் காட்டும்.

உற்பத்தித்திறன் மாற்றங்களை அளவிடுதல்
(Measurement of Productivity Changes)

பொருள்களைத் தயாரிப்பதில் உற்பத்திக் காரணிகள் எவ்வளவு திறமையுடன் பயன்படுத்தப்படுகின்றனவோ அதனை உற்பத்தித் திறன் எனலாம். அமெரிக்காவில், இந்த உற்பத்தித் திறனில் அண்மையில் ஏற்பட்டுள்ள மாற்றங்கள் வாழ்க்கைத் தரங்களைப் பெரிதும் உயர்த்தியுள்ளன. ஆனால், இன்று உற்பத்தித் திறன் தனித்த ஒரு பொருளாதார அமைப்பின் ஒரு முக்கியப் பகுதியாக மட்டும் ஆராயப்படுவதில்லை; மேற்கத்திய நாடுகளிலும், பொருளாதார வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளிலும் உற்பத்தித் திறன் உயர்வை—நுட்பத்தொழில் வல்லுநர்களையும், நுட்பத்தொழில் தகவல்களையும் மாற்றிக்கொள்வதன்மூலம்—பெற முயற்சிகள் நடந்துவருகின்றன. தொழில் ஒப்பந்தங்களில் உற்பத்தித் திறன் ஒரு மையமான பிரச்சினையாக இருக்கிறது. கூலி ஒப்பந்தங்கள் (wage contracts) பலவற்றில் அடங்கியுள்ள 'மேன்மைக் காரணி' (improvement factor), சென்றுபோன, மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படுகிற திறன் அதிகரித்தல்களையொட்டியுள்ளது. இதுபோன்ற மற்றக் காரணங்களாலும், இன்று புள்ளியியலறிஞருடைய முக்கிய வேலைகளில் உற்பத்தித்திறனை அளவிடுவதும் விளக்குவதும்கூட ஒன்றாக உள்ளது.

உற்பத்தித்திறன் விகிதம்

நடைமுறையில், உற்பத்தித்திறன் அளவைகள் ஒரு விகிதமாக அமைகின்றன; அதை உற்பத்தியான அளவு Q-ஐ, உற்பத்திக் காரணிகளின் உட்பாடான F என்பதால் வகுத்துப் பெறலாம். இந்த வடிவத்தில் அதனை உற்பத்தித்திறன் குறியீடு என்று அழைத்து, அதனை P_r என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடலாம்; ஆக, $P_r = Q/F$. காரணி உட்பாட்டின் ஓர் அலகிற்கான சராசரி வெளிப்பாட்டு மாறுதல்களை, இந்தக் குறியீட்டில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் அளவிடும். இதே விகிதத்தைத் தலைகீழாக F/Q என்று எழுதினால், அது வெளிப்பாட்டின் ஓர் அலகிற்குத் தேவையாகும் காரணி உட்பாட்டினைக் குறிக்கும். இரண்டாம் விகிதத்தை, உற்பத்தியான பொருள்களின் அலகிற்குத் தேவைப்படும் காரணிகளின் குறியீடாகவும் கருதலாம்; அதனை R என்ற அடையாளத்தால் கூறலாம். இரண்டு குறியீடுகளின் விளக்கமும், Q என்ற வெளிப்பாட்டு அளவையிலும், F என்ற உட்பாட்டு அளவையிலும் இடம்பெற்றுள்ள காரணிகளைப் பொறுத்து இருக்கும் என்பது வெளிப்படை. உற்பத்திக் குறியீடுகளின் தன்மையைப்பற்றி முன்பே படித்தோம். உட்பாட்டுக் காரணியின் அளவைக் கணக்கிடப் பல முறைகளைக் கையாளலாம். F என்பது, இயற்கை வளங்கள், மூலதனங்கள், உழைப்பு, தொழில் துணிவு (enterprise) முதலியவைகளின் ஒரு மொத்த அளவையாகவோ, இவைகளில் சிலவற்றின் மொத்தமாகவோ இருக்கலாம்; அல்லது ஏதாவதொரு காரணியாகவோ, காரணியின் பகுதியாகவோ இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, விவசாய உற்பத்தியை, நிலத்தின் ஓர் ஏக்கருக்கு இவ்வளவு என்றோ, மூலதனமாகப் போடப்பட்ட ஒரு டாலருக்கு இவ்வளவு தொழில் உற்பத்தி என்றோ, அல்லது தொழிற்சாலை இவ்வளவு என்றோ, அல்லது ஆற்றலின் ஒரு குதிரைத் திறனிற்கு ஒன்றுக்கு இவ்வளவு என்றோ கணக்கிடலாம். அதேபோன்று ஒரு தனித்த பொருளாதாரத் துறையின் வெளிப்பாட்டை வேலையிலுள்ள ஆள் ஒருவனுக்கு இவ்வளவு என்றோ, வேலை நடந்த மனித-மணி ஒன்றுக்கு இவ்வளவு என்றோ கணக்கிடலாம். இரண்டாம் நிலையில், உற்பத்தியில் நேராக வேலை பார்ப்பவர்களைமட்டும் கருதலாம்; அல்லது அவர்களுடன் மேற்பார்வையாளர்கள், நிர்வாகிகளையும் சேர்த்துக்கொள்ளலாம். உற்பத்தித்திறன் குறியீடு பொருட்செறிவுடையதாக இருக்கவேண்டுமென்றால், அது Q/E என்று அமைவது நல்லது—இங்கு Q என்பது வெளிப்பாட்டையும், E என்பது உற்பத்தி முறையில் நிகழும் எல்லாவகை மனித முயற்சிகளையும் குறிக்கும். இது நடைமுறையில் Q/M என்ற வடிவில் அமைகிறது—M என்பது வேலை நிகழ்ந்த மனித-மணிகளைக் குறிக்கும்; இந்த மனித-மணி

அளவையின் தன்மை, தேவையான விவரங்கள் கிடைப்பதாயும், ஆய்வாளரின் நோக்கத்தைப் பொறுத்தும் அமையும்.

இதுபோன்ற உற்பத்தித்திறன் அளவைகள் காரணச் சாட்டுகளைக் (causal imputation) குறிப்பதில்லை என்பதனை இப்பொழுது வலியுறுத்துகிறோம். ஓர் ஏக்கர் நிலத்தில் இவ்வளவு புஷல் கோதுமை விளைச்சல் ஆகிறது என்னும்பொழுது—கோதுமை உற்பத்தியில் நிலம் ஒன்றுதான் பங்கு கொள்கிறது என்றோ, நிலக்காரணிதான் விளைச்சல் அதிகமாகி யிருப்பதற்குக் காரணம் என்றோ கூறுவதாகாது. அதேபோல், முதலீட்டிற்கும் வெளிப்பாட்டிற்குமான ஓர் அளவை இருந்தால், அந்த விகிதத்தில் நிகழும் மாற்றங்களுக்கெல்லாம் முதலீடுதான் காரணம் என்று கொள்ளுதல் கூடாது. வேலை நிகழ்ந்த மனித-மணிகளையும் வெளிப்பாட்டையும் கொண்ட உற்பத்தித் திறன் குறியீட்டின் மதிப்பு அதிகரித்ததாகத் தெரிந்தால், அந்த அதிகரிப்பிற்குக் காரணம் உழைப்புக் காரணிதான் (labour factor) என்று கொள்ளக் கூடாது. எல்லா நிலைகளிலுமே உண்மையான காரண உட்பாடு (actual factor input) மற்ற எல்லா உற்பத்தி ஏஜென்டுகளின் (agents of production) ஒரு மொத்தமாகும். மனிதக் காரணியானது, ஆற்றல், முதல் உற்பத்திக்குச் சாதகமான பல அமைப்பு முறைகள் எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்தியே இயற்கை வளங்களிலிருந்து பொருள்களை உற்பத்தி செய்கிறது. இந்தக் காரணி மொத்தத்தின் ஒரே ஒரு பகுதியைமட்டும் கருதி, அதில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கொண்டு வெளிப்பாட்டில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவது எளிதானதும் பொருள் செறிவானதுமாகும்; ஆனால், இந்த ஒரு காரணிமட்டிலும் தனியே இயங்கி லாபத்தையோ நஷ்டத்தையோ உண்டுபண்ணுகிறது என்று கருதுவது தவறாகும். பொதுவாக, மேலே குறிப்பிட்டதுபோல், மனித முயற்சி உட்பாட்டை வைத்து வெளிப்பாட்டை அளவிடுவதுதான் மிகுந்த பயன்தரும் முறை. இதையே பின்வரும் பகுதிகளில் செயலாக்குவோம். ஆனால், இந்த முயற்சியின் பயனுடைத் தன்மை, மனிதக் காரணியின் திறமையைமட்டும் பொறுத்து இல்லை என்பதனையும், செயற்படும் கருவிகளின் தன்மை, எண்ணிக்கைகளையும், பயன்படுத்திய ஆற்றலின் அளவையும், உற்பத்திக் கழக அமைப்பின் தன்மையையும் மற்ற ஏனைய உற்பத்திச் சிறப்புமுறைகளையும் பொறுத்து இருக்குமென்பதையும் நாம் நன்கு நினைவில் வைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

உற்பத்தி முயற்சியின் பயனுடைத் தன்மைக்கான ஒரு பொதுக் குறியீட்டைப் பெற—அக் குறியீடு Q/M அல்லது M/Q என்ற இரு வடிவங்களில் ஏதாவதாக அமைந்தாலும் சரி—இருவகை

முறைகளையும்பற்றி அறிதல் நல்லது. ஒரு முறையில், ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொண்டுள்ள அலகுகளான தொழிற்சாலைகளில் அல்லது தொழில்களில், உழைப்புத் தேவைகளின் ஓர் அலகிற்கான உற்பத்தித் திறன் அளவைகளிலிருந்து தொடங்குவோம். மற்றொரு முறையில், பல பொருள்களையும் தொழில்களையும் கருதி நிறுவப்பெற்ற உழைப்பு உட்பாடுகள், வெளிப்பாடுகளின் விரிவான அளவைகளைக் கொண்டு உற்பத்தித்திறன் குறியீடுகளை அமைப்போம். முதல் முறையில் கிடைப்பவைகளை 'நேராக நிறுவப் பெற்ற அளவைகள்' (directly defined measures) என்றும், இரண்டாம் முறையில் கிடைத்தவற்றை 'வருவிக்கப்பெற்ற அளவைகள்' (derived measures) என்றும் கூறுவோம்.

உழைப்புத் தேவை அலகுக் குறியீடுகளை நேராகக் கணக்கிடுதல் (Direct Construction of Index Numbers of Unit Labour Requirements)

ஒரு குறியீட்டில் பல பொருள்களினுடையனவும், தொழிற்சாலைகளினுடையனவும், நிறுவனங்களினுடையனவும் முயற்சி உட்பாடுகளும், வெளிப்பாடுகளும் இடம்பெறும்; இவைகளின் அளவைகளைப் பயன்படுத்தி, புள்ளியியலாய்வாளர் இந்த முறையில் கையாளுவார். ஒரு தனிப் பொருளின் அல்லது தொழிற்சாலையின் வெளிப்பாடான qஐயும், வேலை நிகழ்ந்த மனித-மணிகளையும் கொண்டு r என்ற வெளிப்பாட்டு அலகு ஒன்றுக்கான உழைப்புத் தேவையையும் அவர் கணக்கிடுவார். இதனை $r = m/q$ என்று காட்டலாம். m, q என்ற இரண்டும் திருத்தமாக ஒப்பிடுமாறு இருத்தல் அவசியமாகும். அஃதாவது, m என்ற முயற்சியால் நிகழ்ந்த பொருளாக q இருக்கவேண்டும். q என்பது ஒரு மொத்த அளவையாகவே (gross measure) அமைந்துவிடுவதுதான் இந் நிலையில் நேரக்கூடிய பிழையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, q என்பது ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியான கார்களின் எண்ணிக்கையாகவும், உற்பத்தி முறையின் இறுதிநிலை வேலைகளைமட்டும் குறிக்கும் கழிவான அளவையாக m என்பதும் இருக்கக்கூடும். எனவே, m என்ற அளவையானது காரினுள்ளே இருக்கக்கூடிய பல பொருள்களின் உற்பத்தியையும், மற்றும் உறுப்புகளின் உற்பத்தியையும் கருதுவதாகாமல், இறுதிநிலை அமைப்பை (fabrication) மட்டும் கருதுவதாகிவிடும். மற்றும் நேரக்கூடிய ஏனைய பிழைகளைப்பற்றி—செய்முறையினிடையே நிகழும் வேலைகளை விட்டுவிடுவதால் ஏற்படுவது, பட்டியல் மாற்றங்களால் ஏற்படுவது போன்றவைகளும்—முன் பக்கங்களிலேயே கூறியுள்ளோம். ஆனால், m, q என்ற இரண்டும் ஒப்பிடக்கூடிய நிலையில் இருந்தால், வருவிக்கப்பெற்ற r மதிப்புகள், உற்பத்தித்திறன் மாற்றங்களைத் திருத்தமாக

அளவிடுவதற்கான அடிப்படைகளைப் புள்ளியியலறிஞருக்குத் தரும்.

உழைப்புத் தேவை அலகின் அளவை ஓர் அலகின் விலையைப் போன்று அமைந்தது. எனவே, விலைக்குறியீடுகளை அமைப்பது போலவே, வாய்பாடுகளை நிறுவி, உழைப்புத் தேவை அலகுகளின் குறியீடுகளையும் அமைக்கலாம். (உற்பத்தித் திறன் அளவைகளின் ரெஸிப்ரோக்கல்களே உழைப்புத் தேவை அலகுகளின் குறியீடுகள்). லாஸ்பெய்ரேயின் வாய்பாட்டின்படி :

$$R_{01}=\frac{\Sigma r_1 q_0}{\Sigma r_0 q_0} \tag{14·6}$$

'0' என்ற அடிப்படையில், அக்காலத்திற்கான நிறைகளைப் பயன்படுத்திய, '1' என்ற காலத்தின் உழைப்புத் தேவை அலகின் அளவையாகும் இது. எனவே, ஒவ்வொரு பொருளினுடைய r-ன் முக்கியத்துவம் அந்தப் பொருளின் எவ்வளவு அலகுகள் அடிப்படைக் காலத்தில் உற்பத்தியாயின என்பதன் விகித சமமாகும். மாருத 'சூழ்நிலை'யாகக் கருதப்படுவது அடிப்படைக் காலமே; அந்த ஆண்டில் உற்பத்தியான பொருள்களின் அளவுகளே 'சூழ்நிலை' யைக் குறிப்பிடுபவையாகும். குறித்த ஆண்டின் அளவுகளால் நிறையாக்கி (r-களால்) பாஸ்ச்சே குறியீட்டை,

$$R_{01}=\frac{\Sigma r_1 q_1}{\Sigma r_0 q_1} \tag{14·7}$$

என்ற வாய்பாட்டினுல் கண்டுபிடிக்கலாம். இவ்விரண்டின் பெருக்குச் சராசரியே உழைப்புத் தேவை அலகின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணுகும். இங்கெல்லாம் விலைக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவதுபோன்ற நிலையே உள்ளது—ஏனென்ருல், விலை அலகுகளும் உழைப்புத் தேவை அலகுகளும் ஒரேவகையான அளவைகள்.

இரண்டு நிலைகளுக்குமுள்ள ஒற்றுமை, குறியீடுகள் ஒன்றுடனென்று பொருத்தமாயுள்ளனவா என்று சோதிக்கும்பொழுதும் இருக்கும். விலைகள், அளவுகள், மதிப்புகள்—இம் மூன்றினிடையே பொருத்தம் உள்ளதை $PQ=V$ என்ற சமன்பாடு (காரணி—திருப்பச் சோதனை சரியாயிருக்கும்பொழுது) குறிப்பிடும். இங்கு பெரிய எண்களான (capital letters) P, Q, V என்பவை முறையே விலைகளின், அளவைகளின் மதிப்புகளின் குறியீடுகளைக் குறிக்கும். இப்பொழுது மொத்த மனித-மணிகளை M என்பதாலும், உழைப்புத் தேவை அலகுக் குறியீட்டை R என்பதாலும், பருப்பொருள் அளவுக் குறியீட்டை Q என்பதாலும் குறிப்பிட்டால், இவைகளிடையே பொருத்தம் உள்ளதை $RQ=M$ என்பது காட்டும். ஒரு தனித்தபொருளுக்கு $rq=m$ என்ற விதி சரியாகவேதான் இருக்கும். ஆனுல், பொதுவான இயற்கணித

சமன்பாடு சரியாக இருக்கவேண்டுமாயின், குறியீடுகளுக்கான வாய் பாடு காரணி - திருப்பச் சோதனைக்கு உட்பட்டதாக இருத்தல்வேண்டும். பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டிற்கும் உழைப்புத் தேவை அலகுகளுக்கும் குறியீடுகளை அமைக்க, ஃபிஷரின் விழுமிய வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால், சமன்பாடு சரியாக இருக்கும். வாய்பாடுகளை மாற்றவேண்டுமென்றால்—உற்பத்திக் குறியீட்டை லாஸ்பெய்ரேயின் முறையிலும், உழைப்புத் தேவைக் குறியீட்டை பாஸ்ச்சேயின் முறையிலும் கணக்கிட்டால், கிடைக்கும் முடிவுகள் பொருத்தமாகவே அமையும்.[7] அஃதாவது :

$$\frac{\Sigma q_1 r_0}{\Sigma q_0 r_0} \times \frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_1 r_0} = \frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_0 r_0} \qquad (14{\cdot}8)$$

உற்பத்திக் குறியீட்டை, உழைப்புத் தேவைக் குறியீட்டால் பெருக்கினால் வரும் பயன், வேலை நிகழ்ந்த மொத்த மனித-மணிகளின் மாற்றங்களை அளவிடும். மொத்த மனித-மணிகளினுடைய, மற்றும் உற்பத்தியினுடைய குறியீடுகளிலிருந்து உற்பத்தித் திறன் குறியீடுகளையும், உழைப்புத் தேவை அலகுக் குறியீடுகளையும் பெறும் பொழுது எழும் பிரச்சினைக்கு இந்தத் தொடர்புச் சமன்பாடு பயன்படும்.

உழைப்புத் தேவைகளுக்கான, மற்றும் உற்பத்தித் திறனுக்கான நிறுவப்பட்ட குறியீடுகள்

ஒரு தனித்த பொருளிற்கு $r = m/q$. இதே தொடர்பு விதி பல பொருள்களின் குறியீடுகளினிடையேயும் இருப்பின், $R = M/Q$ என்று வரும். M-ல் ஏற்படும் மாற்றங்களின் ஓர் அளவை $\frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_0 r_0}$ என்பதாகும்; இது குறித்த ஆண்டின் மொத்த மனித-மணிகளை, அடிப்படை ஆண்டின் மொத்த மனித-மணிகளால் வகுத்தால் கிடைக்கிறது. எனவே, M/Q என்பதிலிருந்து R என்ற குறியீட்டைப் பெறும்பொழுதும், உற்பத்திக் குறியீட்டைக் கணக்கிடும்பொழுதும், q-க்களை r-களின் நிறைகளால் பெருக்குவதாக அமையும் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும். அப்பொழுது கிடைக்கும் குறியீடுகள் ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தமாகவும், தகுந்தவையாகவும் அமையும். அஃதாவது,

$$R = M/Q = \frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_0 r_0} \div \frac{\Sigma q_1 r_0}{\Sigma q_0 r_0} = \frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_1 r_0} \qquad (14{\cdot}9)$$

இது, r-என்பவைகளைக் குறித்த ஆண்டின் q-க்களால் நிறையாக்கிய உழைப்புத் தேவைகளின் குறியீடாகும்.

இந்த முறை பகுத்தறிவிற்கொத்ததாகவும், இயற்கணித வழியில் திருப்திகரமாகவும் உள்ளது. M-ன் உறுப்புகளும், Q-வின் உறுப்பு

[7] பக்கங்கள் 157-8 பார்க்க.

களும் ஒரே படித்தானவை. ஆனால், இந்த முறையில் நிகழக்கூடிய நடைமுறைச் சிக்கல்களை, உற்பத்திக் குறியீடுகளைப்பற்றி விளக்கும் பொழுதே குறிப்பிட்டோம். உற்பத்தித்திறனைக் கணக்கிட, நமக்குச் சாதாரணமாக r-கள் கிடைப்பதில்லை. எனவே, விலை நிறைகளையே பயன்படுத்தி, பருப்பொருட் பருமக் குறியீடுகளை வகுப்போம். அது போன்ற, லாஸ்பெய்ரே வகைக் குறியீட்டைக் கொண்டு, M, Q இரண்டிலிருந்து Rஐக் கணக்கிட,

$$R = M/Q = \frac{\Sigma q_1 r_1}{\Sigma q_0 r_0} \div \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \qquad (14{\cdot}10)$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பொருத்தமற்ற அளவுகள் இந்த நிறுவுதலில் இடம்பெற்றுள்ளன என்பது தெளிவு. சுத்தமான மனித-மணிகளின் அளவையொன்றை, விலைகளால் நிறையிடப்பட்ட பொருட் குறியீட்டால் வகுத்துள்ளோம். உழைப்புத் தேவை அலகுகளுக்கான நிறுவிய குறியீட்டில் பண சம்பந்த மான காரணியும் இடம்பெறுகிறது.

கடுந் தூய்மையை விரும்பும் ஒருவருக்கு மேற்கூறப்பட்ட முறை குழப்பமுள்ளதாக இருக்கலாம் என்றாலும், அதிலும் சிறப்புகள் இல்லாமல் இல்லை. பண அடிப்படையான பொருளாதாரத்தைப்பற்றிய பிரச்சினைகளில், உழைப்புத் தேவை அலகுகளைவிட அலகு விலைகளைச் ‘ சூழ்நிலை ’யைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வது வெகு பொருத்தமானதாகும். உற்பத்தித்திறன் - மதிப்புக் குறைவாகவுள்ள பகுதிகளிலிருந்து உற்பத்தித்திறன்-மதிப்பு அதிகமாகவுள்ள பகுதிகளுக்கு உழைப்பை நாம் மாற்றினோமானால், நிகழும் லாபம் உற்பத்தித்திறன் அளவைகளில் இடம்பெறுவதாக அமைதல் சரியானதே. எனவே, சவுகரியத்தையொட்டித்தான் மதிப்பு அல்லது விலைகளால் நிறையாக்கப்பெற்ற உற்பத்திக் குறியீடுகளை —உழைப்புத் தேவை அலகு அளவைகளையும், உற்பத்தித் திறன் அளவைகளையும் நிறுவப் பொதுவாக—பயன்படுத்துகிறோம் என்று கூறுவதற்கில்லை.

இன்று வெளியிடப்படும் உற்பத்தித் திறன் குறியீடுகளும், உழைப்புத் தேவைக் குறியீடுகளும், $P_r = Q/M$ அல்லது $R = M/Q$ என்ற அமைப்புகளிலுள்ள நிறுவப்பெற்ற அளவைகளே என்பது உண்மை. விலை-நிறையாக்கப்பெற்ற பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டுக் குறியீடுகளை, குறித்த உற்பத்திப் பருமத்திற்காக நிகழ்ந்த மொத்த மனித-மணி வேலைகளின் அளவால் வகுத்து, அக் குறியீடுகளைப் பெறுகிறோம். (வேலை நிகழ்ந்த மனித-மணிகளைக்கொண்டு கணக்கிடாமல், வேலை செய்யும் மனிதனொருவனுக்கான வெளிப்பாட்டு மாற்றங்களை வைத்துச் சில குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவார்கள். அஃதாவது, $P_r = Q/N$; இங்கு N என்பது வேலை செய்யும் ஆட்களின்

எண்ணிக்கையாகும்.) Q, M என்ற இரு பகுதிகளும், ஒப்பிடக் கூடியவைகளாக இருத்தல்தான் முக்கிய விதியாகும். 'பண சம்பந்தமான காரணி உட்புகுதலை' நாம் ஏற்றுக்கொள்வோம்; மேலும், பல நோக்கங்களுக்காக அதை வரவேற்போம். ஆனால், உற்பத்திக் குறியீடுகளின், மற்றும் மனித-மணிக் குறியீடுகளின் மொத்த அடக்கத்தில் (coverage) பெரும்பான்மையான மாறுதல்களை நாம் ஒத்துக்கொள்ளமாட்டோம்.[8]

வருவிக்கப்பெற்ற இந்த அளவைகள் பற்பல மாறிகளால் இயக் கப்படுபவை; எனவே, அவைகளைப் பல ஆண்டுக் காலங்களுக்குக் கணக்கிட்டால், அவைகள் ஒரே மாதிரியான விளக்கம் தருபவை களாக அமைவது கடினமே. Q-வில் இடம்பெறும் பொருள்களின் பண்புகள் (விரிவாகக் கூறவேண்டுமானால், அப் பொருள்களின் உற்பத்தி முறைகள்) மாறும். எந்தெந்தப் பொருள்களை Q-வில் எடுத்துக்கொண்டுள்ளோம் என்பதைப் பொறுத்தும், பல தொழிற் சாலைகளுக்கான ஒப்புமைப் பங்குகளைப் பொறுத்தும் Q-வின் மொத்த அமைப்பு மாறும். உழைப்பு உட்பாட்டிலும் மாறுதல்கள் நிகழும். உற்பத்தி முறையில் பங்கு கொள்ளும் கருவிகளிலும், செய்முறை களிலும் மாற்றம் ஏற்படும். இவை போன்ற பல மாறிகளினால் ஏற்படும் இடைவிளைவுகளுக்கான முடிவை, குறித்த ஓர் ஆண்டிற் கான உற்பத்தித்திறன் குறியீடு அளவிடும்.

உற்பத்தித்திறன் மாற்றங்களின் தற்காலத்திய சில அளவைகள்

நாட்டின் பொருளாதாரத்திற்கே முழுமையான அளவைகளி லிருந்து தனித்த தொழிற்சாலைகளிலுள்ள மாற்றங்களை அளவிடும் அளவைகள்வரை, இன்று அமெரிக்காவில் உற்பத்தித் திறன் குறியீடுகள் வெளியிடப்பெறுகின்றன; மேலும், ஒரே தொழிற்சாலை யின் பல பகுதிகளுக்கும் குறியீடுகள் கிடைக்கின்றன. உற்பத்திக் கான வெளிப்பாட்டை, முதல் உட்பாட்டிற்கோ அல்லது ஆற்றல் (power) உட்பாட்டிற்கோ ஒப்புமையாக்குவதற்குச் சில முயற்சிகள் நடந்துவருகின்றன. என்றாலும், வெளியிடப்படும் பெரும்பாலான குறியீடுகளில் மனித முயற்சியின் உட்பாடுதான் பருப்பொருள் வெளிப்பாட்டுடன் ஒப்புமையாக்கப்படுகிறது. மனித முயற்சியை, மனித - மணிகளிலோ அல்லது மனித - ஆண்டுகளிலோ அளவிடு வார்கள். விரிவான நோக்கமுடைய குறியீடுகளெல்லாம்—முக்கியமான

[8] கிடைக்கும் வெளிப்பாட்டு, உட்பாட்டு அளவைகளின் மொத்த அடக்கத்தி லுள்ள வேற்றுமைகளைச் சரிக்கட்டுவதற்காகத் திருத்தங்கள் அமைக்க வேண்டிய தாகலாம்; ஆனால், அத் திருத்தங்கள் பிழைகளுக்குட்பட்டவை. அவைகளை நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் என்ற நிறுவனமும், மற்ற ஏனைய நிறுவனங்களும் அமைத்துள்ளன. இந்தத் திருத்தல் அமைப்புகளைப்பற்றிய நுட்பமான எடை போடுதலை ஸீகெல் (Siegel) என்பவரின் நூலில் (து. நா. ப. 142) காணலாம்.

தொழில்களுக்கோ அல்லது முழுமையான பொருளாதாரத்திற்கோ (whole economy) பொருத்தமானவை—வருவிக்கப்பெற்ற வகையைச் சார்ந்தவை; எனவே, நாம் முன்பே கூறியுள்ள வரம்புகளுக்குட்பட்டவைகள். குறுகிய நோக்கம் கொண்ட பல குறியீடுகளை, தனித்த தொழிற்சாலைகளிலிருந்து அக்கறையுடன் திரட்டப்பட்ட உற்பத்திகளின் பதிவேடுகளையும் மனித-மணி உட்பாடுகளையும் கொண்டு தற்காலத்தில் கணக்கிடுகிறார்கள். குறுகிய நோக்கம் கொண்டவையானாலும், உற்பத்தித்திறன் லாபங்கள் கிடைக்கக்கூடிய காரணிகளைப்பற்றிய பகுப்பாய்வுகளில் இவைகள் பெரிதும் பயன்படுபவை என்று துணியலாம்.

அட்டவணை 14-3-ல் உள்ள அளவைகள் முழுமை அளவைகளின் எடுத்துக்காட்டுகள். உண்மையான, நாட்டின் மொத்த உற்பத்திக்கான குறியீடுகளை, 19ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியிலிருந்து 20ஆம் நூற்றாண்டின் நடுப்பகுதிவரை பத்தாண்டளவில் அங்குக் காண

அட்டவணை 14-3

1891-1950-களிடையே அமெரிக்க நாட்டின் உண்மையான, நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி, உழைப்பு உட்பாடு, மற்றும் உற்பத்தித்திறன்கள்; பத்தாண்டு அளவில்.*

பத்தாண்டுகள் (Decades)	நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி (1929ஆம் ஆண்டின் பில்லியன் டாலர்கள்)	நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி (ஒப்புமை)	உழைப்பு உட்பாட்டின் மொத்த மனித-மணிகள் (ஒப்புமை)	ஒரு மனித-மணிக்கான வெளிப்பாடு (ஒப்புமை)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1891-1900	294	100.0	100.0	100.0
1901-1910	455	154.8	126.1	122.8
1911-1920	603	205.1	140.5	146.0
1921-1930	838	285.0	145.1	196.4
1931-1940	843	286.7	122.8	233.5
1941-1950	1.493	507.8	180.5	281.3

* மில்ஸ் அவர்களின் நூலிலிருந்து [து.நா.ப. 103].

லாம். (விலை மாற்றங்களுக்கான திருத்தங்கள் செய்யப்பெற்ற நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி மதிப்பீடுகளிலிருந்து இவைகள் வருவிக்கப்பெற்றுள்ளன.) இவைகளுக்கொப்பான உழைப்புக் குறியீடுகளை (4)ஆம் பத்தியில் காணலாம். சராசரி வேலை-வாரத்தின் அளவில் ஏற்படும் மாற்றங்களுக்கான திருத்தங்கள் அமைக்கப்பெற்ற, வேலையிலுள்ள மொத்த உழைப்பாளிப் படை (labour force) மதிப்பீடுகளிலிருந்து—பத்தாண்டு அளவில்—இவைகளைக் கணக்கிட்டுள்ளனர்.

மனித-மணிக்கான வெளிப்பாட்டுக் குறியீடுகளை நிறுவி, (5)ஆம் பத்தியில் கொடுத்துள்ளனர். ஒரே சீரான முன்னேற்றத்தையே இங்குக் காண்கிறோம். ஆனால், காணப்படும் முன்னேற்றங்கள் சமமானவையல்ல. ஒரு மனித-மணிக்கான உற்பத்தியில், ஒப்புமை வழியில் மிக அதிகமான ஏற்றம் 1920 முதல் 1929 வரையுள்ள பத்தாண்டுகளில் நிகழ்ந்துள்ளது. இந்தக் காலம், வெகு சிறப்பான முன்னேற்றம் கொண்டது. முதல் யுத்த காலத்திற்கான பத்தாண்டிலும், மந்தமான 1930-க்கான பத்தாண்டிலுமே மிகக் குறைவான ஒப்புமை முன்னேற்றங்களைக் காண்கிறோம்.

இவைபோன்ற அகல் விரிவான மதிப்பீடுகள், உற்பத்திக்கான வளங்கள் (resources) எத்துணைப் பயனுடைத் தன்மையுடன் உபயோகப்படுத்தப்பெற்றுள்ளன என்பதில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடப் பயன்படும் உற்பத்தித் திறன் குறியீடுகளில் நிகழும் அசைவுகள், எத்தகைய காரண விசைகளால் தூண்டப்பட்டவை என்பவற்றை அறிய இவைகள் பயன்படா. பகுப்பாய்வுகளுக்கு, ஆழ்ந்த களமுறை ஆய்வுகளின்மூலம் கிடைக்கும் அளவைகளே தேவை; உற்பத்தி செய்முறையைக் குறிப்பிட்டுத் தகுந்த கட்டுப்பாடுகளுடன் ஆய்வுகளைச் செயலாக்கினால்தான், இறுதியாகக் கிடைக்கும் குறியீடுகள் தனித்த தொழில்களின் உற்பத்தித் திறன் மாற்றங்களை நன்கு அளவிடும். அத்தகைய களமுறை ஆய்வுகளால் கிடைத்த சில குறியீடுகளை அட்டவணை 14-4-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 14-4-ன் (2)ஆம் பத்தியில் காணப்பெறும் உழைப்புத் தேவைக் குறியீடுகள், குறிப்பிட்ட மூன்று வகைகளைச் சார்ந்த பாதை அமைக்கும் டிராக்டர்களுக்கானவை. பொதுவாக, உழைப்புத் தேவை குறைந்துவருவதை (உற்பத்தித் திறன் அதிகமாவதை), யுத்தகாலத்தின் முற்பகுதியில் காண்கிறோம்; பிறகு 1946வரை உழைப்புத் தேவை அதிகமாவதையும், கடைசியாக 1946-லிருந்து 1950வரை மறுபடியும் குறைவதையும் பார்க்கிறோம். இத் தகவல்கள் தொகுக்கப்பட்ட முறை விவரங்களுக்கான விளக்கத்தை பியூரோ தருகிறது. எனவே, அவைகளைக்கொண்டு, இந்த மாறுதல்களுக்கான காரணிகள் எவை என்பதைச் சிறிதே திட்டத்துடன் கூறுவது சாத்தியமாகும்.

குறிப்பிட்ட சில பொறிக்கருவி வகைகளுக்கான உழைப்புத் தேவைக் குறியீடுகளை (3),(4),(5) ஆம் பத்திகளில் காணலாம். பொறிக் கருவித் தொழிலின் வெளிப்பாட்டைச் சுமார் முக்கால் பங்குக்கான வகைகள் இவைகளில் இடம்பெற்றுள்ளனவாதலால், அவைகளின் மொத்த அடக்கம் சற்று விரிவானதாகும். (பற்பல பொருள்களின் உழைப்புத் தேவை அலகுகளை இணைக்கும்பொழுது, மதிப்பு நிறை

அட்டவணை 14-4

1939–50 காலத்திற்கான, வெளிப்பாட்டின் ஓர் அலகிற்கான மனித-மணிகளின் குறியீடுகள்*

குறிப்பிட்ட சில தொழிற் பொருள்களுக்குமட்டும்

ஆண்டு	ஓர் அலகின் மனித-மணிகள்: பாதை அமைக்கும் டிராக்டர் — தொழிலின் மொத்த உழைப்பு	பொறிக்கருவி வகைகளில் சில — நேரான தொழில் உழைப்பு†	நேரல்லாத தொழில் உழைப்பு‡	தொழிலின் மொத்த உழைப்பு
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1939	100	100	100	100
1940	99	93	87	90
1941	91	90	89	90
1942	91	86	94	91
1943	95	82	100	92
1944	99	88	115	102
1945	101	89	116	103
1946	105	95	119	108
1947	99	96	122	111
1948	99	98	121	112
1949	97	94	120	108
1950	91	91	115	105

* இக் குறியீடுகளை அமெரிக்காவின் பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் என்ற நிறுவனத்தார் கணக்கிட்டுள்ளார்கள்; இவைகள் முழு எண் திருத்தமாக்கப் பட்டவை. [பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸாரின் நூல்களைப் (து.நா. ப. 174, 177) பார்க்கவும்.] பியூரோவின் பொதுவான பணிகளைப்பற்றியும், இரண்டாம் நிலை விவரங்கள், களமுறையில் கிடைத்த விவரங்களைப்பற்றியும் அறிய து.நா.ப. 173ஆம் நூலைக் காண்க.

† உற்பத்தி முறைகளில் நேராக வேலை செய்யும் கூலி பெறுவோர்களின் வேலைகள்—சிறப்பாகப் பொறிகள் நடத்துவோர், கூட்டமைப்பு செய்வோர்களின் வேலைகள்—இந்த நேரான உழைப்பு உட்பாட்டின மணிகளில் இடம்பெற்றுள்ளன.

‡ நேரல்லாத மணிகளில், மணிக்குறிப்பு வைப்போர் (Timekeepers) வேலைகள் கப்பலேற்றும், கப்பலிலிருந்தும் பெற்றுக்கொள்ளும் வேலைகள், கையாளுதல் (handling), உற்பத்திக்கான முறைகளை அமைத்தல், பொறிகளை அமைத்தல், மேற்பார்வை, பராமரித்தல், கருவிகள், அச்சுகள், அளவுக் கருவிகளைச் செப்பனிடுதல் முதலியன; மற்றும், தொழிற்சாலையின் மேற்பார்வை முதலிய வேலைகளெல்லாம் இடம்பெற்றுள்ளன. பொதுக்கணக்குப் பார்த்தல், வாங்குதல், பணியாளர்களுடன் தொடர்புகள், நலத்திற்கான தொண்டுகள், வளர்ச்சிக்கான பொறியியல் முதலிய வேலைகளை யெல்லாம், நேரான நேரல்லாத இருவகை மணிகளிலிருந்தும் பியூரோ முடிந்தபோதெல்லாம் நீக்கியுள்ளது. நேரான, நேரல்லாத இரண்டின் கூட்டுத் தொகையே தொழிலின் மொத்த உழைப்பாகும்.

களையே கையாளுகிறோம்.) இப்பொழுது, தொழிலின் மொத்த உழைப்பை இரு பிரிவுகளாக ஆக்குகிறோம்—நேரானது, நேரல்லாதது. நேரான உழைப்புத் தேவைக்கும், நேரல்லாத உழைப்புத்

தேவைக்கும் உள்ள போக்குகளிடையே தென்படும் தெளிவான வித்தியாசம்தான் இந்த அட்டவணையிலுள்ள தகவல்களின் தனிச் சிறப்பு. பொறிக்கருவி தயாரிப்பில், உற்பத்தியின் ஓர் அலகிற்குத் தேவைப்படும் நேரான உழைப்பில் திட்டமான குறைவைக் காண் கிறோம்; அதேசமயம், நேரல்லாத உழைப்பின் அளவு தெளிவாக அதிகமாயுள்ளதையும் காண்கிறோம். இது, தொழிலமைப்பு முறையில் ஏற்பட்ட மாறுதலையே குறிப்பிடும். குறித்த 12 ஆண்டுகளில், மொத்தமாக நோக்குங்கால்—அதாவது, மொத்த தொழில் உழைப்பைக் கருதினால்—உழைப்புத் தேவை அலகுகள் அதிகரித்துள்ளன என்பதே முடிவாகும். கடைசி இரண்டு ஆண்டுகளில்மட்டும் இறங்கும் போக்கு தென்படுகிறது.

அட்டவணை 14-5

அமெரிக்கப் பொருளாதாரத்தின் குறிப்பான சில பிரிவுகளின் உற்பத்தித் திறன் குறியீடுகள், 1939–52*

ஆண்டு	விவசாயம்	ஒரு மனித-மணியிற்கான உற்பத்தி சுரங்கம்	நீராவி ரயில்வேக்கள்†	மின்சார வெளிச்சமும் ஆற்றலும்
1939	100	100	100	100
1940	105	102	105	109
1941	110	104	116	123
1942	119	104	140	146
1943	117	102	151	183
1944	121	105	148	191
1945	127	106	140	183
1946	134	107	129	161
1947	133	111	135	167
1948	147	111	133	171
1949	146	109	132	
1950	153	117	150	
1951	151		159	
1952	162		160	

* மூலங்கள் :

பண்ணை வெளிப்பாட்டின் குறியீடு : யு. எஸ். பியூரோ ஆஃப் அக்ரிகல்சரல் எக்கனமிக்ஸ்.

மற்றக் குறியீடுகள் ; யு. எஸ். பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்.

† முதல்தரமான ரயில்வேக்களின் ஒரு மனித-மணிக்கான பிரயாண வருவாய்.

முழுமையான உற்பத்தித் திறன் அசைவு அளவைகளுக்கும், குறித்த சில தொழிற்சாலை ஆய்வுகளால் கிடைக்கும் அளவைகளுக்கு மிடையே இருக்கக்கூடிய சில குறியீடுகளை அட்டவணை 14-5ல், காணலாம். நாட்டின் பொருளாதாரத்தின் முக்கியமான நான்கு

பகுதிகளின் உற்பத்தித் திறன் மாற்றங்களுக்கான மதிப்பீடுகள் இவை. இவைகள் இரண்டாம் நிலை மூலங்களிலிருந்து (secondary sources) கணக்கிடப்பட்டவைகளே அன்றி தனித்த தொழிற்சாலைகளின் பதிவேடுகளிலிருந்து பெற்றவையல்ல. எனவே, பொருளாதார விரிவான குறியீடுகளைப்பற்றி விளக்கும்பொழுது குறிப்பிட்ட சில குறைகள் இவைகளுக்கும் பொருந்தும். வெளிப்பாடு, உட்பாடு அளவைகளை ஒப்பிடுமாறு கவனமாக அளவைகள் அமைக்கப்பெற்றுள்ளன. இக் குறியீடுகளில் ஆண்டுக்கு ஆண்டு நிகழும் மாற்றங்களைச் சிறப்பித்துக் கூறுவது நல்லதன்று என்றாலும், குறித்த பல பிரிவுகளில் ஏற்படும் உற்பத்தித் திறன் மாற்றங்களைப் பொதுவாக இவை விளக்குகின்றன எனக் கூறலாம்

அண்மையில் மின்சார ஆற்றல் உற்பத்தியில் தான் வியக்கத்தக்க அதிகரிப்பைக் காண்கிறோம். இந்தத் துறையில் மிகச் சிறப்பான பல தொழில்நுட்ப வளர்ச்சிகள் ஏற்பட்டுள்ளன. நீராவி ரயில் துறையில், யுத்த காலத்தில் ஏற்பட்ட அதிகமான பிரயாணப் பருமனின் பயனாக, மனித-மணிக்கான உற்பத்தி திடீரென்று அதிகரித்தது; இந்த அதிகரிப்பு பிறகு சிறப்பாகக் குறையவில்லை— மற்றும் அண்மையில், மறுபடியும் அதிகரித்துள்ளதையே காண்கிறோம். பற்பல தலைமுறைகளாக விவசாயம் ஒரு பின்தங்கும் தொழிலாக இருந்துவந்தது; 1930-40ஆம் ஆண்டுகளுக்கிடையே எந்திரமயமாக்கும் இயக்கம் பரவியதால், இத் துறையிலும் ஒரு புதிய சகாப்தம் தோன்றியது. அண்மை ஆண்டுகளில் அந்த வளர்ச்சி முன்னடைந்தே வருகிறது. சுரங்கத் தொழிலில் ஏற்பட்டுள்ள உற்பத்தித் திறன் ஏற்றம், ஒப்புமுறையில் நோக்கின் குறைவுதான். பொறிவழித் தொழில்களுக்கான உற்பத்தித் திறனைப்பற்றி நமக்குக் கிடைத்துள்ள தகவல்கள், 1939-லிருந்து அது அதிகரித்திருப்பதையே காட்டுகின்றன; அந்த அதிகரிப்பு, சுரங்கத் தொழிலினுடையதைவிட மிகையாகவும், அட்டவணை 14-5-ல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தொழில்களினுடையதைவிடக் குறைவாகவும் உள்ளது.[9]

[9] *பொறிவழித்துறைக்குப் பொதுவான எந்த உற்பத்தித் திறன் குறியீடும் 1939-லிருந்து கிடைப்பதில்லை. பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தின் 'புல்லெட்டின் 1046 (Bulletin)' என்ற வெளியீடு சில குறிப்பான தொழில்களுக்கு மட்டும் குறியீடுகளைத் தருகிறது. ஃபாப்ரிகென்ட் என்பவரின் (Fabricant) குறியீட்டில் 1939-க்கு முன்னுள்ள ஆண்டுகளுக்கான குறியீடுகள் உள்ளன. (பார்க்க, து. நா. ப. 38). வெளிப்பாட்டின் ஓர் அளவையாக, பொறிவழி உற்பத்திக் குறியீட்டை, ஃபெடரல் ரிஸர்வ் குறியீட்டைக் கருதலாம்; பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தாரின் வேலைவாரச் சராசரி அளவினுடைய, மற்றும், பொறிவழி வேலைகளுடைய தகவல்களைப் பயன்படுத்தி உழைப்பு உட்பாடுகளை மதிப்பிடலாம்; பிறகு இவைகள் இரண்டையும் கொண்டு பொறிவழி மனித-மணி வெளிப்பாட்டின் மாற்றங்களைத் தோராயமாக அளவிடலாம். ஆனால், இந்த இரண்டு—வெளிப்பாடு, உட்பாடு—அளவைகளும் ஒப்பிடக்கூடியவையல்ல; எனவே, கிடைக்கும் குறியீடுகளின் பொருள் தெளிவாக இருக்காது. பொறிவழித் துறைக்கு, மொத்தமாக ஓர் உற்பத்தித்திறன் குறியீட்டுத் தொடரைக் கணக்கிட பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் நிறுவனத்தார் தற்சமயம் ஏற்பாடுகள் செய்துவருகிறார்கள்.*

இன்று புள்ளியியலறிஞருக்கு சவால் விடுகின்ற முறையிலுள்ள பிரச்சினைகளில் உற்பத்தித்திறன் அசைவுகளைத் திருத்தமாக அளவிடுவதும் ஒன்று. பொருளாதார வளர்ச்சியில் மையமாகத் திகழும் ஒரு முக்கியப் பகுதியை—பொருளாதார வாழ்க்கையில் இயக்கநிலைக் காரணியான ஒரு பகுதியைப்பற்றிய பிரச்சினை இது என்பது தெளிவு. ஆயினும், அத்தகைய மாற்றங்களை அளவிடும் முறைகளில் இப்பொழுது துவக்கம்மட்டுமே நிகழ்ந்துள்ளது எனலாம். இயல்பிலேயே திருத்தமற்ற, தோராயமான முழுமைக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுவது எளிது. அந்த அளவைகளும் பயனுடையனவாகவே இருக்கும். ஆனால், தனித்த தொழில்களுக்கும், தொழிற்சாலைகளுக்கும் பொருத்தமான குறியீடுகளை ஆழமான முறைகளில் அளவிடுவதில்தான் உண்மையான வளர்ச்சியுள்ளது. இவைகளிலிருந்து துவங்கி, உற்பத்தித்திறனில் ஏற்படும் மாற்றங்களைத் திருத்தமாக அளவிடுவதற்கும், அத்தகைய குறியீடுகளில் ஏற்படும் அதிகரிப்பிற்கான காரணங்களை நன்கு அறிவதற்கும் ஆன முறைகளைப் பெறுவோம் என்று எதிர்பார்ப்போம்.

துணை நூல்கள்

Anglo-American Council on Productivity, 'Final Report,' 1952.

Barger, H. and Schurr, S. H., 'The Mining Industries : A Study of Output, Employment and Productivity.'

Barger, H., 'The Transportation Industries,' 1889-1946: 'A Study of Output, Employment and Productivity.'

Carter, C. F., Reddaway, W. B. and Stone, R., 'The Measurement of Production Movements.'

Fabricant, S., 'Employment in Manufacturing', 1899-1939.

Fabricant, S., 'The Output of Manufacturing Industries,' 1890-1937.

Federal Reserve System, Board of Governors, 'The Revised Federal Reserve Index of Industrial Production', 'Federal Reserve Bulletin,' Dec. 1953.

Geary, R. C., 'The Concept of the Net Volume of Output with Special Reference to Irish Data', 'Journal of the Royal Statistical Society', Vol. 107, 1944.

Gould, J. M., 'Output and Productivity in the Electric and Gas Utilities.'

International Labor Office, 'Methods of Labor Productivity Statistics,' Studies and Reports, New Series, No. 18, Geneva, 1951.

Mills, F. C., 'Productivity and Economic Progress,' 'Occasional Paper 38,' National Bureau of Economic Research, 1952.

Siegel, I., 'Concepts and Measurement Production and Productivity'.

United Nations, Economic Commission for Europe, 'Economic Survey of Europe Since the War', pp. 317-335 (on sources and methods, index numbers of industrial production).

United Nations Statistical Office, 'Index Numbers of Industrial Production,' 'Studies in Methods,' No. 1, 1950.

U.S. Bureau of Labor Statistics, 'The Productivity Measurement Program of the Bureau of Labor Statistics'', 1950.

U.S. Bueau of Labor Statistics, 'Productivity Trends in Selected Industries Through 1950,' 'Bulletin' 1046, Oct. 1951.

U.S. Bureau of Labor Statistics, 'Technical Note on the Measurement of Trends in Output per Man-Hour,' April 1954.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும் நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

15. (X^2) கை-வர்க்கமும் அதன் பயன்களும்

மணநிலையும் (Marital Status) சேமிப்பும் : ஓர் எடுத்துக்காட்டு

அளவின விவரங்களை ஆராயும்பொழுது, பல வகைகளில் எழும் பிரச்சினைகளை அட்டவணை 15-1-ல் உள்ள விவரக் குறிப்புகள் நன்கு எடுத்துக் காட்டுகின்றன.

அட்டவணை 15-1

கண்டறிந்த அலைவெண்கள்

3,327 செலவு செய்வோரின் இருவழிப் பாகுபாடு (1950)*

செலவு செய்வோர்	நிஜமாக சேமிப்போர்	ஒன்றும் சேமிக்காதவர் + கடன்படுவோர்	மொத்தம்
தனியாட்கள் ...	490	390	880
மணமானவர்கள் ...	1.552	895	2,447
மொத்தம் ...	2,042	1,285	3,327

* ஃபெடரல் ரிஸர்வ் புல்லெட்டினில் (Federal Reserve Bulletin) செப்டம்பர் 1951-ல் வெளியிடப்பட்ட (பக்கம் 1063) தகவல்களிலிருந்து தொகுத்தது. இந்த விசாரணை ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டம் (Federal Reserve System) நிறுவன ஆணையாளர் குழுவினரால் துவக்கப்பட்டது.

மிச்சிகன் (Michigan) பல்கலைக்கழகத்தைச் சேர்ந்த விசாரணை ஆராய்ச்சிக் குழுவினரால் (Survey Research Center) துய்ப்போரின் நிதிகளைப் (consumer finances) பற்றிய விசாரணையொன்றில் கிடைத்த தகவல்களை இங்குச் சுருக்கியுள்ளோம். இந்த அட்டவணை

யில் 3,327 செல்வு செய்வோர்களில் (spending units)[1] மணமான வர்கள், மணமாகாது தனியாக உள்ளவர்கள் என்று இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளனர்; மற்றும், 1950ஆம் ஆண்டில் அவர்களில் எவ்வளவு பேர்கள் ஏதாவது சேமித்து வைத்தனர்; சேமிக்காமலும், கடன்பட்டும் உள்ளவர் எவ்வளவு பேர் என்றும் வகுக்கப்பட்டுள்ளனர். இந்த இருவழிப் பாகுபாட்டினால் நமக்கு 2 × 2 இணைப்புப் பட்டியல் (contingency table) கிடைக்கிறது.[2] இதில் நான்கு அறைகள் (cell) உள்ளன—1950-ல் நிஜமாக சேமித்துள்ள தனியாட்கள்; அப்படி அல்லாமலுள்ள (சேமிக்காமலோ, கடன் பட்டோ உள்ளவர்கள்) தனியாட்கள்; மணமான நிஜமாக சேமிப்போர்; மணமான சேமிக்காதோர். (சவுகரியத்தையொட்டி மணமானவர், தனியாட்கள் என்று குறிப்பிடுகிறோம். அவைகள் மேற்கண்ட நிலைகளிலுள்ளவர்களைத் தலைவராகக்கொண்ட செலவிடுவோர்களைக் குறிக்கும்.) இந்த நான்கு பிரிவுகளிலுமுள்ள அலைவெண்களை மேற்கண்ட பட்டியலில் காணலாம். பிரிவினைக்காகக் கையாண்ட இருவகைப் பண்புகள் ஒன்றோடொன்று சார்பற்றனவா என்பதே நம் பிரச்சினையாகும். 1950-ல் சேமிப்பு அல்லது சேமிப்பின்மை, செலவிடுவோர்களின் மனநிலையுடன் தொடர்புடையதாக இருந்ததா? இதுபோன்ற பிரச்சினைக்கு முடிவு காண நாம் ஓர் எடுகோளை (hypothesis) எண்ணிக்கொள்வோம். 'எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இந்தச் செலவிடுவோரின் மாதிரியானது தேர்ந்தெடுக்கப் பெற்றதோ, அதில் இந்த இரண்டு பண்புகளுக்கும் தொடர்பில்லை' என்பதே அந்த எடுகோள். இதனை 15-1 அட்டவணையில் உள்ள அலைவெண்களைக் கொண்டு சோதிப்போம்.

இந்த எடுகோளை வைத்துக்கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள நான்கு அறைகளிலும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய (expected) அல்லது ஊகக் கோட்பாடான (theoretical) அலைவெண்களை மதிப்பிடலாம். அதாவது ராண்டம் ஏற்ற இறக்கங்கள் (fluctuation) இல்லாமலும்,

[1] சொற்களின் விளக்கங்களை ஆராய்ச்சிக் குழுவினர் கீழ்வருமாறு தந்துள்ளனர்: செலவிடுவோர் ஒரே வீட்டில் வைத்துக்கொண்டு தங்கள் வருமானங்களைக் கூட்டி ஒன்றாகச் செலவிடுவோர். சில சமயங்களில் இது ஒரே ஒரு நபரையும் குறிக்கலாம்; அல்லது அவர்கள் இரத்த சம்பந்தத்தினாலோ, மண வாழ்க்கையினாலோ, அல்லது தத்து (adoption) முறையினாலோ ஒருவருக்கொருவர் சம்பந்தப்பட்டவராக இருக்கலாம்.

துய்ப்போரின் சேமிப்பு: துய்ப்புக்கும் (consumption) வரி செலுத்துதலுக்கான செலவுக்கும் போக தற்கால மொத்த வருமானத்தில் மிச்சமாகும் தொகை. கடன்களைக் குறைக்கும் செலவுகளும் சேமிப்பாகவே கருதப்படும்; கடன் அதிகமாக்கும் செலவினங்களை சேமிப்பிலிருந்து கழிக்கவேண்டும். நீடித்த நுகர்வுப் பொருள்களுக்கு (durable consumer goods) ஆகும் செலவும் துய்ப்புச் செலவாகவே மதிக்கப் பெறும். வீடு முதலினச் சொத்தாகக் கணிக்கப்படுமாதலின் அதைத் துய்ப்புச் செலவாக எடுக்கக் கூடாது.

[2] தன் இரண்டு வரிசைகளிலும் (arrays)—மேலிருந்து கீழ், இடமிருந்து வலம்—உள்ள பண்புகளின் தனித்த பிரிவுகளிலுள்ள எண்ணிக்கைகளைத் தரும் பொதுவான அட்டவணைக்கு இணைப்புப் பட்டியல் என்போம்.

மண நிலையும் சேமிப்புப் பழக்கங்களும் தொடர்பற்றனவாகவும் உள்ள நிலையில் நான்கு அறைகளில் தோன்றக்கூடிய அலை வெண்களை அட்டவணையின் நான்கு துணை மொத்தங்களிலிருந்து (subtotals) கணக்கிட்டுவிடலாம் — 3,327 செலவிடுவோர்களில் 880 அல்லது 26·45 சதவீதம் தனியாட்களாகவும், 2,447 அல்லது 73·55 சதவீதம் மணமானவர்களாகவும் உள்ளனர். இப்பொழுது மண நிலைக்கும் சேமிப்புப் பழக்கத்திற்கும் தொடர்பில்லை என்று கருதினோம். ஆதலால், 2,042 நிஜமாக சேமிப்போர்களிலும் தனியாள், மணமானவர் விகிதம் இதேபோன்று (26·45-க்கு 73·55 ஆக) அமையவேண்டுமல்லவா; அதுபோலவே சேமிப்பற்றவர்கள், (ஒன்றும் சேமிப்பில்லாதாரும், கடன்பட்டாரும்) 1,285 பேரும் இதே விகிதத்தில் தனியாட்கள்? மணமானவர்கள் என்று பிரிக்கப்படுவர். இதுபோல் பிரிக்க 15-2ஆம் அட்டவணையிலுள்ள எதிர்பார்க்கக் கூடிய அலைவெண்கள் வரும்.

அட்டவணை 15-2

எதிர்பார்க்கக்கூடிய அலைவெண்கள்
3,327 செலவு செய்வோரின் இருவழிப் பாகுபாடு; இரண்டு பண்புகளும் சார்பற்றவை என்ற எடுகோளுக்கிணங்க

செலவு செய்வோர்	நிஜமாக சேமிப்பவர்கள்	ஒன்றும் சேமிக்காதவர் + கடன்படுவோர்	மொத்தம்
தனியாட்கள் ...	540.1	339.9	880
மணமானவர்கள் ...	1,501.9	945.1	2,447
மொத்தம் ...	2,042.0	1,285	3,327

முழுமைத் தொகுதியில் மண நிலை, சேமிப்புப் பழக்கங்கள் இரண்டும் சார்பற்றவைகளானல் (தொடர்பில்லாதவை) நிகழக் கூடிய அலைவெண்களை மேற்காணும் அட்டவணை பிரதிபலிக்கிறது. இவ் விகிதங்கள் முழுமைத் தொகுதியைச் சார்ந்தவைகளாதலின், மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்களால் இவைகள் பாதிக்கப்படுவதில்லை. 15-1 அட்டவணையிலுள்ள அறை-அலைவெண்களும், 15-2 அட்டவணையிலுள்ள அறை-அலைவெண்களும், ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமாக உள்ளதைப் பார்க்கலாம். இந்த வித்தியாசமாவது இருவகைகளில் ஏற்பட்டிருக்கலாம். ஒன்று: தொகுதியில் கணக்கிடாமல், ஒரு மாதிரியில் கணக்கிடுவதாலேயே ஏற்படக்கூடிய ஏற்றத்தாழ்வுகளால்—இவைகளை மாதிரிஏற்றவிறக்கங்கள் என்போம்; மற்றொன்று: மண நிலைக்கும் சேமிப்பிற்கும் தொடர்பிருக்கலாம்— அதாவது, நாம் கருதிய எடுகோள் தப்பாக இருக்கலாம். நம்முன்

உள்ள பிரச்சினை என்னவெனின்—காணப்படும் வித்தியாசத்தை மாதிரியினால் ஏற்படக்கூடிய ஏற்றவிறக்கம் என்று கூறுவதா; அல்லது மாதிரி ஏற்ற விறக்கங்களால் ஏற்படக்கூடிய வித்தியாசத்திற்கும் அதிகமாகவுள்ளன என்பதா, என்பதே. இரண்டாம் நிலையாக விருப்பின், நம் எடுகோளைத் தப்பானது என்று புறக்கணித்துவிடுவோம். ஆக, நாம் இப்பொழுது மாதிரிக்கான ஏற்ற விறக்கத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும்.

χ^2 : கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும் ஊகக்கோட்பாடான அலைவெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தின் ஓர் அளவை (Measure)

15-1, 15-2 அட்டவணைகளிலுள்ள அலைவெண்களின் வித்தியாசத் தொகையின் மொத்தத்தைப் பல வகைகளில் கணக்கிடலாம். இங்கு நாம் பயன்படுத்தும் முறை கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) என்பவரால் முதலில் துவக்கப்பட்ட கை-வர்க்கம் (Chi-Square). இதனை χ^2 என்ற குறியினால் சுட்டிக்காட்டுவோம். கண்டறிந்த அலைவெண்களை f_0 என்ற குறியினாலும், எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களை f என்ற குறியினாலும் காட்டினால் χ^2 மதிப்பு கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தின்படியாகும் :

$$\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(f_0-f)^2}{f}\right\} \qquad (15.1)$$

அதாவது, ஒவ்வோர் அறையிலும் கண்டறிந்த அலைவெண்ணிற்கும், எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணிற்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை வர்க்கமாக்கி (squaring) அதனை எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணால் வகுக்கிறோம். அதுபோலவே மற்ற எல்லா அறைகளிலுள்ள அலைவெண்களுக்கும் செய்துவரும் தொகைகளைக் கூட்டுவோம். அப்படிக் கிடைக்கும் மொத்தம்தான் χ^2 என்று அழைக்கப்படுகிறது. மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டில் (15-1), (15-2) அட்டவணைகளிலுள்ள அலைவெண்களைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டால் :

$$\chi^2 = \frac{(490-540.1)^2}{540.1} + \frac{(390-339.9)^2}{339.9} + \frac{(1552-1501.9)^2}{1501.9} + \frac{(895-945.1)^2}{945.1}$$

$$= 4.6473 + 7.3846 + 1.6712 + 2.6558$$

$$= 16.3589$$ என்ற விடை வரும்.

இரண்டு வகை அலைவெண்களும் ஒரேமாதிரியாக அமையும் பொழுது χ^2-ன் மதிப்பு சுழியாக (zero) இருக்கும் என்பது எளிதில் கண்டுகொள்ளக்கூடியது. இரண்டு அலைவெண்களுக்கும் மாறுபாடு

அதிகமாக அதிகமாக கை-வர்க்கத்தின் (χ^2) மதிப்பும் அதிகரிக்கும். அதனுடைய உச்சவரம்பு எல்லையற்றதாகும் (infinity). இப்பொழுது நாம் கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பைப்பற்றிச் சோதனை செய்ய (அதனை χ_0^2 என்று குறிப்போம்) அது வாய்ப்பு விதிகளினால் (chances) ஏற்பட்டிருக்குமா, அல்லது அவ்வாறு ஏற்படக்கூடாத வகையில் அதிகமாக உள்ளதா என்பதனை முடிவு செய்யவேண்டும். இந்த முடிவைக் காண வாய்ப்பு விதிகளே காரணமாக இருக்கும் போது கை-வர்க்கத்தின் பரவலைப்பற்றி நாம் அறிந்துகொள்ள வேண்டும். இந்தத் தகவலை வைத்துக்கொண்டுதான், கண்டுபிடித்த χ^2-ன் மதிப்பை ஆராயமுடியும்.

குறிப்புமுறை : இந்த அதிகாரத்தில் கீழ்க்கண்ட அடையாளக் குறிகளைப் பயன்படுத்துவோம்:

χ^2 : கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும் எதிர்பார்க்கக் கூடிய அலைவெண்களுக்குமுள்ள முரண்பாட்டின் (discrepancy) மொத்தம் ; பொதுவாக, n தனித் தனியான நார்மல் மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை; இந்த மாறிகளுக்கெல்லாம் கூட்டுச் சராசரி சுழியாகவும் தரவிலக்கம் ஒன்றாக வும் (unity) இருக்கும்.

χ_0^2 : ஒரு குறித்த உதாரணத்தில் காணும் கை-வர்க்கம் (χ^2).

χ_y^2 : யேட்ஸ் என்பவரின் (Yates) திருத்தம் அமைத்த பிறகு கிடைக்கும் கை-வர்க்கம்.

$\chi^2_{.01}$, $\chi^2_{.99}$ முதலானவை : கை–வர்க்கப் பரவலின் நூற்று மானங்கள் (percentiles)

f_0, f'_0 : கண்டறிந்த அலைவெண்கள்.

f, f' : ஊகக் கோட்பாடான அல்லது எதிர்பார்க்கக் கூடிய அலைவெண்கள்.

n' : குறித்த χ_0^2-ன் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை; f, f_0 என்பவைகள் எவ்வளவு அறைகளில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப்பட்டனவோ அந்த எண்.

k : குறித்த χ_0^2-ஐக் கணக்கிடும்பொழுது பயன் படுத்தப்பட்ட முதலடுக்கு (linear) இறுக்கிகளின் (constraint) எண்ணிக்கை.

$n(=n'-k)$: குறித்த χ_0^2-ஐக் கணக்கிடுங்கால் பயன்படுத்தப் பட்ட வரையற்ற டிகிரிகள் (degrees of freedom).

அனுபவ வழியில் (Empirical) χ^2-ன் பரவலைக் காணுதல்

அட்டவணை 15-1, 15-2-களிலிருந்து நமக்கு கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு 16.3589 என்று கிடைத்துள்ளது. இந்த மதிப்பைச் சோதனை செய்ய நாம் இப்பொழுது அனுபவ வழியில் கை-வர்க்கத்தின் பரவலைத் தோராயமாக மதிப்பிடுவோம். பிறகு கை-வர்க்கப் பரவலைப் பொதுப்படையாக விளக்கி, எடுத்துக்காட்டுகளால் அதன் பயன்களை விவரிப்போம்.

வெல்டன் (Welden) என்பவர் 12 பகடைகளை (தன் ஆறு பக்கங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களைக் கொண்ட ஒரு கட்டை; இதன் ஆறு புறங்களும் ஒரே அளவாக இருக்கும்) 4,096 தடவைகள் உருட்டி வந்த தகவல்களைப்பற்றி முன்பே (190ஆம் பக்கம், பாகம் I பார்க்க) குறிப்பிட்டுள்ளோம். [அப்படி உருட்டும் பொழுது 4, 5, 6 என்ற எண்கள் மேல் வருமாயின் அதனை வெற்றி (success) என்றும், 1, 2, 3 என்ற எண்கள் வருமானால் தோல்வி யென்றும் கொண்டார்.] வெல்டன் பயன்படுத்திய பன்னிரண்டு பகடைகளும் ஒரேமாதிரியானவை என்றும், ஒவ்வொன்றும் அப்பழுக்கற்றது என்றும் கருதினோமானால், வெல்டனின் முடிவுகளிலிருந்து கை-வர்க்கப் பரவலைக் கணக்கிடலாம். இங்கும் கண்டறிந்த விவரங்கள் (அலைவெண்கள்) உள்ளன; பகடைகள் அப்பழுக்கற்றவை என்று எண்ணி எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம்; இங்கு காணப்படும் வித்தியாசத்திற்கு வாய்ப்பு விதிகள்மட்டுமே காரணமாக விருக்கும். ஆக, வாய்ப்பு விதிகள் மட்டுமே நிலையில் கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு எவ்வெவ்வாறு மாறும் என்பதையும் கணக்கிடலாம்.[3]

12 பகடைகளை உருட்டி, 4, 5, 6 வந்தபொழுது வெற்றி யென்று கொண்டால், ஒவ்வோர் உருட்டலிலும் நாம் 'எதிர் பார்க்கக்கூடிய' வெற்றியின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். ஆதலால், 6-லிருந்து மாறுபட்டால் அது கண்டறிந்ததற்கும், ஊகக் கோட்பாட்டுக்கும் உள்ள ஒரு முரண்பாடு ஆகும். ஒவ்வோர் உருட்டலிலிருந்தும், கை-வர்க்கத்தின் ஒரு மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக—ஓர் உருட்டலில் 2 வெற்றியும், 10 தோல்வியும் வந்தன; அப்பொழுது வித்தியாசம் (கண்டறிந்ததற்கும் ஊகக் கோட்பாட்டுக்கும் உள்ளது) 6-லிருந்து 2 அல்லது 4 ஆகிறது. அதுபோலவே தோல்விக்கும் வித்தியாசம் 4தான்—10-லிருந்து 6-க்கு. (வெற்றி, தோல்வி என்ற இரண்டின் மொத்தம் எல்லா உருட்டல்களிலும் 12 தான் என்பது தெளிவு. இது மாதிரி இரண்டே பிரிவுகளுள்ள நிலை

[3] வெல்டனின் பகடைகள் அப்பழுக்கற்றவையாக இல்லாமல், ஒன்றோடொன்று மாறுபட்டிருப்பின், நாம் கணக்கிடும் χ^2 பரவலின் தோராயம் பாதிக்கப்படும். இதனை நாம் அனுபவவழி முடிவுகளை, ஊகக் கோட்பாட்டு முடிவுகளுடன் இணைத்துப் பார்க்கும்பொழுது கணக்கில் வைத்துக்கொள்வோம்.

களில், ஒரு பிரிவின் எண் தெரிந்தால், மற்றதும் தெரிந்தாற்போல் தான்.) இந்த எண்களின் உதவியால் (15.1) சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$$\chi^2 = \frac{(2-6)^2}{6} + \frac{(10-6)^2}{6} = 5.333$$ என்று கணக்கிடுகிறோம்.

அதேபோல 7 வெற்றி 5 தோல்வி வந்தால்,

$$\chi^2 = \frac{(7-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} = .333$$ என்றும்,

6 வெற்றி, 6 தோல்வி கிடைத்தால்,

$$\chi^2 = \frac{(6-6)^2}{6} + \frac{(6-6)^2}{6} = 0$$ என்றும் வரும்.

ஆக, 4,096 உருட்டல்களிலிருந்து நமக்கு 4,096 கை-வர்க்க மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. இவைகளை கை-வர்க்க அளவைப்பொறுத்து ஓர் அலைவெண் பரவலாக அமைத்தால் அட்டவணை 15–3 கிடைக்கிறது.

அட்டவணை 15-3

கண்டறிந்த 4,096, கை-வர்க்க மதிப்புகளின் (n—1) பரவல் (வெல்டனின் விவரங்கள்)

χ^2-ன் மதிப்பு* (கண்டறிந்ததற்கும் எதிர்பார்க்கப்படுவதற்கும் உள்ள வித்தியாசம்; பகடை உருட்டுதலில்)	நிகழ்ந்துள்ள அலைவெண் (மொத்தமானது)	நிகழ்ந்துள்ள அலைவெண் (தொடர்புடையது)
0 — .833	2,526	·6167
·833 — 2.167	966	·2358
2·167 — 4.167	455	·1111
4·167 — 6.667	131	·0320
6.667-க்குமேல்	18	·0044
மொத்தம்	4,096	1.0000

* இந்தப் பட்டியலில் அமைக்கப்பெற்ற 4,096 அளவைகள் ஒரு தனித்த மாறியின் (discrete) தொகுப்பாகும். செய்முறை விவரங்களையொட்டி இந்த 4,096 அளவைகளும் 0-விருந்து 12வரையுள்ள 7 எண்களையே பெற்றிருந்தன. இங்குச் சமமில்லாத பிரிவு இடைவெளி (class interval) வைத்துப் பட்டியல் அமைந்துள்ளது. ஏற்பாடு (பட்டியல் பின்வரும்) உள்ள விவரங்களுடன் இங்குக் கிடைத்துள்ள χ^2-ன் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க உதவுமாறு இப்படி அமைக்கப்பெற்றன. கண்டறிந்த விவரங்கள் பெறும் எண்களினிடையே (சரிபாதியில்) விழுமாறு பிரிவு இடைவெளியின் எல்லைகள் கணக்கிடப்பட்டன. (அட்டவணையில் தந்துள்ள தசம எண்கள் இந்த எல்லைகளைச் சரிவர நிச்சயிப்பதில்லை.) இந்த எடுத்துக்காட்டில் χ^2-ன் மதிப்பு 12-க்குக் கீழ்தான் என்பது இந்த உதாரணத்தின் ஒரு தனிச்சிறப்பு என்பதனை கவனிக்கவேண்டும். 12-க்கும் அதிகமான பகடைகள் உருட்டப்பெற்றிருந்தும்—மற்ற நிலைகள் மாறாது இருந்தால், χ^2-ன் உச்சநிலை மதிப்பு மேலும் அதிகமாகவிருக்கும்; தோராயம் மேலும் சற்று அதிகமாகவே அமையும்.

கண்டறிந்த தகவல்களுக்கும் ஊகக் கோட்பாட்டுத் தகவல்களுக்கும் வாய்ப்பு, நியதிகளை யொட்டி ஏற்படும் மாற்றங்களின் தன்மையை இந்தப் பட்டியல் காட்டும். எதிர்பார்க்கப்படும் 6 வெற்றியை விட வித்தியாசமாக வெற்றிகள் கிடைக்கலாம்; இவைகள் ஏற்படக் காரணங்கள் பற்பலவாகும்; அவை யாவற்றையும் மொத்தமாக—கூட்டாக—வாய்ப்பால் ஏற்படும் மாற்றங்கள் என்று கூறுகிறோம். மாறுபாட்டின் அளவையொட்டிதான் χ^2-ன் மதிப்பும் உள்ளது. χ^2 ஆனது 833-க்கும் குறைவான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும் நிலைகளின் எண்ணிக்கைதான் அதிகம். அலைவெண்கள் குறையும்போது இதனினும் உயர்ந்த மதிப்புகள் கை-வர்க்கத்திற்கு ஏற்படுகிறது. 4,096-ல் 18 தடவைகள்தாம் χ^2 ஆனது 6.667 என்ற மதிப்பிற்கும் மேற்படுகிறது. ஆதலால், இந்தப் பரவலின் உதவியைக்கொண்டு குறித்த ஒரு மாறுபாட்டு அளவு—வாய்ப்பினுல்மட்டும் ஏற்பட்டிருக்கக் கூடுமா, அல்லது அதனுல் ஏற்படக்கூடாதவகையில் அதிகமாக உள்ளதா என்பதனைக் கண்டறியலாம்.

இந்தப் பயனை இந்தப் பட்டியலிலிருந்து பெறுவதற்குப் பட்டியலைச் சற்று மாற்றி அமைத்தல் வேண்டும். 4,096 χ^2 மதிப்புகளைக் குவிவு (cumulate) படுத்தி மற்றொரு பட்டியலை உண்டாக்க, அது (15-4) என்ருகும்.

அட்டவணை 15-4

தொடர்புடைய குவிவு அலைவெண்களைக் கொண்ட 4,096, χ^2-ன் மதிப்புகள்—ஊகக் கோட்டுபாடுடைய குவிவு அலைவெண்களுடன் ($n = 1$)

χ^2-ன் மதிப்புகள் (எதிர்பார்த்ததற்கும் கண்டறிந்ததற்கும் உள்ள வித்தியாசம் குவிவு செய்யப்பட்டது)	தொடர்புடைய நிகழ்ச்சி அலைவெண் (வெல்டனின் விவரம்)	தொடர்புடைய நிகழ்ச்சி அலைவெண் (ஊகக் கோட்பாடுடையது)
0-க்கு மேல்	1.0003	1.0000
.833-க்கு மேல்	.3833	.3613
2.167-க்கு மேல்	.1475	.1411
4.167-க்கு மேல்	.0364	.0412
6.667-க்கு மேல்	.0044	.0098

அட்டவணையின் இரண்டாம் (2-ஆம்) பத்தியிலுள்ள எண்களைக் கவனிப்போம். 4,096 உருட்டல்களைக்கொண்ட ஒரு செய்ம்முறையில் (experiment) χ^2-ன் மதிப்பு 6.667-க்கும் அதிகமாக இருப்பது 100-க்கு 1-க்கும் குறைவான வேளைகளில்தான் என்பது தெரிகிறது. (விரிவாகக் கூறின், 10,000-க்கு 44 தடவைகள்தாம்.) 4.167-க்கும்

அதிகமான மதிப்புடைய X^2-ன் மதிப்பு 100-க்கு 3-க்கும் சற்று மேல். இந்தத் தொடர்புடைய அலைவெண்களை நாம் ஊக அளவைகளாக எண்ணினால், இந்த அட்டவணையிலிருந்தே குறித்த X^2 மதிப்புகளுக்கான ஊக அளவைகளைத் தெரிந்துகொள்ளலாம். எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யவும் கண்டறிந்த விவரங்கள் எதிர்பார்க்கப்படும் விவரங்களுடன் நெருங்கி உள்ளனவா என்பதைக் கவனிக்கவும் உதவும் ஒரு கருவி நமக்கு இப்பொழுது கிடைத்துள்ளது எனலாம்.

தொடர்பற்றநிலைச் சோதனை (A Test of Independence)

செலவு செய்வோரின் குடும்பத் தலைவர்களின் மணநிலை, சேமிப்புப் பழக்கங்களைப்பற்றிய தகவல்களை ஆராய இந்தப் பரவலைப் பயன்படுத்துவோம். 15–2 அட்டவணையிலுள்ள அலைவெண்கள் மணநிலைக்கும் சேமிப்புப் பழக்கத்திற்கும் தொடர்பில்லை என்ற விதிக்கேற்பக் கணக்கிடப்பட்டவை. இவைகளுக்கும் 15–1 அட்டவணையிலுள்ள கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தை, 16.3589 என்ற X^2-ன் மதிப்பு காட்டுகிறது. இவ்வளவு பெரிதான அல்லது இதைக்காட்டிலும் பெரிதான வித்தியாசம் வருவதற்கு ராண்டம் (அல்லது வாய்ப்பு) விதிகளே காரணமாக இருந்திருக்கக்கூடுமா? 15–4ஆம் அட்டவணை (2)ஆம் பத்தியைப் பார்க்க. அதிலிருந்து நாம் அறிவது X^2-ன் மதிப்பு 6.667ஐவிட அதிகமாக 10,000-ல் 44 தடவைகளில்தான் வரும் என்பது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் நமக்குக் கிடைத்துள்ள X^2-ன் மதிப்பு—16.3589—இதைவிட மிகப் பெரிதானது. ஆதலால், இதுபோன்ற மதிப்பு கிடைப்பது—ராண்டம் காரணங்களால் மாத்திரம்—மிக அரிது. ஆதலால், அந்த எடுகோளை நாம் நிராகரித்துவிடவேண்டும். அதாவது, 15–1ஆம் அட்டவணையிலுள்ள இரு பண்பினங்களும் தொடர்பற்றவை என்ற நமது எடுகோள் தள்ளுபடி ஆகிறது. அந்த அட்டவணையிலுள்ள இரண்டு பண்புகளுக்கும்—மணநிலை, சேமிப்பு—தொடர்பிருப்பதனை விவரங்கள் சுட்டிக்காட்டுகின்றன. இரண்டுக்கும் தொடர்பில்லாவிடில், வருவதைவிட தனியாட்கள் நிஜமாக சேமிப்பது சற்றுக் குறைவு; மணமானவர்கள் நிஜமாக சேமிப்பது சற்று அதிகம் என்பது தெளிவாகிறது.

வெல்டனின் விவரங்களிலிருந்து படிப்படியாக அமைக்கப்பெற்று 15–4 அட்டவணையிலுள்ள X^2-ன் பரவலானது அனுபவ வழியில் வந்ததாகும். இதில் பல பிழைகள் கலந்திருக்கக்கூடும்—வெல்டனின் பகடைகள் பிழையுள்ளனவாக இருக்கலாம்; உருட்டிப் போடும் முறையில் முரண்பாடுகள் நிகழ்ந்திருக்கலாம்; எந்த வரம்பற்ற மாதிரியிலும் ஏற்படக்கூடிய வாய்ப்பு ஏற்றவிறக்கங்களிருக்கலாம். ஆதலால், 15–4 அட்டவணையின் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள எண்ணிக்கைகள் தோராயமானவைகளே. ஆனால், அதே அட்டவணை

யின் (3)ஆம் பத்தியில் இடம்பெற்றுள்ள எண்ணிக்கைகள் இவ்விதக் குறைபாடுகள் அற்றவை. ஊகக் கோட்பாட்டுக்கேற்ப இந்தச் செய்ம் முறையில் (1)ஆம் பத்தியிலுள்ள எல்லைகளுக்குட்பட்டு χ^2 மதிப்பு நிகழக்கூடிய தொடர்புடை அலைவெண்களை இதில் காணலம்.[4] 15–1, 15–2ஆம் அட்டவணைகளில் கிடைக்கும் வித்தியாசங்களை — ஊகக் கோட்பாட்டிற்கும் கண்டறிந்தவற்றிற்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை — சோதனை செய்து சிறப்பு முடிவுகளைக் (significance) கூற இந்தப் பத்தியிலுள்ள எண்களைத்தான் பயன் படுத்த வேண்டும். அப்படிப் பயன்படுத்தினாலும், மேலே விவரிக்கப் பட்ட எடுத்துக்காட்டில் காணும் முடிவு, (2)ஆம் பத்தி எண்களி லிருந்து கண்ட முடிவேதான். (வெல்டன் தகவல்களிலிருந்து கிடைக்கும் தோராயங்கள் நிஜ ஊகக் கோட்பாட்டு மதிப்புகளுக்கு மிக நெருக்கமாகவே அமைந்துள்ளன.)

எடுத்துக்காட்டையும் சோதனையையும்பற்றிய விளக்கக் குறிப்புகள்

முதலில் கண்டறிந்த விவரங்களின் சில தன்மைகளைப்பற்றிச் சிறிது குறிப்பிட்டு, பிறகு சோதனைக்கான செய்ம்முறைகளைக் கவனிப்போம்.

1. விவரங்களிலிருந்து கிடைப்பவை மொத்த (absolute) அலை வெண்களே அன்றி, தொடர்புடையன அல்ல.

2. மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமானது; அட்ட வணை 15–2-ல் உள்ள நான்கு அறைகளிலும் பெரிதான, ஊகக் கோட்பாட்டு அலைவெண்களே உள்ளன.

3. மாதிரியில் (Sample) இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும், மற் றெந்த உறுப்புடனும் தொடர்பில்லாதது. ராண்டம் முறைகளைப் பின்பற்றியேதான் நாம் நான்கு அறைகளிலுள்ள அலைவெண்களைப் பெற்றுள்ளோம்.

4. நாம் தேர்ந்தெடுத்துள்ளதும், 3,327 உறுப்புகளைக் கொண்டதுமான மாதிரியின் முழுமைத் தொகுதிபற்றிய எந்தவித

[4] இவைகள் யூல், மற்றும் கெண்டால் (Yule and Kendall, Ref. 199) என்ற நூலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. 15-1ஆம் அட்டவணையிலுள்ள கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்குச் சரியாகப் பொருந்தக்கூடிய உண்மை அலைவெண்களல்ல இவை. நாம் χ^2ஐ கணக்கிடப் பயன்படுத்தும் கண்டறிந்த அலைவெண்கள் எல்லாம் முழு எண்களே (integers); ஆதலால், χ^2 மாறியானது ஒரு தனித்த (discrete) மாறியாகி அதன் பரவலும் தொடர்பிலாப் (discontinuous) பரவலாக அமையும். ஆனால், χ^2 ஆனது பெறக்கூடிய மதிப்புகள் மிக அதிகமாகவிருந்துமாயின், அதன் பரவல் ஓர் இழைந்த (smooth) வளைகோட்டை ஒத்து அமையும். அப்படியாகும்பொழுது தொடர்பிலாப் பரவலிலிருந்து கிடைக்கும் ஊகக் கோட்பாடுடைய தொடர்புடைய அலைவெண்களை, இழைந்த பரவலிலிருந்து கிடைக்கும் அலைவெண்களுக்குத் தோராய மாகக் கொள்ளுதல் பொருந்தும். இந்த முறையைப் பின்பற்றித்தான் 15-4 அட்டவணையில் (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள எண்கள் கணக்கிடப்பட்டன. இதுபோல் தான் பின்வரும் அட்டவணைகளிலும்.

மான ஊகமோ, கோட்பாடோ அமைக்கப்படவில்லை. சிறப்பாக, நாம் முழுமைத் தொகுதி நார்மல் (normal) பரவலையொட்டியுள்ளது என்று கருதவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

5. இந்த எடுத்துக்காட்டிலுள்ள χ^2-ன் மதிப்பு ஒரே ஒரு வரையற்ற டிகிரியை (degree of freedom) கொண்டதாகும். n என்ற அடையாளத்தால் வரையற்ற டிகிரிகளையும், n' என்பதால் χ^2-ஐ கணக்கிட உதவுகின்ற பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையும் (இந்த எடுத்துக்காட்டில் அறைகளின் எண்ணிக்கை), k என்பதால் அலைவெண்கள் மாறுபடுவதற்கான இறுக்கிகளையும் (constraints) குறிப்பிட்டால், $n = n' - k$ என்ற சமன்பாடு வரும். அட்டவணை 15–1-லும். 15–2-லும் உள்ள அறைகள் நான்கு. ஆதலால் $n' = 4$ ஆனால் அலைவெண்கள்—கண்டறிந்தவைகளும் எதிர்பார்க்கப் படுபவைகளும்—மூன்று தனியான இறுக்கி நியதிகளுக்குட்பட்டிருக்க வேண்டும். (1) N என்பது இரண்டிற்கும் பொது. (2) வலப்பக்க முள்ள துணைமொத்தங்கள் (15–1)-ல் இருப்பதைப் போலவே (15–2)-லும் உள்ளன. இரண்டு துணைமொத்தங்களும் தனித் தனியே ஒன்ருக இருந்தாலும் இங்குக் கணக்கிடப்படவேண்டிய இறுக்கி விதி ஒன்றே ஒன்றுதான். ஏனென்ருல், ஒரு துணை மொத்தத்தை இவ்வளவு என்றும், N என்பது இவ்வளவு என்றும் விதித்தால் இரண்டாம் துணைமொத்தம் கணக்கிடப்பட்டுவிடும் (இவ் விரண்டின் வித்தியாசமாக). (3) அதேபோல் கீழ்வரிசையி லுள்ள துணைமொத்தங்களும் ஒன்ருகவே அமையவேண்டும். இங்கும் இந்த ஒருமைப்பாடு ஒரே ஓர் இறுக்கியைத்தான் கொண்டதாகும். ஏனென்ருல் N என்பது முன்பே நிச்சயிக்கப்பட்டு விட்டது.

Nஐயும், இரண்டு வரிசைத் துணைமொத்தங்களையும் தீர்மானித்து விட்டால், f-ம், f_0-ம் வித்தியாசப்படுவதற்கு உள்ள வரையற்ற டிகிரி ஒன்றே ஒன்றுதான்.

$$\text{அதாவது} \quad n = 4 - 3 = 1$$

இதனையே வேருெரு முறையிலும் விளக்கலாம். 15–1, 15–2 அட்டவணைகளிலுள்ள துணைமொத்தங்கள் ஒரே சமனுகத் தீர்மானிக்கப்பட்டன என்போம். அப்பொழுது நாம் நம்முடைய விருப்பத்திற்கேற்ப ஏதாவதோர் அறையின் அலைவெண்ணைக் குறிக் கிருேம் என்போம். இப்பொழுது துணைமொத்தங்களைக் கொண்டு மற்ற மூன்று அறைகளிலும் இருக்கக்கூடிய அலைவெண்களைக் கணக் கிடலாம் என்பது கவனிக்கத்தக்கது. ஆக, நம் விருப்பத்திற்கிணங்க நிரப்பக்கூடிய அலைவெண் ஒன்றுதான்; பிறகு மற்ற மூன்று அறைகளிலுமுள்ள அலைவெண்களைத் துணைமொத்தங்களிலிருந்து கழித்துப் பெற்றுவிடலாம். ஆக வரையற்ற டிகிரி = 1.

15–3ஆம் அட்டவணையிலுள்ள χ^2-ன் மதிப்புகளும் ஒரே ஒரு வரையற்ற டிகிரியைக் கொண்டு கணிக்கப்பட்டவை என்பதைக் கவனிக்கவும். இதன் உதவியைக்கொண்டுதான், கணக்கிடப்பட்ட χ^2-ன் மதிப்பான 16.3589 என்பதனைச் சோதனை செய்தோம். வெல்டனின் விவரங்களிலிருந்து, ஒவ்வொரு χ^2-மதிப்பையும் பெற இரண்டு எண்களை—வெற்றி தோல்வி—பயன்படுத்தினேமானுலும் (204ஆம் பக்கம் பார்க்க) அவைகளில் ஒன்று தெரிந்தால், மற்றென்றின் மதிப்பு (வெற்றி இவ்வளவு என்றால், தோல்வி 12-ல் இதைக் கழித்தால் வரும் என்பது) தானுகவே கணக்கிடப்பட்டு விடுகிறது.

வரையற்ற டிகிரிகளின் மதிப்பையொட்டியே χ^2-ன் பரவல் அமையும் என்பதைப் பின்வரும் பகுதிகளினின்று அறிவோம். சிறப்புப் பொருள் (significance) காண்பதற்குக் குறித்த ஒரு மதிப்பைச் (χ^2-ன்) சோதனை செய்யும்பொழுது, அதே வரையற்ற டிகிரிகள் கொண்டதும், ஊகக் கோட்பாடுடையதுமான χ^2-ன் பரவலைத்தான் பயன்படுத்தவேண்டும்.

$n = 5$ கொண்ட χ^2 பரவல்: கை-வர்க்கச் சோதனையைப் பயன்படுத்துங்கால் முக்கியமாகக் கவனிக்கவேண்டியது, கை-வர்க்கப் பரவல், n-ன் மதிப்பைப்பொறுத்து மாறும் என்பதே. நாம் மேலே $n = 1$ என்ற நிலையில் கை-வர்க்கப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தோம். இப்பொழுது $n = 5$ என்னும் நிலையில் பரவல் எப்படியுள்ளது என்று பார்ப்போம்.

24 பகடைகளை உருட்டுகிறோம் என்று கொள்வோம். ஒவ்வோர் எண்ணும் (அதாவது 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களில் ஒன்று) எவ்வளவு தடவைகள் மேலே வருகிறது என்பதைக் கவனிப்போம். 24 பகடைகளை உருட்டும்பொழுது நாம் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் 1வர, நான்கு அலைவெண்கள்; 2வர, நான்கு; இப்படியே 3, 4, 5, 6வரவும் நான்கு அலைவெண்கள்தான். குறித்த ஓர் உருட்டலில் கீழ்க்கண்டவாறு அலைவெண்கள் அமையலாம்.

	பகடையின் மேலுள்ள எண்					
	1	2	3	4	5	6
கண்டறிந்த அலைவெண்	2	5	6	4	4	3
எதிர்பார்க்கப்பட்ட அலைவெண்	4	4	4	4	4	4

இந்த அலைவெண்களுக்குண்டான கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டால்:

$$\chi^2 = \frac{(2-4)^2}{4} + \frac{(5-4)^2}{4} + \frac{(6-4)^2}{4} + \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(3-4)^2}{4} = 2.50$$

இங்கு χ^2-க்கு 6 தனி உறுப்புகள் (components) உள்ளன வெனினும், ஏதாவது ஐந்து உறுப்புகளின் மதிப்பு நிச்சயிக்கப் பட்டால், ஆருவது உறுப்பின் மதிப்பைப் பெற்றுவிடலாம். ஏனென்ருல், இந்த ஆறு உறுப்பினது மதிப்புகளின் மொத்தம் 24 தான். ஆகையிஞல், இந்தச் செய்ம்முறையில் உள்ள வரையற்ற டிகிரிகள் 5.

இந்த 24 பகடைகளையும் 1,000 தடவைகள் உருட்ட, நமக்கு χ^2-ன் 1,000 தனி மதிப்புகள் கிடைக்கும். இவைகளிலிருந்து முன்போலவே அனுபவ வழியில் χ^2-ன் பரவலைக் கணிக்கலாம். ஆனல், இது முன் பரவலைப் போலல்லாமல் வேறு வகையில் வரும்; ஏனென்ருல் வரையற்ற டிகிரிகள் மாறியுள்ளன; அதையொட்டி χ^2-ன் பரவலும் வேருக அமையும். அந்தப் பரவல் இதுபோன்ற செய்ம்முறையில் எவ்வாறு அமையும் என்பதனை அட்டவணை 15–5-ல் உள்ள குறிப்புகளைக் கொண்டு அறியலாம். முன் செய்ம்முறையைப் போன்று இங்கும் அனுபவ வழியில் கிடைக்கும் மதிப்புகள் தரப்படவில்லை; ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களே அவை.

அட்டவணை 15-5

5 வரையற்ற டிகிரிகளைக் கொண்ட χ^2-ன் மதிப்புப் பட்டியல்*

χ^2-ன் மதிப்புகள்	அவைகள் நிகழக்கூடிய தொடர்புடைய அலைவெண்கள் (ஊகக் கோட்பாடுடையவை)
0 — 0.999	.0374
1 — 1.999	.1135
2 — 2.999	.1491
3 — 3.999	.1506
4 — 4.999	.1335
5 — 5.999	.1097
6 — 6.999	.0856
7 — 7.999	.0644
8 — 8.999	.0471
9 — 9.999	.0339
10 — 10.999	.0238
11 — 11.999	.0166
12-க்கும் மேல்	.0348

* டபிள்யூ. பி. எல்டர்டன் (W. P. Elderton) என்பவரால் தொகுக்கப்பட்டு, பியர்ஸன் (Pearson) என்பவரால், 'டேபிள்ஸ் ஃபார் ஸ்டாடிஸ்டீஷியன்ஸ் அண்டு பயோமெட்ரீஷயன்ஸ்' (Tables for Statisticians and Biometricians) என்ற புத்தகத்தில் வெளியிடப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து.

X^2 பரவல் : சில பொதுத் தன்மைகள்

கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும், குறித்த எடுகோளுக்கிணங்க கணக்கிடப்பட்ட ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைத்தான் நாம் இதுவரை ஓர் அடிப்படை அளவையாகக் கருதி வந்தோம். இதனை $(f_0 - f)$ என்று குறித்து வந்தோம்; இதற்குப் பதில் x என்பதனைப் பயன்படுத்துதல் வசதியாகவிருக்கும். இப்பொழுது வெல்டன் தகவல்களைப் போலவே, மற்றொரு மாதிரி எடுத்தலை எண்ணிப் பார்ப்போம். அதில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் (trial) அறைக்கொன்றாக, இரண்டு f_0 அலைவெண்கள் கிடைக்கும். ஊகக் கோட்பாடுடைய f அலைவெண்களும் தெரிந்திருந்தால், அறைக்கொன்றாக நமக்கு இரண்டு x மதிப்புகள் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் கிடைக்கும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட எடுகோளானது உண்மையானதாக இருப்பின், நமக்குக் கிடைக்கும் f_0 மதிப்புகள் ஊகக் கோட்பாடுடைய f மதிப்புகளையொட்டி நார்மல் பரவல் நிலையில் அமையும்.[5] ஆதலால் x என்பது சுழியைச் சராசரியாகக் கொண்ட நார்மல் பரவல் நிலையில் அமையும். உள்ள இரண்டு அறைகளுக்கும் இதுபோன்ற x இரண்டு கிடைக்கும். ஆனால், இவ்விரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை (ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் நிகழும் வெற்றிகளும் தோல்விகளும் சேர்ந்து N ஆகத்தான் இருக்கவேண்டுமாதலால்). ஆக, இதுபோன்ற இரு பிரிவுகள் உள்ள நிலையில் ஒரே ஒரு நார்மல் பரவலில் அமைந்த மாறி கிடைக்கிறது.

பொதுவாக, ஓர் இணைப்புப் பட்டியலைக் கருதுங்கால், அதில் n' அறைகள் இருக்கும்; ஆதலால், இவைகளுக்குத் தனித்தனியே ஓர் x ராண்டம் மாறி அமையும். இவைகளெல்லாங்கூடத் தொடர்பற்றவைகள் அல்ல—ஏனென்றால், இவைகளுக்குள் பல இறுக்கிகள் (constraints) அமைந்திருக்கின்றன. வரையற்ற டிகிரிகள் n ஆக இருக்கும் என்று வைத்துக்கொண்டால் அப்பொழுது n சார்பற்ற நார்மல் மாறிகள் வரும். சார்பற்ற அல்லது தனித்த n நார்மல் மாறிகளின் மொத்தமும் ஒரு நார்மல் பரவலாகவேதான் அமையும் என்பதனை நிரூபிக்கலாம். ஆனால், இங்கு அதுபோன்ற x மாறிகளை

[5] இங்கு எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் f என்று குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆதலால் N உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து நாம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்தால், அந்தக் குறித்த அறையில் ஓர் உறுப்பு வர ஊக அளவை (probability) $\frac{f}{N}$ என்றுவதைப் பார்க்கிறோம். அப்படி அது அந்த அறைக்குள் வராது என்பதன் ஊக அளவை $\frac{N-f}{N}$ அல்லது $1-\left(\frac{f}{N}\right)$ என்றாகும். ஆனால், இந்த நிலையில்தான் ஈருறுப்புப் பரவல் (binomial distribution) நிகழும். N என்பது பெரிய எண்ணாக இருப்பின் $\frac{f}{N}$ என்பது மிகச் சிறியதாக இல்லாவிட்டால் இந்தப் பரவலானது தோராயமாக நார்மல் பரவலைப் போலவே அமையும்.

நாம் நேராகக் கூட்டி மொத்தம் கண்டுபிடிக்கவில்லையே; அவை களின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்தைத்தான் கண்டுபிடித்துள்ளோம். ஆதலால் இந்த மொத்தத்தினுடைய - சார்பற்ற n—ராண்டம் நார்மல் மாறிகளின் வர்க்கங்களினுடையது—பரவல் நார்மலாக இருக்காது. மற்றொரு தேற்றம் என்னவென்றால்—சார்பற்ற n—நார்மல் மாறிகளினுடைய வர்க்கங்களின் மொத்தமான மாறியானது கை-வர்க்கப் பரவலாகவே அமையும். (நார்மல் மாறிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சராசரி சுழியும் தரவிலக்கமும் ஒன்றுமாகும்.)[6]

$n=1$ என்ற ஒரு தனி நிலையில் கை-வர்க்கத்தின் பரவல் அமையும் தன்மையைப்பற்றிதான் மேலே விவரித்தோம். n-ன் மதிப்பு மாறினால், χ^2-ன் பரவலும் மாறுபாடடையும்—t பரவலைப் போல். எல்லா நிலைகளிலும் பயன்படக்கூடிய ஒரு கருவி வேண்டுமானால், இந்த கை-வர்க்கத்தின் மாதிரிப் பரவலைப்பற்றி நன்கு அறியவேண்டும். இதனைக் கணக்கு முறையில் கண்டுபிடித்துவிடலாம்.[7] இது குறித்த ஒரு χ^2-ன் மதிப்பு நிகழ்தலுக்கு

[6] இதற்கு முன்புள்ள அடிக்குறிப்பைத் தொடர்ந்து இங்குள்ள பகுதியை விளக்கலாம்.

சூத்திரம் (1.5-1)ல் கை-வர்க்கத்திற்கு வகுக்கும் எண்ணுகை உள்ள f ஆனது எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணைக் குறிக்கிறது. இது ஈருறுப்புப் பரவலின் 'வெற்றி'யைக் குறிக்கும் Np-க்குச் சமமாகும்; இதுதான் அப்பரவலின் சராசரியும்—$\frac{f}{N}=p$ ஆனதால், Np என்பது f ஆகிறது. 'தோல்வி'க்குண்டான ஊக அளவை $q(=l-p)$ ஆதலால் அது இங்கு Nq ஆகும். இரண்டு அறைகளைக் கொண்ட ('வெற்றி' 'தோல்வி' என்ற) ஓர் எடுத்துக்காட்டிற்கு நிகழும் இரு கை-வர்க்க மதிப்புகளைக் கூட்ட $\chi^2=\frac{(f_0-Np)^2}{Npq}$ வரும் என்பதை நிரூபிக்கலாம். இங்கு இரண்டு அறைகளுக்கும் வகுக்கும் எண் (பகுதி எண்) Np, Nq என்பதாம். சமன்பாட்டின் வலப்பக்கக் கோவையின் பகுதியில் உள்ளது சுழியைச் சராசரியாகக் கொண்ட ஒரு நார்மல் மாறியின் வர்க்கமாகும். விகுதியானது அதே மாறியின் தரவிலக்கத்தின் வர்க்கமாகும், ($\sqrt{Npq}$ என்பது ஓர் ஈருறுப்பு மாறியின் தரவிலக்கம். இங்கு N என்பது முயற்சிகளின் கூட்டுத்தொகை, p என்பது 'வெற்றி'யின் ஊக அளவை, q என்பது 'தோல்வி'யின் ஊக அளவை என்பன உண்மையே. ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்கள் எல்லாம் பெரிய எண்கள்தாம் என்று கருதினால், ஈருறுப்புப் பரவலானது நார்மல் பரவலுக்குத் தோராயமாகிவிடும். ஆதலால் ஈருறுப்புப் பரவலை நார்மல் பரவல்தான் என்று கொள்வது நடைமுறையாகும்.) எனவே, வலப்பக்கத்திலுள்ள கோவையானது சுழியைச் சராசரியாகவும், ஒன்றை (1) தரவிலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு நார்மல் மாறியின் வர்க்கமாகிறது. N என்பது பெரிய எண்ணுயின், இந்தக் கோவை, 1 வரையற்ற டிகிரியைக் கொண்ட கை-வர்க்கப் பரவலாகத் திகழும்.

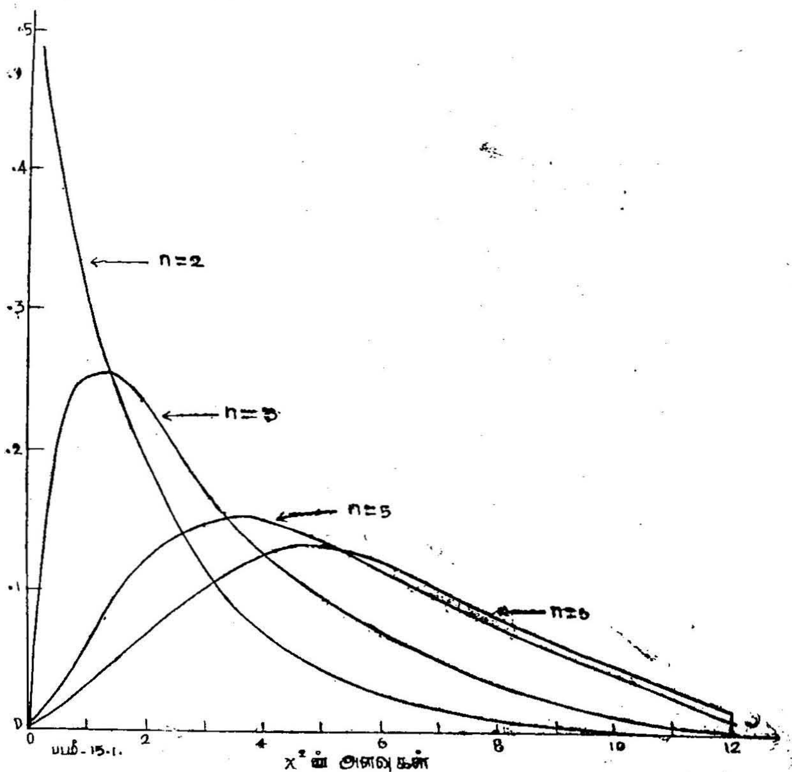
இதைவிடப் பொதுப்படையான நிலைகளுக்கு இதேபோன்ற நிரூபணத்தை (proof) அமைக்க நாம் பல உறுப்புப் பரவலிலிருந்து (multinomial distribution) ஊக அளவைகளைக் கணக்கிட வேண்டியதாகும். இந்த ஊக அளவைகளைக்கொண்டு, பொதுப்படையான கை-வர்க்கப் பரவலின் தன்மை கணக்கிடப்படும்.

[7] இந்த அலைவெண் பரவலை

$$y=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\cdot\frac{1}{2^{n/2}}(\chi^2)^{(n-2)/2}e^{-\chi^2/2}$$

என்று காட்டலாம். இங்கு n என்பது வரையற்ற டிகிரிகளைக் குறிக்கும்.

இருக்கவேண்டிய தொடர்புடை அலைவைக் (relative frequency) குறிக்கும். இவைகளை ஊக அளவைகளாகக் கருதினால், ஆய்வாள ருக்குக் குறித்த ஒரு கை-வர்க்க மதிப்பைச் சோதிக்க இவை உதவும். ஆனால் நிகழக்கூடிய சமன்பாடு மிகவும் சிக்கலானதாகும். இதைவிட எளிதான வேறு முறைகளும் உள்ளன; அவை தொகுக்கப்பட்ட அட்டவணைகளில் உள்ள χ^2 மதிப்புகளை உபயோகிப்பதாகும். இவைகளில் பற்பல வரையற்ற டிகிரிகளுக் கேற்றதாயும், பற்பல ஊக நிலைகளுக்கு (0.95, 0·99 போன்றவை) ஏற்றதாயும் உள்ள கை-வர்க்கத்தின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். χ^2 பரவலைப் பற்றிய ஆராய்ச்சிகளுக்குரிய எல்லா தகவல்களையும் இந்தப் பட்டியல்களே பயனுறக் கூறும்.



$n=2, 3, 5, 6$ என்ற நிலைகளில் χ^2-ன் பரவலைக் காட்டுகிறது.

அவ்விதப் பட்டியல்களைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைக் கவனிப் பதற்கு முன்பு, χ^2 பரவல் வெவ்வேறு n-களுக்கு எவ்வாறு மாறுதல் அடையும் என்பதனைக் காண்போம். கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு சுழியிலிருந்து எல்லையற்ற எண் (infinity) வரையில் உள்ள

எதுவாகவும் இருக்கலாம். ஆனல் வரையற்ற டிகிரிகளின், எண்ணிக்கையைப்பொறுத்து, கை-வர்க்கப் பரவலானது இந்த இரண்டு எல்லைகளுக்கிடையே அதிகமாக வேறுபடுகிறது. 15.1ஆம் படத்தினுல் இந்த மாறுபாட்டின் தன்மை நன்கு விளங்கும். இந்தப் படத்தில் $n=2, 3, 5, 6$ என்ற நான்கு அலைவு வளைகோடுகள் உள்ளன. $n=2$ ஆகும்பொழுது, கை-வர்க்கத்தின் மதிப்புகள் நிலையாக இறங்கும் வகையில் (steadily decreasing) உள்ளது. மற்ற வளைகோடுகளுக்கு மதிப்பு உறுதியான ஓர் உச்சம் (maximum) உள்ளது. அதற்குகந்த χ^2 மதிப்பு $(n-2)$ என்பதையும் பார்க்கலாம். n மதிப்பு ஆனது பெரிதாக ஆக, வளைகோடுகளும் சமச்சீர் நிலையை அடைகின்றன என்பதும் தெரிகிறது. n என்பது எல்லையற்ற எண்ணை நெருங்க, கை-வர்க்கத்தின் பரவலும் நார்மல் பரவலை நெருங்கும் என்பது திண்ணம். இதனைப்பற்றிப் பின்பும் கூறுவோம்.

கை-வர்க்கப் பரவலின் மற்றச் சில தன்மைகளையும் கவனிக்கலாம். n என்பது வரையற்ற டிகிரிகளைக் குறித்தால், கை-வர்க்கப் பரவலின் சராசரியானது அதே எண்ணுகை அமையும். அஃதாவது, $M = n$. சராசரியை யொட்டிய மொமென்டுகள் (moments) கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களின்படியாகும் :

$$\mu_2 = 2n$$
$$\mu_3 = 8n$$
$$\mu_4 = 48n + 12n^2$$

தரவிலக்கம் $\sqrt{2n}$ என்ருகிறது; முகடு (mode) முன்பு குறிப்பிட்டாற்போல் $(n-2)$ வுக்குச் சமம். இந்த அளவைகளைக் கொண்டு பியர்ஸனின் கோட்ட அளவையை (measure of skewness) $\sqrt{2/n}$ என்று கணக்கிடலாம் $(M - M_0)/\sigma$). 15.1ஆம் படத்திலுள்ள இழைந்த (smooth) வளைகோடுகளைப் போன்றவைகளால் குறிக்கப்பெறும் ஊகக்கோட்பாடுடைய பரவல்களுக்குத்தான் மேற்கூறிய அளவைகள் பொருந்தும்.

χ^2 சோதனையைச் செயற்படுத்தலைப்பற்றி
(On the Application of the χ^2 Test)

கை-வர்க்கத்தின் நூற்றுமான அட்டவணையின் பயன் (The Use of Tabulated Percentile Values of χ^2)

சென்ற பக்கங்களிலுள்ள எடுத்துக்காட்டில் χ^2-ன் அளவு மிக அதிகமாக இருந்ததைக் கண்டோம். கை-வர்க்கப் பரவலிலுள்ள மதிப்புடன் இதனைப் பொருத்திப் பார்க்கும்பொழுது இது அதிகமாகவிருந்ததால், நாம் நம்முடைய எடுகோளை ஏற்றுக்

கொள்ள இயலவில்லை. கருதிய எடுகோள் (பண்புகள் தொடர் பற்றவை என்பது) உண்மையாகவிருந்திருப்பின், இவ்வளவு அதிக மான கை-வர்க்க மதிப்பு வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டும் நிகழ்ந்திருக்க முடியாது. ஆனால், பொதுவாக எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும்பொழுது, நாம் முன்கூட்டியே ஒரு திட்ட அளவினை—இந்த அளவிற்கும் அதிகமானால் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படவேண்டும்; குறைந்தால் எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுதல் வேண்டும்—முடிவு செய்தல் வேண்டும். இதற்கு ஒரு சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டத்தை (significance level) தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்; அதற்குப் பொருத்த மான கை-வர்க்கத்தின் தீர்வுக் கட்டமான (critical) மதிப்பொன் றைக் கண்டறிய வேண்டும். மற்ற சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனை களில் அமைந்ததைப்போலவே இங்கும் சாதாரணமாகப் பயன் படுத்தப்படும் மட்டங்கள் 0.01, 0.05 தாம்; சில சமயங்களில் வேறு மட்டங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல் வசதியாகவிருக்கலாமென்றாலும், இந்த மட்டங்கள் நடைமுறையில் கையாண்டு வரப்படுபவை. ஆத லால், சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனைகள் செய்யும்பொழுது நமக்கு χ^2-ன் முழுப் பரவலும் தெரியவேண்டியதில்லை; குறித்த மட்டங்களுக்கு, n-ன் பல மதிப்புகளுக்கு மாத்திரம்தான் χ^2-ன் மதிப்புகள் தேவை. இத் தேவையினை 15–6 ஆம் அட்டவணையிலுள்ள தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட சில தகவல்களும், பின் இணைப்பிலுள்ள VIஆம் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களும் பூர்த்தி செய்யும்.

இந்தப் பட்டியலின் பத்திகளில் பயன்படுத்தியிருக்கும் ஒட்டுக் குறிகள் (subscripts) கை-வர்க்கத்தின் நூற்றுமானங்களைக் குறிப் பவைகள். உதாரணம், $\chi^2_{.01}$ என்ற பத்தியில் $n = 5$ என்ற வரிசையில் நாம் காண்பது 0.554 என்ற எண். 5 வரையற்ற டிகிரிகளுள்ள கை-வர்க்கத்தின் பரவலைக் குறிக்க ஒரு வளைகோட்டை வரைந்து, அதன் கிடைக்கோட்டில் (horizontal) கை-வர்க்கத்தின் மதிப்புகளை அமைப்போம். அப்பொழுது $\chi^2 = .554$ என்ற இடத்தில் ஒரு குத்துக்கோட்டை (ordinate) எழுப்பின், அதன் இடப்பக்கத் திலும் வளைகோட்டின் அடியிலும் உள்ள பரப்பானது அந்த வளை கோட்டின் முழுப் பரப்பின் 1 சதவீதம் ஆகும் என்பதனைத்தான் இந்த எண் குறிக்கிறது. $\chi^2_{.05}$ என்பதன் மதிப்பு, $n = 5$-க்கு 1.145. இதனால் நாம் தெரிந்துகொள்ளுவது என்னவென்றால், $n = 5$-க்குப் பொருத்தமான χ^2 வளைகோட்டில், $\chi^2 = 1{\cdot}145$ என்ற இடத்தில் ஒரு குத்துக்கோடு வரைந்தால், அதன் இடப்பக்கமுள்ள பரப்பின் அளவு மொத்தப் பரப்பின் 5 சதவீதம் என்பதுதான். அதே 5 வரையற்ற டிகிரிகளுக்கு 95 நூற்றுமானம் 11.070 என்பதாம். மொத்தப் பரப்பில் 95 சத பாகம் இந்த (11·070 என்ற) குத்துக்கோட்டின் இடப்பாகத்தில் அமையும்; வலப்பாகத்தில் மிச்ச

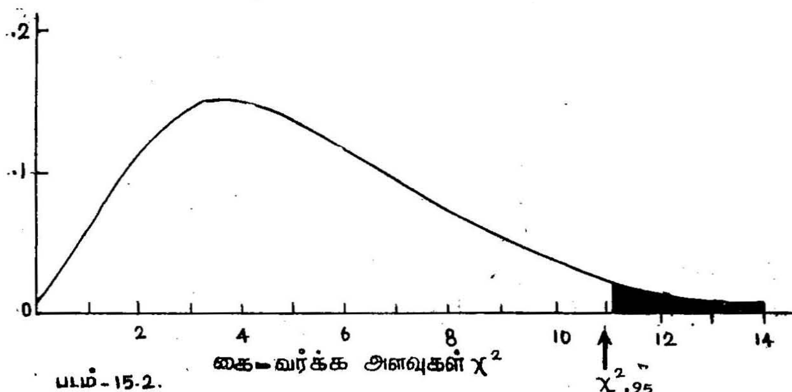
அட்டவணை 15-6

கை-வர்க்க நூற்றுமானங்களில் குறித்த சில மதிப்புகள் *

n	$\chi^2_{.02}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.99}$
1	.000157	.00393	.455	2.706	3.841	6.635
2	.0201	.103	1.386	4.605	5.991	9.210
3	.115	.352	2.366	6.251	7.815	11.341
4	.297	.711	3.357	7.779	9.488	13.277
5	.554	1.145	4.351	9.236	11.070	15.086
6	.872	1.635	5.348	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	6.346	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	7.344	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	8.343	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	9.342	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	10.341	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	11.340	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	12.340	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	13.339	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	14.339	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	15.338	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	16.338	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	17.338	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	18.338	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	19.337	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	20.337	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	21.337	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	22.337	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	23.337	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	24.337	34.382	37.652	44.314
26	12.198	15.379	25.336	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	26.336	36.741	401.13	46.963
28	13.565	16.928	27.336	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	28.336	39.087	42.557	49.588
30	14.953	18.493	29.336	40.256	43.773	50.811

* ஆர். ஏ. ஃபிஷர், மற்றும் எடின்பார்கைச் சேர்ந்த ஆலிவர், மற்றும் பாய்ட் என்ற வெளியீடுவோர்களின் அனுமதியின்பேரில் இங்கு இந்தப் பட்டியல் திரும்பவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 'ஸ்டாட்டிஸ்டிகல் மெதட்ஸ் ஃபார் ரிஸர்ச் வர்க்கர்ஸ்' (Statistical Methods for Research Workers) என்ற நூலின் மூன்றும் அட்டவணையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. இத் தகவல்கள், பத்திகளுக்குக் கை-வர்க்க நூற்றுமானங்களைத் தலைப்பாகத் (heading) தந்துள்ளோம்; இவை ஃபிஷரின் ஊக அளவைத் தலைப்புகளுக்குப் பொருந்தும். மூலத்தின் ஒரு சுருக்கம்தான் (abridgment) இந்தப் பட்டியல்.

-மான 5 சத பாகம் அமையும். இந்த விகித அளவுப் பரப்புகளை நாம் ஊக அளவைகளாகவும் கருதலாம். இப்பொழுது கடைசியாகக் கூறிய கருத்தை ஊக அளவை வாயிலாகக் கூறுவோம் : 5 வரையற்ற டிகிரிகளுள்ள நிலையில், குறித்த இந்த கை-வர்க்கப் பரவலில், அதன் மதிப்பானது 11.070-க்கும்மேல் அமைதலின், ஊக அளவை 100-ல் 5 என்போம். 15.2ஆம் படம் தள்ளுபடி செய்யும் பரப்பைக் (கருப்பாக உள்ளது) காட்டுகிறது. $n = 5$, சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டம் 0.05 என்ற நிலையில் தள்ளுபடி செய்யும் பரப்பிற்கும், மொத்தப் பரப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பையும் இதனின்று அறியலாம்.



படம்-15.2.

$n = 5$ என்ற நிலையில் கை-வர்க்கப் பரவல்; .05 மட்டத்தில் தள்ளுபடி பரப்பையும் காட்டுகிறது.

இப்பொழுது இந்த χ^2 அளவைகளைப் பயன்படுத்துவதைப் பற்றிக் கூறுவோம். நமக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டில் கிடைக்கும் கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு χ^2_0 என்போம். தேர்ந்தெடுத்த சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டம் .99 என்றும் கொள்வோம். இப்பொழுது 15-6ஆம் அட்டவணையிலிருந்து $\chi^2_{.99}$ எவ்வளவு என்பதைக் (nஐ ஒட்டி) காண்போம். χ^2_0 ஆனது $\chi^2_{.99}$ ஐவிடச் சிறியதாயின், கண்டறிந்த விவரங்கள் நம் எடுகோளுக்கு எதிராக அமையவில்லை என்றும், ஆதலால் எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் என்றும் சொல்வோம். χ^2_0 ஆனது, $\chi^2_{.99}$-ஐவிடப் பெரிதாக இருப்பின், எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படும் (நிராகரிக்கப்படும்). ஏனென்றால், எடுகோள் உண்மையாக இருப்பின், வாய்ப்பு விதிகளால் மாத்திரம் χ^2-ன் மதிப்பு χ^2_0 ஆக 100-க்கு 1 முறைதான்—அல்லது அதைவிடக் குறைவானதாக—நிகழும். கீழுள்ள இரண்டில் ஏதாவதொன்றையே நாம் முடிவு செய்யவேண்டும் : எடுகோளை நிரா

கரிப்பது, அல்லது இவ்வளவு சிறிய ஊக அளவை ($\frac{1}{100}$) உள்ள நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்துள்ளது என்று கருதுவது. இவைகளில் நாம் முதலாவதையே மேல் என்று கருதுகிறோம். இதுபோன்று இச் சோதனை பயன்படுத்தப்படின், இதனை ஒருமுனைச் (one-tail) சோதனை என்பர்.

இங்கு உள்ள பிரச்சினை—கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும், ஊகக் கோட்பாட்டு விவரங்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசம்—வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டுமே நிகழக்கூடியதைவிடப் பெரியதா அல்லவா என்பதானதால், நாம் கை-வர்க்கப் பரவலின் மேல் முனைப் பரப்பை மாத்திரம் கருத்தில் கொண்டோம். ஆனால், கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு மிகச் சிறியதாக அமைந்தாலும், அஃதும் ஐயப்பாடுடைய நிலைதான் என்பதனை ஆர். ஏ. ஃபிஷரும் (R. A. Fisher) சுட்டிக் காட்டியுள்ளார். இப்பொழுது χ_0^2 என்பது $\chi^2_{.01}$ ஐவிடக் குறைவாக உள்ளது என்போம். அஃதாவது, எதிர்பார்க்கப்படும் விவரங்களுக்கும் கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும் உள்ள இந்த ஒற்றுமையானது, ஊக அளவில் வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டுமே 100-ல் 1 தடவைதான் நிகழக்கூடும். இதுபோன்ற ஒற்றுமை உண்மையாக வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டுமே நிகழலாம் என்றாலும், அதன் ஊக அளவை வெகு சிறியதாகவுள்ளதால், நாம் மற்ற வழிகளில் இதற்கு விளக்கம் தேடவேண்டும். கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்தே நாம் எடுகோளை நிச்சயித்திருந்தால், அப்பொழுது இம் மாதிரியான ஒற்றுமை நிகழக்கூடும்; அந்த நிலையில் நாம் எடுகோளைச் சோதனை செய்வது தவறானதாகும்.

n என்பது 30-க்கு மேலானால் χ^2 **சோதனை :** 15–6ஆம் அட்டவணையில் $n = 30$ என்ற வரைக்கும்தான் χ^2-ன் மதிப்புகள் உள்ளன. n என்பது 30ஐவிட அதிகமானால் என்ன செய்வது ? இதற்கு ஒரு தோராயம் கிடைக்கிறது. n அதிகமாயின் (30ஐவிட) $\sqrt{2\chi^2}$ என்ற கோவை நார்மல் பரவலையொட்டி அமையும் என்பதே அஃது.[8] n என்பது 30-க்குமேல் இருப்பின், இந்தத் தோராயம் ஏற்கக்கூடியதாகிறது. $\sqrt{2\chi^2}$-ன் பரவலின் சராசரி $= \sqrt{2n-1}$; தரவிலக்கம் $= 1$. ஆதலால், இச் சோதனையைச் செய்தல் எளிது. $\sqrt{2\chi^2}$-க்கும் $\sqrt{2n-1}$-க்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைச் சுழி சராசரியாகவும், 1 தரவிலக்கமாகவும்

[8] n அதிகமானால் χ^2 என்பதே நார்மல் பரவலுக்குத் தோராயமாகும் என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். எனினும் χ^2 என்பதைவிட, $\sqrt{2\chi^2}$ என்பது ஒரு சிறந்த தோராயமாக அமைகிறது என்று ஆர். ஏ. ஃபிஷர் கண்டுபிடித்துள்ளார். ஆதலால், குறித்த ஒரு n மதிப்பிற்கு $\sqrt{2\chi^2}$-ஐப் பயன்படுத்துவது χ^2ஐப் பயன்படுத்துவதைவிடச் சிறப்பான முறையாகும்.

கொண்ட ஒரு நார்மல் மாறியாகக் கொள்ளலாம்; அஃதாவது,

$$T = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \qquad (15.2)$$

உதாரணம் : வரையற்ற டிகிரிகள் 41 என்றும், χ^2-ன் மதிப்பு 72 என்றும் கொள்வோம்; அப்பொழுது,

$$T = \sqrt{2 \times 72} - \sqrt{(2 \times 41) - 1} = 12 - 9$$

$= 3$ என்றுகிறது.

நார்மல் பரவலில் அதன் சராசரியிலிருந்து மூன்று தரவிலக்கத்தை விட அதிகமான மாறுபாடு அமைவதன் ஊக அளவை மிகச் சிறியது ; அப்படியிருப்பின் நாம் எடுகோளை நிராகரிக்கவேண்டும். ஆதலால், இந்த எடுத்துக்காட்டில் எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப் படும் ; எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுக்கும் கண்டறிந்த அலை வெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசமானது வாய்ப்பு விதிகளாலோ ராண்டம் முறைகளாலோமட்டும் ஏற்படக்கூடியவைகளைவிட மிக அதிகமாக உள்ளது.

கை-வர்க்கச் சோதனை பலவகைப்பட்ட பிரச்சினைகளுக்குப் பயன்படும். பகுத்தறிவு முறையில் (rational grounds) ஊகக் கோட்பாட்டு அலைவெண்களைக் கணக்கிடமுடியுமாஞல், அவை களுக்கும், கிடைத்துள்ள அலைவெண்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசங் களின் சிறப்புத் தன்மையைச் (significance) சோதிக்க கை-வர்க்கம் பயன்படும். நடைமுறையில் இச் சோதனை மூன்று நிலைகளில் பயன்படுத்தப்பட்டுவந்துள்ளது. அம் முறைகளில் ஊகக் கோட் பாட்டு விவரங்கள் அறிதலில்தான் வேற்றுமை: (1) பாகுபாட்டிற்குக் கையாளப்பட்ட இரு பண்புகளும் தொடர்பற்றவை என்ற எடு கோளை வைத்த நிலை; (2) ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுப் பல பிரிவுகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் ஒரேபடித்தானவை (homogeneous) என்ற எடுகோள் நிலை ; (3) மாதிரியில் அமைக்கப்பெற்ற அலைவெண் பரவலானது ஒரு குறித்த விழுமிய (ideal) அலைவெண் பரவலைக்கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அமைந்தது என்ற எடுகோள் நிலை. இம் மூன்று நிலைகளிலும் பயன்படும் சோதனைகளை முறையே தொடர்பற்றநிலைச் சோதனைகள் (tests of independence), ஒரு படித்தான நிலைச் சோதனைகள் (tests of homogeneity), இணை சிறப்புநிலைச் சோதனைகள் (tests of goodness of fit) என்று அழைக்கிருர்கள்.

தொடர்பற்றநிலைச் சோதனையொன்றைத்தான் இந்த அதிகாரத் தொடக்கத்தில் தந்த உதாரணம் விளக்கிற்று (அட்டவணைகள் 15-1, 15-2ஐப் பார்க்க). இஃது ஒரு தனிப்பட்ட—இரண்டு பண்பு களிலும் இரு பிரிவுகளே உள்ள—நிலையில் (2×2) அமைந்

துள்ளது. அங்கு நான்கு அறைகளும், ஒரு வரையற்ற டிகிரியுமே இருந்தன. பாகுபாட்டிற்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பிரிவுகள் 2-க்கும் மேலாக இருப்பின், நமக்கு இரண்டைவிட அதிகமான வரிசைகளும் பத்திகளும் வரும்; அறைகளின் எண்ணிக்கையும் நான்கைவிட அதிகமாகும்; எனினும், செய்யும் முறை மாறுது முன் போன்றே அமையும். n என்பதற்கான மதிப்பைத்தான் தனியே கணக்கிடவேண்டும். பொதுவாக, r வரிசைகளும், c பத்திகளும் உள்ள ஓர் இணைப்புப் பட்டியலுக்குச் சோதனையைப் பயன்படுத்துங்கால், n என்பது $(r - 1)$ $(c - 1)$ என்பதற்குச் சமனுகும்.

ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனை

சுரங்கம் தோண்டுதல், கல் வெட்டியெடுத்தல் ஆகிய வேலைகளில் ஈடுபட்டுள்ள 9,036 கார்ப்பரேஷன்களின் 1951ஆம் ஆண்டு வருமானவரி விவரங்களை இன்டர்னல் ரெவின்யூ ஸர்வீஸ் (Internal Revenue Service) என்ற நிறுவனம் திரட்டிச் சுருக்கியுள்ளது. இவைகளில் 4,966 அல்லது சுமார் 55 சதவீதம் கார்ப்பரேஷன்கள் அந்த ஆண்டில் நிகர வருமானம் உண்டு என்று தெரிவித்தன; மற்ற 4,070 கார்ப்பரேஷன்கள் (அஃதாவது, சுமார் 45 சதவீதம்) நிகர வருமானம் இல்லை என்று தெரிவித்தன. பெரிதான இந்தச் சுரங்கம் தோண்டுதல், கல் வெட்டி யெடுத்தல் என்பதனை ஐந்து சிறு பிரிவுகளாகப் பிரித்துள்ளனர்; (1) உலோகச் சுரங்கம், (2) ஆந்த்ரசைட் நிலக்கரிச் (anthracite) சுரங்கம், (3) நிலக்கீலார்ந்த நிலக்கரி (bituminous coal), மற்றும் பழுப்பு நிலக்கரிச் (lignite) சுரங்கம், (4) பண்படாப் பெட்ரோலியமும் இயற்கைவாயுவும் தயாரித்தல், (5) உலோகமல்லாதவைகளின் சுரங்கமும், வெட்டுதலும் ஆகிய இவைகளைப்பற்றிய தகவல்கள் அட்டவணை 15–7-ல் உள்ளன.

இப்பொழுது எழும் பிரச்சினையைக் கவனிப்போம்: 1951ஆம் ஆண்டுக் கணக்கின்படி, 9,036 கார்ப்பரேஷன்களை—நிகர வருமானம் பொறுத்தமட்டில்—அவைகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவை என்று கூறுவது பொருந்துமா? அல்லது கார்ப்பரேஷன்களை மேற்கண்டவாறு ஐந்து பகுதிகளாகப் பிரிப்பதால், வருமானம் இருப்பதோ இல்லாமலிருப்பதோ ஒவ்வொரு பிரிவிலும் மாறுபடுமா என்பதுதான். இதற்கான விவரங்கள் அட்டவணை 15-7-ல் உள்ளன.

மொத்தமாக நோக்கினுல், 54.96 சதவீதக் கார்ப்பரேஷன்கள் 1951ஆம் ஆண்டில் வருமானம் காண்பித்தன. எல்லாக் கார்ப்பரேஷன்களும் ஒருபடித்தானவைகளே என்பதை நாம் எடுகோளாக்குவோம். இதன்படி ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய அலைவெண்களை நாம் கணக்கிட்டுவிடலாம்; அந்தந்தப் பிரிவில் உள்ள

அட்டவணை 15-7

1951 ஆம் ஆண்டில், ஐந்து வகையாகப் பிரிக்கப்பட்ட சுரங்கம் தோண்டுதல், கல் வெட்டியெடுத்தல் வேலைகளில் ஈடுபட்ட கார்ப்பரேஷன்களின் வருமானவரித் தகவல்களின் பாகுபாடு; எவ்வளவு நிறுவனங்கள் நிகர வருமானம் உண்டு என்றன, எவ்வளவு நிகர வருமானம் இல்லை என்றன என்ற தகவல்கள்*

தொழிற் பிரிவு	நிகர வருமானம் உண்டு என்ற கார்ப்பரேஷன்களின் எண்ணிக்கை	நிகர வருமானம் இல்லை என்றவைகளின் எண்ணிக்கை	மொத்தம்
உலோகச் சுரங்கம்	226	667	893
ஆந்திரசைட் நிலக்கரிச் சுரங்கம் ...	114	117	231
நிலக்கிலார்ந்த மற்றும் பழுப்பு நிலக்கரிச் சுரங்கம் ...	912	901	1,813
பண்படாப் பெட்ரோலியமும் இயற்கை வாயுவும் தயாரித்தல்	2,436	1,704	4,140
உலோக மல்லாதவைகளின் சுரங்கம் தோண்டுதலும் கல் வெட்டுதலும் ...	1,278	681	1,959
மொத்தம் ...	4,966	4,070	9,036

* மூலம் : இன்டர்னல் ரெவின்யூ ஸர்விஸ் என்ற அமெரிக்க நாட்டு ட்ரெஷரி டிபார்ட்மென்ட்டின் 1954ஆம் வருடத்திய 'ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் ஆஃப் இன்கம் ஃபார் 1951', பார்ட் 2, கார்ப்பரேஷன் இன்கம்டாக்ஸ் ரிடர்ன்ஸ் (Statistics of Income for 1951, Part 2, Corporation Income Tax Returns) என்ற வெளியீட்டின் முதல்நிலை அறிக்கை. சொற்களின் விளக்கவுரைகளுக்கு இந்த அறிக்கையைப் பார்க்க.

கார்ப்பரேஷன்களில் இதே சதவீதம்தான் வருமானம் காண்பித்துள்ளவைகள் இருக்கும். இதையே வேறொரு வகையிலும் விளக்கலாம். முழுமையாக எல்லாக் கார்ப்பரேஷன்களையும் எடுத்துக் கொண்டால், வருமானமுள்ளதற்குரிய ஊக அளவை ஒவ்வொரு கார்ப்பரேஷனுக்கும் 0.5496 என்றாகிறது. எல்லாம் ஒரேபடித்தானவை என்பது எடுகோளாதலால், ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள கார்ப்பரேஷன்களிலும் இதே ஊக அளவைதான் இருக்கவேண்டும். இந்த ஊக அளவையைக்கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய அலைவெண்களைக் கணக்கிடுவோம். மாறாக, இலாபம் எடுக்காமற் போவதன் ஊக அளவை 0.4504 என்றாகிறது. இஃதும் எல்லாப் பிரிவுகளுக்கும் சமமாகவே அமையும். உலோகச் சுரங்கப் பிரிவிற்கு 'நிகர வருமானம்' உள்ள அலைவெண்கள் 491($= 0.5496 \times 893$); நிகர வருமானம் இல்லாத கார்ப்பரேஷன்கள் 402 ($= 0.4504 \times 893$).

அட்டவணை 15-8-ல் கண்டறிந்த அலைவெண்களும், எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களும் ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் கொடுக்கப்

அட்டவணை 15-8

ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனை

கண்டறிந்த, மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களை ஒப்பிடுதல்; 1951 ஆம் ஆண்டு வருமானம் உண்டா இல்லையா என்பதனையொட்டிப் பாகுபடுத்தப்பட்ட சுரங்கம் தோண்டுதல், கல் வெட்டியெடுத்தல் செய்யும் கார்ப்பரேஷன்கள்.

தொழிற் பிரிவு	நிகர வருமானம் உண்டு என்னும் கார்ப்பரேஷன்கள்			நிகர வருமானம் இல்லை என்னும் கார்ப்பரேஷன்கள்			மொத்தம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	f_0	f	$\frac{(f_0-f)^2}{f}$	f_0'	f'	$\frac{(f_0'-f')^2}{f'}$	
உலோகச் சுரங்கம்	226	491	143.02	667	402	174.69	893
ஆந்திரசைட் நிலக்கரிச் சுரங்கம் ...	114	127	1.33	117	104	1.62	231
நிலக்கீலார்ந்த மற்றும் பழுப்பு நிலக்கரிச் சுரங்கம்	912	996	7.08	901	817	8.64	1,813
பண்படாப் பெட்ரோலியமும் இயற்கை வாயுவும் தயாரித்தல்	2,436	2,275	11.39	1,704	1,865	13.90	4,140
உலோகம் அல்லாதவைகளின் சுரங்கம் தோண்டுதலும் கல் வெட்டுதலும் ...	1,278	1,077	37.51	681	882	45.81	1,959
மொத்தம் ...	4,966	4,966	200.33	4,070	4,070	214.66	9,036

பட்டுள்ளன. மற்றும், கை-வர்க்கத்தைக் கணக்கிடவேண்டிய செய்முறைகளும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

முன்போலவே f_0 என்பவை கண்டறிந்த அலைவெண்களையும், f என்பவை எதிர்பார்க்கப்படும் (அல்லது) ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களையும் குறிக்கும். இதே குறிப்புகளையே' (prime) குறியுடன் இணைத்து வருமானமில்லாத பிரிவுகளுக்கும் பயன் படுத்தியுள்ளோம். இரண்டிலிருந்து வரும் மொத்தங்களின் கூட்டுத் தொகைதான் χ^2.

அஃதாவது, 15-8 அட்டவணையிலிருந்து (4), (7)ஆம் பத்தி களின் மொத்தங்களான 200.33ஐயும், 244.66ஐயும் கூட்ட, நமக்குக் கை-வர்க்க மதிப்புக் கிடைக்கிறது ($\chi^2 = 200.33 + 244.66 = 444.99$). இதுதான் இருவகை அலைவெண்களுக்குள்ள வித்தி யாசத்தின் மொத்த அளவாகும். இதனைப் பெற, (4)ஆம் பத்தியி லுள்ள ஐந்து எண்களையும், (7)ஆம் பத்தியிலுள்ள ஐந்து எண் களையும்—மொத்தமாக 10 எண்களை உபயோகப்படுத்தியுள்ளோம். ஆனால், வரையற்ற டிகிரிகள் நான்கேதான். ஏனென்றால், 10 அறைகளில் ஏதாவது நான்கு அறைகளிலுள்ள எண்ணிக்கை தெரிந்திருக்கும் என்று வைத்துக்கொள்வோம். துணைமொத்தங்கள் (அஃதாவது, வரிசையிலும் பத்தியிலும் உள்ளவை) முன்பே (அட்டவணை 15-7-ன்படி) உள்ளவையாதலால், மற்ற 6 அறை களிலும் இருக்கவேண்டிய அலைவெண்கள் கணக்கிடக்கூடியவை. அஃதாவது, மொத்தம் 6 இறுக்கிகள் உள்ளன.

இந்த இறுக்கிகளைப்பற்றிச் சற்று விளக்கமாகக் கூறுவோம் : (அ) இரு பிரிவுகளின்—வருமானம் உள்ளவை, இல்லாதவை— மொத்தங்களின் கூட்டுத் தொகை 9,036 ஆக அமையவேண்டும். (அஃதாவது, 4,966 + 4,070 = 9,036). (ஆ) (2)ஆம் பத்தியின் மொத்தமும் (3)ஆம் பத்தியின் மொத்தமும் சமமாகவிருக்க வேண்டும்; அஃதாவது, எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களின் மொத்தம், கண்டறிந்த அலைவெண்களின் மொத்தமாகவிருக்க வேண்டும்; அதுபோலவே (5)ஆம் பத்தியின் மொத்தமும் (6)ஆம் பத்தியின் மொத்தமும் சமமாக இருக்கவேண்டும். (இ) ஐந்து தொழிற் பிரிவில் ஏதாவது நான்கில் (2)ஆம் பத்தியிலும் (5)ஆம் பத்தியிலும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையும், (3)ஆம் பத்தியிலும் (6)ஆம் பத்தியிலும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையும் சமமாக விருக்கவேண்டும். அஃதாவது, (அ) பிரிவில் ஒன்றும், (ஆ) பிரிவில் இரண்டும், (இ) பிரிவில் நான்குமாக மொத்தம் 6 இறுக்கிகள் உள்ளன. இப்படி அமைந்தால், ஐந் தாவது பிரிவிலும், (2)ஆம், (5)ஆம் பத்திகளிலுள்ளவற்றின் மொத் தமும், (3)ஆம், (6)ஆம் பத்திகளிலுள்ளவற்றின் மொத்தமும்

சமமாகவே அமையும். ஆகையால், வரையற்ற டிகிரிகளின் மதிப்பு

$$n = n' - k = 10 - 6 = 4 \text{ என்றாகிறது.}$$

சிறப்புகாண் சோதனையை (test of significance) நிகழ்த்துவதற்கு நமக்குக் கிடைத்துள்ள χ^2-ன் மதிப்பு 444.99 என்றும், வரையற்ற டிகிரிகள் $n = 4$ என்றும், சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டம் 0.01 என்றும் கொள்வோம். இந்த மட்டத்தில் $\chi^2_{.99}$ என்பதன் அளவு (அட்டவணை 15-6) 13.277 ஆகிறது. கிடைத்த χ^2-ன் மதிப்பு இதைவிடப் பலபடி பெரியது. ஆதலால், வாய்ப்பு விதிகள் மாத்திரம் இவ்வளவு அதிகமான வித்தியாசத்திற்கு—கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய அலைவெண்களுக்கும் உள்ளது—காரணமாக இருக்கமுடியாது. அஃதாவது, நம் எடுகோளை நிராகரித்துவிடவேண்டும். 1951ஆம் ஆண்டில், வருமான நிலையையொட்டிப் பொதுவாகச் சுரங்கம் வெட்டுதலிலும், கல் எடுத்தலிலும் ஈடுபட்ட எல்லாக் கார்ப்பரேஷன்களுமே ஒரேபடித்தான (homogeneous) முழுமைத் தொகுதியின் பகுதிகளாக இருக்க முடியாது.

இங்கு ஆய்வாளர்கள் முக்கியமாகக் கவனிக்கவேண்டியது ஒன்று உளது. வருமானம் உள்ள கார்ப்பரேஷன்களைமட்டுமே கணக்கில் கொண்டு, வருமானம் இல்லாத கார்ப்பரேஷன்களை விட்டுவிடக்கூடாது என்பதுதான் அது. பொதுவாக நிகழ்ச்சியையும் (occurrence), நிகழ்ச்சியற்ற நிலையையும் (non-occurrence) கவனமாகக் கணக்கிட்டு மொத்தமாக்குதல் மிக அவசியம்.

இணை சிறப்புநிலைச் சோதனை

நார்மல் பரவலையோ அல்லது மற்ற ஏதேனும் பரவலையோ குறித்த ஓர் அலைவெண் பரவலுக்குப் பொருத்திப் பார்க்குங்காலும் நாம் கண்டறிந்ததை (இங்கு அலைவெண் பரவல்) ஊகக் கோட்பாட்டுடன் (இங்கு நார்மல் பரவல்) இணைத்துப் பார்க்கிறோம். இரண்டு பரவல்களுக்குள்ள இசைவை (concordance) நாம் கண்பார்வையாகவும் நோக்கலாம்; ஆனால், அது அவ்வளவு திருப்திகரமானதாக விராது என்பது வெளிப்படை. அவைகளின் இசைவை, χ^2ஐப் பயன்படுத்தித் திட்பமாகச் சோதிக்கலாம். அட்டவணை 15-9-ல் உள்ள விவரங்கள் இதனை விளக்குபவை; 6ஆம் அதிகாரத்தில் கூறப்பட்ட தொலைபேசி வைத்திருப்பவர்களைப்பற்றிய விவரங்கள் இவை.

இதுபோன்ற பிரச்சினையை ஆராயுங்கால் எடுகோளை நாம் திட்டவட்டமாகக் குறிப்பிடுதல் நல்லது. இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் கீழ்க்கண்டவாறு எடுகோளை அமைக்கிறோம்: அட்டவணை

15-9-ன் (2)ஆம் பத்தியில் தரப்பட்டுள்ள எண்ணிக்கைகள், ஒரு நார்மல் பரவலையொத்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியின் அலைவெண்களாகும்; மற்றும், அந்த நார்மல் பரவலின் சராசரி 476.96; தரவிலக்கம் 147·70 என்பவை.

அட்டவணை 15-9

இணைசிறப்புச் சோதனைக்கான கை-வர்க்கத்தைக் கணக்கிடுதல்; தொலைபேசி வைத்திருப்பவர்களுடைய அலைவெண் பரவலுக்கு நார்மல் பரவலை இணைத்துப் பார்த்தல்.

பிரிவு எல்லைகள் (1)	கண்டறிந்த அலைவெண் f_0 (2)	ஊகக் கோட்பாட்டு அலைவெண் f (3)	(f_0-f) (4)	$\frac{(f_0-f)^2}{f}$ (5)
150-க்கும் கீழ்	10	13.48	— 3.48	.90
150–200	19	16.42	+ 2.58	.41
200–250	38	31.57	+ 6.43	1.31
250–300	50	53.02	— 3.02	.17
300–350	95	79.43	+ 15.57	3.05
350–400	85	106.10	— 21.10	4.20
400–450	115	126.41	— 11.41	1.03
450–500	132	134.31	— 2.31	.04
500–550	144	123.75	+ 20.25	3.31
550–600	116	108.26	+ 7.74	.55
600–650	79	81.85	— 2.85	.10
650–700	54	55.21	— 1.21	.03
700–750	31	33.19	— 2.19	.14
750–800	11	17.81	— 6.81	2.60
800-க்கும் மேல்	16	14.19	+ 1.81	.23
	995	995.00	15 பகுதிகள்	$\chi^2=18.07$

இங்கு நமக்கு முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டர்களைக் (parameters) கண்டுபிடிக்க இந்தமாதிரி அலைவெண்களைத் தவிர வேறு அடிப்படையில்லை; ஆதலால், மாதிரியின் சராசரி, தரவிலக்கங்களையே முழுமைத் தொகுதியினவாகக் கருதுகிறோம்.[9]

[9] முன்பு கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில், எடுகோளை அமைத்தவுடன் ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களைக் கண்டுபிடித்துவிட முடிந்தது. இந்த உதாரணத்தில் எடுகோளை முழுமைத் தொகுதி நார்மல் பரவலாக இருக்கும் என்று அமைத்தால்மாத்திரம் அலைவெண்களைக் கணக்கிட முடியாது; அதன் சராசரி, தரவிலக்கம இரண்டையுங்கூடக் குறிப்பிட வேண்டும். ஆக, இங்குக் கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்தே சில அளவுகளை மதிப்பிடவேண்டிய நிலை ஏற்பட்டுள்ளது. சென்ற உதாரணங்களில் இதுபோன்று மதிப்பிட வேண்டியதாக இருக்கவில்லை. (துணைமொத்தங்களையும், முழு மொத்தத்தையும் பயன்படுத்தி

அஃதாவது, இந்த இரண்டு முறைகளில் (சராசரி, தரவிலக்கம் ஒன்றாகக் கொள்ளுதலில்) கண்டறிந்தவைகளுக்கும், ஊகக்கோட்பாடுடையவைகளுக்கும் உடன்பாட்டை அமைக்கிறோம்; மற்றும், Σf என்பது Σf_0 என்பதற்குச் சமம் என்று நாம் கொள்வதால், மொத்தமாக 3 இறுக்கிகள் கண்டறிந்த விவரங்களின்பாற் பொருத்தப்பட்டதாகிறது. இதனையே வேறொரு வகையாகவும் கூறலாம். விழுமிய நார்மல் பரவலைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டிய அளவைகள் (constants) N, m, s என்ற மூன்றும் ஆதலால், இறுக்கிகள் மூன்றாகின்றன. n' என்பது ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப்படும் பிரிவுகளைக் குறிப்பிடுவது—இங்கு அது பதினைந்து; $k = 3$; ஆதலால், வரையற்ற டிகிரிகள்

$$n = n' - k = 15 - 3 = 12$$

என்று தேறும். இச் சோதனைக்கு 0.05 சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் பொருந்தும்.

கை-வர்க்க மதிப்பை $\chi^2 = \Sigma \left\{ \frac{(f_0 - f)^2}{f} \right\}$ என்ற சூத்திரத்தின் வாயிலாகக் கணக்கிடும் முறையை அட்டவணை 15–9-ல் காணலாம். கணக்கிடப்பட்ட கை-வர்க்க மதிப்பு $\chi_0^2 = 18.07$ ஆகும். சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனைக்கு 15-6ஆம் அட்டவணையிலிருந்து (அல்லது பின்னிணைப்புப் பட்டியல் VI). $\chi^2_{.95}$ என்பது, 12 வரையற்ற டிகிரிகளுக்கு 21.0 என்று கிடைக்கிறது. இது χ_0^2ஐவிட அதிகமாகையால், நார்மல் பரவல் இணைப்பை (fit of the normal distribution) ஏற்றுக்கொள்கிறோம். கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும், நார்மல் பரவல் அலைவெண்களுக்கும் உள்ள மொத்த மாறுபாடானது, வாய்ப்பு விதிகளினால் ஏற்படக்கூடிய வித்தியாசத்தைவிட நன்கு குறைந்துள்ளது. ஆதலால், இந்தப் பரவலானது, நார்மல் பரவல் நிலையில் அமைந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி என்ற எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடியதே.

அட்டவணை 15-9-ல் உள்ள ஒரு சிறப்புத் தன்மையை விளக்குதல் வேண்டும் (அட்டவணை 6-3ஐயும் பார்க்க). இந்த அட்டவணையைத் தயாரிக்கும்பொழுது பரவலின் மேற்புறமுள்ள

ஊகக் கோட்பாட்டு அலைவெண்களை அமைத்தலில் பராமீட்டர்களை மதிப்பிட வேண்டியதில்லை.) எனினும் இதே முறையையே கையாண்டு, இந்த நிலையிலும் நாம் χ^2ஐக் கணக்கிடலாம் என்று முடிவு கூறுகிறார்கள் ஆராய்ச்சியாளர்கள்—ஆனால், மதிப்பிடப்படும் ஒவ்வொரு பராமீட்டருக்கும் ஒவ்வொரு வரையற்ற டிகிரியாகக் குறைத்துக்கொண்டுவரவேண்டும். மற்றும், 'உச்சநிலை நிகழ்திறக் கோவை' (maximum liklihood) முறையையொட்டி பராமீட்டர்களை மதிப்பிட வேண்டும். ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்கள், அறைகளில் எவ்வளவு எண்ணிக்கைகளுக்குக் குறைவாக இருத்தல் கூடாது என்ற எச்சரிக்கையையும் கவனிக்க வேண்டும். [ஃபிஷர் (து.நா.ப.47), பேப்பர் 8-ஐயும், க்ரேமேர் (து.நா.ப. 23)ஐயும் பார்க்க.]

ஆறு பிரிவுகளையும் ஒன்ருகச் சேர்த்துள்ளோம் ; அதேபோல் கீழ்ப் பக்கமுள்ள மூன்று பிரிவுகளையும் ஒன்ருகச் சேர்த்துள்ளோம். இது போன்று தொகுப்பதால், பரவலின் இரு முனைகளிலும் இருக்கக் கூடிய சிறுசிறு அலைவெண்களும் மொத்தமாகிப் பெரிதாகும். அப்பொழுது கண்டறிந்தவைகட்கும், எதிர்பார்க்கப்படுபவைகட்கும் உள்ள வித்தியாசம் மட்டுமீறி (unduly) மிகையாக்கப்படாமல் இருக்கும். ஊகக் கோட்பாடுடைய f ஆனது மிகச் சிறியதாக இருப் பின், அதற்கும் f_0-க்கும் உள்ள சிறிய வித்தியாசமும் χ^2-ன் மதிப்பை மிகைப்படுத்திவிடும். [முன்பே பக்கம் 213-ல், நாம் எந்த ஓர் அறையிலும் உள்ள அலைவெண்ணனது $\left(\frac{f}{N}\right)$ மிகச் சிறியதாக இருக்கக்கூடாது என்ற விதியைக் கூறியதைக் கவனிக் கவும்.] நடைமுறையில் எந்த அறையின் ஊகக்கோட்பாட்டு அலை வெண்ணும் 10-க்கும் சிறியதாக இருக்கக்கூடாது என்று கொள்ளுதல் சாலச் சிறந்ததாகும். இந்த விதியையும்—வரை யற்ற டிகிரிகள் மூன்றுக்கும் மேலாகவிருப்பின்—சிறிது தளர்த்த லாம் என்ருலும், எந்த அறையிலும் 5ஐவிடக் குறைவான அலை வெண் எப்பொழுதுமே அமைதல் கூடாது என்பதை வற்புறுத்திக் கூறவேண்டும்.

இந்தச் சோதனைக்கு மற்றுமொரு முக்கியக் குறைபாடு உள்ளது. f-க்கும், f_0-க்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசங்கள் எம்முறையில் அமைந்துள்ளன என்பதனை நாம் χ^2ஐக் கணக்கிடுங்கால் கவனிப்ப தில்லை. வித்தியாசங்களின் அமைப்பைப் பொறுத்தே நம் முடிவை மாற்றிக்கொள்ளவேண்டியும் வரலாம். அட்டவணை 15-9-ல் கீழிருந்து நோக்கினுல் $(f_0 - f)$ என்ற கோவையின் மதிப்பு + ஆகவும், — ஆகவும் மாறிமாறி (successively) அமையலாம். இதுபோன்ற நிலை, வாய்ப்பு விதிகள்மட்டுமே நிகழ்ந்தால் ஏற்படக்கூடும். ஆனுல், வித்தியாசங்கள் வேறு பல முறைகளிலுங் கூட அமையலாம். முகட்டிற்குக் கீழுள்ளவைகள் எல்லாம் + ஆகவும், அதற்கு மேலுள்ளவைகள் — ஆகவும் இருக்கலாம். இந்த இரண்டு நிலைகளிலும் சமமான கை-வர்க்க மதிப்பு நமக்குக் கிடைக்க லாம். எனினும், முதல் நிலையில்—அஃதாவது +, — ஆக மாறிமாறி வரும் நிலையில்—வரும் χ^2ஐப்பற்றிய நம் முடிவு, இரண்டாம் நிலையினதைவிட அதிக நம்பிக்கையுடையதாக இருக்கும் என்பது தெளிவு. இந்தக் குறைபாடு கை-வர்க்கச் சோதனையை நாம் நன்கு ஆராயாமல் யந்திரம்போல் கையாளுவதைத் தடுக்கும். இணைப்பு எப்படி இருக்கிறது என்று ஆராய்தல், வித்தியாசங்கள் எவ்வாறு அமைந்துள்ளன என்ற ஆராய்ச்சி இவைகளையும், χ^2 சோதனையைப் பயன்படுத்துங்கால் நாம் நன்கு கவனிக்கவேண்டும்.

சென்ற எடுத்துக்காட்டில் நாம் முழுமைத் தொகுதியின் இரண்டு பராமீட்டர்களை மதிப்பிட்டோம்; ஆகவே, சோதனைக்கு எடுத்துக்கொள்ளவேண்டி வரையற்ற டிகிரிகளில் இரண்டைக் குறைத்தோம். எடுகோள், பரவலின் தன்மையை முழுவதும் குறிப்பிட்டிருப்பின், கண்டெடுத்த மாதிரியிலிருந்து பராமீட்டர்களை மதிப்பிடவேண்டிய தேவை இருக்காது. அதுபோன்ற நிலைகளில், வரையற்ற டிகிரிகளைக் குறைக்கவேண்டியதில்லை. அப்பொழுது ஒரே ஓர் இறுக்கிதான் ($\Sigma f = \Sigma f_0$ என்ற சமன்பாட்டினால் வருவது) அமையுமாதலின், நமக்கு ஒரே ஒரு டிகிரிதான் குறையுமே அன்றி, மூன்று குறைந்திருக்காது.

தொடர்ச்சிக்கான திருத்தம்—யேட்ஸினுடையது

χ^2 என்பது ஒரு தனித்த (discrete) மாறி என்பதனைக் கவனித்தோம்; இதன் வரைபடம் ஓர் அலைவெண் செவ்வகப் படமாகத்தான் அமையும். ஆனால், நாம் தயாரிக்கப்பட்ட அட்டவணைகளிலிருந்து χ^2-ன் மதிப்புகளை எடுத்துப் பயன்படுத்துகிறோம். இவைகள் ஓர் இழைந்த வளைகோட்டின் அடிப்படையில் தயாரிக்கப்பட்டவை. அஃதாவது, ஓர் ஈருறுப்பு அலைவெண் செவ்வகப் படத்திலிருந்து பரப்புகளைக் கணக்கிடுவதற்குப் பதில் நாம் அதையொட்டி அமைந்த நார்மல் பரவலின் பரப்புகளைக் கையாளுவதுபோல், பெரிய எண்ணிக்கையுள்ள நிலைகளில், இந்த இரண்டுவிதத் தோராயங்களும் மிக நெருங்கியனவாகவும் போதியனவாகவும் இருக்கும். இந்தத் தோராய விதிகளுக்கும், நாம் முன்பே கூறிய χ^2-ன் மிகக் குறைந்த அறை அலைவெண்களுக்கும் தொடர்பு உண்டு. 2×2 என்று அமையும் இணைப்புப் பட்டியலில் இந்தத் தோராயத்தை மட்டும் செம்மையாக்கலாம்; சிறிய அலைவெண்களைக் கொண்டு கணக்கிடுவதனால் வரக்கூடிய ஒருவகைச் சார்பையும் (bias), யேட்ஸ் என்பவரின் திருத்தத்தை அமைப்பதால் குறைக்கலாம் (F. Yates ; Ref. 196).

இந்த நிலையில் ஏற்படக்கூடிய ஒருவகைச் சார்பு கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பை அதிகமாக்கும். இத் திருத்தத்தை அமைப்பதால், கண்டறிந்த மற்றும் ஊகக்கோட்பாடுடைய அலைவெண்களுக்குள்ள வித்தியாசங்கள் குறையும்; ஆகவே, கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பும் குறையும். இந்தத் திருத்தத்தை நடைமுறையில் கீழ்க்கண்டவாறு செய்யலாம் : முதலில் ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்; பிறகு ஒவ்வோர் அறையிலும் உள்ள கண்டறிந்த அலைவெண்ணை (f_0)— மொத்த (absolute) வித்தியாசம் (அந்த அறைக்கும்) $\frac{1}{2}$ குறைவாகும்படி—மாற்றி அமைக்கவும்—ஆனால், துணைமொத்தங்கள் மாறாமல் இருக்குமாறு

இந்தத் திருத்தம் செய்யவேண்டும். இஃது இரு அறைகளிலுள்ள f_0ஐ $\frac{1}{2}$ஆல் அதிகமாக்கும்; மற்ற இரு அறைகளில் $\frac{1}{2}$ஆல் குறைக்கும். இதுபோன்ற திருத்தம் செய்வதால் (எந்த ஓர் அறையிலும்) $(f_0 - f)$ என்றக் கோவையின் மதிப்பு $+$லிருந்து $-$ஆகவோ, அல்லது $-$லிருந்து $+$ ஆகவோ மாறிவிடுமாயின், இத் திருத்தத்தைக் கையாளக்கூடாது. இந்த நிலைகளில், f_0-க்கள் முழு எண்களாகவுள்ளதால் f-களுக்கு எவ்வளவு அருகில் இருக்கலாமோ (மதிப்பில்) அவ்வளவு இருக்கும்; எந்த மட்டத்திலும், கண்டறிந்த விவரங்களின் மொத்தம் சிக்னிஃபிக்கன்ட் ஆக அமையாது.

கீழ்க்காணும் 2×2 இணைப்புப் பட்டியலில் உள்ள விவரங்கள் யேட்ஸ் திருத்தக் கணக்கிடுதலை விளக்கும் :

	கண்டறிந்த அலைவெண்கள் (f_0)		மொத்தம்	ஊகக் கோட்பாட்டு அலைவெண்கள் (f)		மொத்தம்
	12	18	30	18	12	30
	48	22	70	42	28	70
மொத்தம்	60	40	100	60	40	100

ஊகக்கோட்பாட்டு அலைவெண்களை (15–1), (15–2) அட்டவணைகளிலுள்ளதைப்போலவே துணைமொத்தங்களிலிருந்து கணக்கிட்டிருக்கிறோம். இப்பொழுது கை-வர்க்கத்தைக் கணக்கிட்டால், $\chi_0^2 = 7.1$ என்ற விடை வருகிறது. 1 வரையற்ற டிகிரிக்கு $\chi^2_{.99}$ ஆனது 6.635 என்று அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கிறது. ஆதலால், நம் முடிவு 0.01 என்ற மட்டத்தில் சிக்னிஃபிக்கன்டாக அமைகிறது. அஃதாவது, கண்டறிந்துள்ள விவரங்கள், இரு பண்புகளும் தொடர்பற்றவை என்ற எடுகோளை ஒத்ததாக இல்லை. ஆனால், இங்கு எண்ணிக்கைகள் சிறியவாக இருப்பதால், தொடர்ச்சிக்கான திருத்தத்தைக் கையாளுதல் முறையாகும். மேற்கூறிய வழியில் அதனை அமைத்தால், நமக்குக் கிடைக்கக்கூடிய திருந்திய f_0-க்கள் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

12·5	17.5	30
47.5	22.5	70
60	40	100

இவைகளுடன் f-களையும் பொருத்திக் கை-வர்க்கத்தைப் புதிதாகக் கணித்தால், $\chi_y^2 = 6.0$ என்று வரும் (y என்ற ஒட்டுக்குறி

யேட்ஸின் திருத்தம் அமைக்கப்பட்டதைக் காட்டும்). இந்த மதிப்பானது, 1 வரையற்ற டிகிரிக்குள்ள $\chi^2{}_{.99}$ விடக் குறைவாக உள்ளது. 0.01 மட்ட அளவில் கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும், எடுகோளிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதன்று என்று இப்பொழுது முடிவு கூறுவோம். விவரங்கள் பண்புகளின் தொடர் பற்ற தன்மைக்கு முரணானவை அல்ல; χ^2_y என்பதுதான் திருந்திய தோராயமாதலால், நாம் இரண்டாம் முடிவைத்தான் ஏற்றுக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரியின் எண்ணிக்கை சிறியதாக இருந்தால் நிச்சயமாக யேட்ஸின் திருத்தம் அமைக்கப்படவேண்டும்; ஆனால் திருத்தங்கள் அமைக்கும்பொழுதும் முன்பு 227ஆம் பக்கத்தில் விதிக்கப்பட்டுள்ள எல்லைகளை மீறுமாறு அவை அமையலாகாது. N சிறிதாக இருப்பினும், இந்தத் திருத்தங்கள் செய்வதால்மட்டும் அவைகளைச் சிறப்பாகச் செய்யமுடியாது. ஏற்பதற்கோ, நிராகரிப்பதற்கோ உண்டான எல்லையினருகே கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு அமையுமாயின், இத் திருத்தம் பயனுடையதாகும். N, f இரண்டும் பெரிதாகவிருப்பின், இத் திருத்தம் χ^2-ன் மதிப்பில் சிறிதான மாறுதலையே உண்டுபண்ணும்.

சிறப்புகாண் சோதனைகளில் கை-வர்க்கத்தின் பயன்களைப் பற்றிய சுருக்கமான குறிப்புகள்

கை-வர்க்கப் பரவலைப்பற்றிய அறிவு ஆராய்ச்சியாளருக்கு ஒரு தேர்ந்த ஆராய்ச்சிக் கருவியாகும். கண்டறிந்த அலைவெண்களின் ஓர் அடைவை (set), ஊகக் கோட்பாடுடைய அலைவெண்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து, எடுகோள்களைப்பற்றிச் சோதனை செய்ய உதவுகிறது இது. இந்த இரண்டு அலைவெண்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைக் கணக்கிட்டுக் குறித்த சிறப்புகாண் மட்டங்களுக்கு (significance levels) ஒப்பாக, கருதப்பட்ட எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளவேண்டியதா, தள்ளிவிடவேண்டியதா என்பதனை முடிவுகாண கை-வர்க்கம் உதவுகிறது. இது கண்டறிந்த தகவல்களிலிருந்து கணக்கிடப்படுவதால் ஒரு மாதிரி அளவைதான் (statistic) [இதற்கு நேர்முகமான முழுமைத்தொகுதி அளவை (parameter) இல்லை] ஆதலால் கை-வர்க்கச் சோதனை ஒரு பராமீட்டர் அற்ற சோதனையாகும். முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளைப்பற்றி ஒருவிதமான கருத்துகளும் நாம் கொள்வதில்லை என்பது இச் சோதனையின் ஒரு தனிச் சிறப்பாகும்.

இக் கருவியைப் பயன்படுத்துங்கால் கவனிக்கவேண்டிய விதிகளில் சிலவற்றைச் சென்ற பத்திகளில் விளக்கியுள்ளோம்.

இதனைச் சார்ந்த மற்றத் தகவல்களையும் கூட்டிக் கீழே சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.

1. பாகுபாட்டிற்கான பண்புகளின் தொடர்பற்றநிலைச் சோதனை யாகக் கொள்ளும்பொழுது, χ^2 ஆனது அப் பண்புகளிடையே இருக்கக்கூடிய தன்மையையோ, அளவையோ மதிப்பிடக்கூடிய கருவியன்று. அப் பண்புகள் தொடர்பற்றவையா, இல்லையா என்பதனைமட்டும்தான் இச் சோதனையினால் கூறமுடியும்; அவை தொடர்புள்ளவைகளாக இருப்பின், அத் தொடர்பின் வகை எவ்வாறு என்பதனை இதனின்று காணமுடியாது. பண்பு களின் தொடர்புத்தன்மை, தொடர்பின் அளவுகளைக் கணக்கிட மற்ற முறைகள் உள்ளன (இவற்றில் சிலவற்றை 9ஆம் அதிகாரத்தில் படித்தோம்).[10]

2. அலைவெண்கள் மொத்த (absolute) அலைவெண்களாகவே இருக்க வேண்டும்; தொடர்புடையனவாக (relative) இருக்கலாகாது. கூட்டுத்தொகை எண்ணை N-என்பதன் மதிப்புத் தெரிந்திருப்பின், தொடர்புடைய அலைவெண்களிலிருந்து மொத்த அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம். (f-ற்கும், f_0-க்கும் உள்ள வித்தியாசமானது அவைகளின் மொத்த மதிப் பைப்பற்றியதே ஆகும். 3-லிருந்து 4-க்குள்ள வித்தியாசம் குறைவுதான்; ஆனால் 300-லிருந்து 400-க்கு வித்தியாசம் வெகு அதிகம்; எனினும் இந்த நிலையிலும் ஒப்புமை வழியில் வித்தியாசம் முன்போலவேதான் என்பது தெளிவு.)

3. மூலமாதிரியிலுள்ள ஒவ்வோர் அலகும் (பொருள், நபர், உறுப்பு) சார்பிலா அலகாக இருத்தல் வேண்டும்.

4. தனி அறைகளில் உள்ள அலைவெண்கள் சிறியனவாக இருக்க லாகாது; சாதாரணமாக 10-ஐவிடப் பெரிதாக இருத்தல் நலம்: ஆனால் n என்பது இரண்டைவிட அதிகமானால், தனி அறையில் 5 என்ற எண்ணிக்கையுள்ள அலைவெண்ணும் இடம் பெறலாம். f-கள் பெரிதாக இருப்பின், சோதனையின் சரிநுட்பத்திறம் (precision) அதிகரிக்கும்.

5. மாதிரியின் அளவையான N சிறியதாக இருக்கக்கூடாது. யூல் மற்றும் கெண்டால் அவர்கள் இது எக்காரணத்தைக் கொண்டும் 50-க்குக் கீழாகப் போகலாகாது என்கின்றனர்.

[10] அளவின விவரங்களல்லாத பாகுபாடுகளை உடைய தகவல்கள் இருக்கும் பொழுது, அப் பண்புகளினிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை 'இணைப்புக் கெழு' (coefficient of contingency) என்பது கணக்கிட்டுக் கூறும்; இதற்கு யூல் மற்றும் கெண்டால் (Yule and Kendall) புத்தகத்தைப் பார்க்க (து.நா.ப. 199).

6. χ^2 சோதனையைப் பயன்படுத்துங்கால் n என்ற வரையற்ற டிகிரிகளை $n = n' - k$ என்ற சமன்பாட்டினுல் அறியவேண்டும். n' என்பது கை-வர்க்க மதிப்பைக் கணக்கிட எவ்வளவு தனி ஒப்பிடுதல்கள் (comparisons) செய்யப்படுகின்றனவோ அந்த எண்ணைக் குறிக்கும்; k என்பது, தகவல்கள் ஒப்பிடுதலில் விதிக்கப்படும் முதலடுக்கு * இறுக்கிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். கண்டறிந்த மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படுகிற அலை வெண்கள் ஏதாவது முறையில் சமமாக பாவிக்கப்படும்போது ஏற்படுவதுதான் இறுக்கி. ஆக, χ_3^2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடும் பொழுது $\Sigma f = \Sigma f_0$ என்று விதித்தால் அது ஓர் இறுக்கி யாகிறது. ஓர் இறுக்கியினின்று மற்ருேர் இறுக்கியை விளைவு படுத்த முடியாமல்போனுல் அவைகள் சார்பற்றவை என்போம்; இறுக்கியை விளக்கும் சமன்பாட்டில் f அல்லது f_0 என்பவைகள் முதலடுக்கு (first degree) நிலையிலேயே இருப்பின், அது முதலடுக்கு இறுக்கி எனப்படும்.

χ^2 மதிப்புகளைக் கூட்டுதல் (The addition of χ^2 values): பல மாதிரிகளிலிருந்து தனித்தனியே கை-வர்க்கங்கள் கணக்கிடப் பட்டுள்ளன என்று கொள்ளுவோம். அந்த மாதிரிகள் ஒன்ருே டொன்று தொடர்பற்றவைகளாகவிருப்பின், கை-வர்க்க மதிப்புகளை யெல்லாம் மொத்தமாக்கி ஓர் அதிக எண்ணிக்கையுடைய மாதிரி யாகக் கொண்டு, கை-வர்க்கச் சோதனையைச் செய்து பார்க்கலாம். இது இந்தச் சோதனையின் மற்ருெரு தனிச் சிறப்பாகும். கை-வர்க் கங்களின் கூட்டுத் தொகையை, வரையற்ற டிகிரிகளின் கூட்டுத் தொகையுடன் இணைத்து சோதனை செய்யலாம்.

ஒரு சிறியதான தொழில் மந்தநிலையில் தொழிலாளர்களின் நான்கு தனித்த மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன என்று கொள் வோம். ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் அவர்களைத் தொழிலிலுள்ள வர்கள், இல்லாதவர்கள் என்றும்; நீடித்த பொருள்களைத் (durable goods) தயாரிப்போர், நீடிக்காத பொருள்களைத் (non-durable goods) தயாரிப்போர் என்றும் இரு பண்புகளின்வழிப் பாகுபாடு செய்வோம். இப்பொழுது நமக்குக் கிடைக்கும் பகுதிகள் நான்கு— வேலையிலும் இருந்து நீடித்த பொருள்களைத் தயாரிப்போர் ; வேலையிலும் இருந்து நீடிக்காத பொருள்களைத் தயாரிப்போர்; வேலையில்லாதோர், ஆனுல் சாதாரணமாக நீடித்த பொருள்களைத் தயாரிப்போர் ; சாதாரணமாக நீடிக்காத பொருள்களைத் தயாரிப் பதில் ஈடுபட்டு இப்பொழுது வேலையில்லாதோர்—என்பவை. நீடித்த பொருள்களைத் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலைகளில்தான் வேலை யின்மையும் அதிகம் என்று எண்ணக் காரணங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் இவ்விரண்டு பண்புகளின் தொடர்பற்ற

நிலை எடுகோளைச் சோதனை செய்ய கை-வர்க்கங்களைக் கணக்கிடு கிறோம். அப்பொழுது அடியிற்கண்ட தகவல்கள் கிடைக்கின்றன.

மாதிரி	n	χ^2
1	1	3.75
2	1	3·60
3	1	2.12
4	1	4.20
மொத்தம்	4	13.67

0·05 என்ற மட்டத்தில் 1, 2, 3 மாதிரிகளில் வித்தியாசம் சிக்னி ஃபிக்கன்டாக இல்லை; 4ஆம் மாதிரியில் χ^2-மதிப்பானது 0·05 மட்டத் தில் சிக்னிஃபிக்கன்டாக உள்ளதெனினும் 0.01 மட்டத்தில் இல்லை. இப்பொழுது நாம் எல்லாக் கை-வர்க்கங்களையும் கூட்டி வரும் 13.67 என்பதை, வரையற்ற டிகிரிகளைக் கூட்டி வரும் 4 டிகிரிகளுடன் இணைத்து, 0·05 மட்டத்திலாவது, 0.01 மட்டத்திலாவது சிக்னி ஃபிக்கன்ஸ் பார்க்கலாம். இரண்டு மட்டங்களிலும் வித்தியாசம் சிக்னிஃபிக்கன்டாக உள்ளது. இந்த முறையில் χ^2-மதிப்புகளைக் கூட்டும்பொழுது, மாதிரிகள் சார்பற்றவைகளாக இருத்தல் வேண்டும்; மற்றும் அளவைகள் ஒரே முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவைகளாக வேண்டும்.

கை-வர்க்க மதிப்புகளை மொத்தமாக்கும்பொழுது யேட்ஸின் திருத்தத்தைப் பயன்படுத்தலாகாது. திருத்தாத பிரிவுகளுக்குத் தான் இந்தக் கூட்டு நியதி பொருந்தும்.

துணைநூல் பட்டியல்

Adler, F., 'Yates' Correction and the Statisticians,' 'Journal of the American Statistical Association-', Dec. 1951.

Clark, C. E., An 'Introduction to Statistics', Chap. 8.

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' pp. 233-237, 416-452.

Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis, W. A., 'Selected Techniques of Statistical Analysis,' Chap. 7.

Fisher, Sir Ronald (R. A.) 'Contributions to Mathematical Statistics,' Papers 5, 8.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Statistical Methods for Research Workers,' 11th ed., Chap. 4.

Goulden, C. H., 'Methods of Statistical Analysis,' 2nd ed., Chaps. 15, 16.

Greenwood, E. R. Jr., 'A Detailed Proof of the Chi-Square Test of Goodness of Fit'.

Hoel, P. G., 'Introduction to Mathematical Statistics,'. 2nd ed., Chap. 9.

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics,' Vol. I, Chap. 12.

Lewis, D. and Burke, C. J., 'The Use and Misuse of the Chi-Square Test,' 'The Psychological Bulletin,' Nov. 1949.

Lewis, D. and Burke, C. J., 'Further Discussion of the Use and Misuse of the Chi-Square Test,' 'The Psychological Bulletin,' July 1950.

Mather, K., 'Statistical Analysis in Biology,' 2nd ed., Chap. 11.

Rider, P. R., 'An Introduction to Modern Statistical Methods,' Chap. 6.

Rosander, A. C., 'Elementary Principles of Statistics,' Chap. 28.

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics,' 4th ed., pp. 126-140.

Walker, H. M. and Lev, J., 'Statistical Inference,' Chap. 4.

Yates, F., 'Contingency Tables Involving Small Numbers and the χ^2 Test,' 'Supplement to the Journal of Royal Statistical Society,' 1, 1934.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics' 14th ed., Chap. 20.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும், நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

16. மாறுபாட்டின் ஆய்வு

(Analysis of Variance)

துவக்கநிலைக் கருத்துகள்

இயற்கையில் காணப்பெறும் மாறுபாட்டைப் பகுத்து ஆராய உதவும் முறைகள்தாம் புள்ளியியல் முறைகள் என்று சொல்லி விடலாம். இந்த மாறுபாட்டை ஆராய்வதற்கு ஓர் ஒழுங்கான செய்ம்முறையை ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (R. A. Fisher) என்பவர் வகுத்துள்ளார். அந்த முறைகளை, நாம் பலவகையான பிரச்சினைகளை ஆய்வதற்கும் பயன்தரக்கூடிய வழிகளில் செயல்படுத்தலாம். மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்புகளைப்பற்றிய பல பிரச்சினைகளைச் சென்ற அதிகாரங்களில் படித்தோம். இவைபோன்ற மற்றப் பல வகைப் பிரச்சினைகளையும் பயனுற ஆராய்வதற்கு ஃபிஷர் ஏற்படுத்திய கருவிகள் நன்கு உதவும்.

இரண்டு மாறுபாட்டு அளவுகளை ஒப்பிடுதலே இந்தச் செய்ம் முறையின் மையமான கருத்தாகும். அந்த அளவைகள் தரவிலக்கங்களாகவோ—அல்லது, பெரும்பாலான நிலைகளில், வசதியாக—அவைகளின் வர்க்கமான மாறுபாடுகளாகவோ இருக்கலாம். இந்த இரு மாறுபாட்டு அளவைகளும், ஒரே முழுமைத் தொகுதியினுடைய 'தெரியாத' (unknown) மாறுபாட்டின் இரு தனித்த (independent) மதிப்பீடுகளா என்பதை ஆராய்வதற்காக இவைகளை ஒப்பிடுவோம். பலவகைப்பட்ட பிரச்சினைகளுக்குப் பலதரப்பட்ட முறைகளில் மாறுபாட்டு அளவைகளைப் பின்வரும் பக்கங்களில் கணக்கிடுவோம். ஆனால், இவ்வெல்லா நிலைகளிலுமே முடிவான கேள்வி—முன்பு கூறியது—ஒன்றேதான். இரு மாறுபாட்டு அளவைகளிடையே காணப்படும் வித்தியாசத்தை மாதிரிப் பிழைகளின் எல்லைகளுக்குள்ளாக நிகழக்கூடியதாகக் கொள்ளலாமா? அல்லது இரண்டும் சிக்னிஃபிக்கன்டாக வித்தியாசப்படுகின்றனவா? அவைகளிரண்டிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் குறைவானதாக இருந்து,

வாய்ப்பு விதிகளினுல்மட்டுமே ஏற்பட்டிருக்குமாயின், அவைகளை முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் இரு தனித்த மதிப்பீடுகளாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். அப்படி இல்லாவிடில், இரண்டும் ஒரேவகையான காரணங்களால் ஏற்பட்டவைகளாக இருக்கமுடியாது என்று முடிவு கூறுவோம்.

தரவிலக்கங்களை ஒப்பிடுதல்: ஃபிஷரின் 'z'

இச் சோதனையின் தன்மையை ஓர் எளிதான எடுத்துக்காட்டு விளக்கும். ஒரே நாளில் 66 முன்னுரிமைப் பங்குகளின் (preferred stocks) விலையையும், 66 சாதாரண (ordinary) பங்குகளின் விலையையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம். இதற்குண்டான மதிப்புகள் அட்டவணை 16–1-ல் உள்ளன.

அட்டவணை 16-1

முன்னுரிமைப் பங்குகள், சாதாரணப் பங்குகளின் விலைமாற்றத்தை ஒப்பிடுதல்

	வரையற்ற டிகிரிகள் (n)	சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூட்டுத் தொகை	சராசரி வர்க்க விலக்கம் (மாறுபாடு) s^2	தர விலக்கம் s	தரவிலக்கத்தின் சாதாரண லாகிருதம் $\log_{10}s$	தரவிலக்கத்தின் இயற்கையான (natural) லாகிருதம் $\log_e s$
சாதாராணப் பங்குகள்	65	99,327.28	1,528.112	39.09	1.59207	3.66590
முன்னுரிமைப் பங்குகள் (7 சதவீதம்	65	30,812.20	474.034	21.77	1.33786	3.08056
						வித்தியாசம் = 0.58534

N—1 வரையற்ற டிகிரிகளைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட தரவிலக்கத்தின் மதிப்பு—முன்னுரிமைப் பங்குகளுக்கு 39.09; சாதாரணப் பங்குகளுக்கு 21.77. இந்த இரண்டு தரவிலக்கங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசமானது ராண்டம் ஏற்ற இறக்கங்களினுலேயே ஏற்பட்டிருக்கக்கூடுமா என்பதனை நாம் அறிய வேண்டும். முன் ஒரு பக்கத்தில் (பாகம் I, பக்கம் 282) இரண்டு தரவிலக்கங்களின் வித்தியாசத்தைச் சோதனை செய்ய ஒரு முறையினை விளக்கியுள்ளோம். ஆனுல், அந்த முறை பெரு எண்ணிக்கையுடைய மாதிரிகளுக்கு மாத்திரம்தான் பொருந்தும் என்றும் கூறியுள்ளோம். இப்பொழுது நாம் விளக்கப்போகும் சோதனையானது

மிகவும் திட்பமானது (precise), சிறு எண்ணிக்கைகளைக் கொண்ட மாதிரிகளுக்கும் (பெரிய மாதிரிகளுக்கும் என்று சொல்லவேண்டிய தில்லை) பொருந்தக்கூடிய ஒன்று. முதற்கண் z என்னும் ஒரு கெழுவினைக் கணக்கிடுவோம்; இது இரண்டு தரவிலக்கங்களின் இயற்கை லாகிருதங்களிடையே (natural logarithms) உள்ள வித்தியாசம். அதாவது,

$$z = \log_e s_1 - \log_e s_2 \qquad (16.1)$$

இயற்கை லாகிருதங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம் என்பதைக் கவனிக்கவும். முதலில் சாதாரண லாகிருதங்களை—10-ஐ அடிப்படையாகக் (base) கொண்டவை—கண்டுபிடித்து, அவைகளை 2·3026 என்ற காரணியினால் பெருக்கினால் இயற்கை லாகிருதங்கள்—e-ஐ (2.71828) அடிப்படையாகக் கொண்டவை—கிடைக்கும். 16ஆம் அட்டவணையின் இறுதிப் பத்தியிலிருந்து நமக்கு z-ன் மதிப்பு 0.58534 என்று கிடைக்கிறது.

முன்னுரிமைப் பங்குகளும், சாதாரணப் பங்குகளும், விலை மாறுதலைப் பொறுத்தமட்டில் ஒரே வகையாக இருப்பினும், நாம் எடுத்துள்ள மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாயிருந்தாலும்—மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்கள் மாறுபாட்டின் அளவுகளைப் பாதிக்காமல் இருக்குமானால்—z-ன் மதிப்பு சுழியாக இருக்கும். நமக்குத் தற்பொழுது கிடைத்துள்ள z-ன் மதிப்பு இதிலிருந்து குறிப்பிடும் அளவிற்குச் சிறப்பாக மாறுகிறது என்ற எடுகோள் பொருத்தமானதாக இருக்குமா? மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்கள்மட்டுமே சுழியிலிருந்து 0.58534 என்ற அளவிற்கு வித்தியாசத்தை உண்டாக்கியிருக்கக் கூடுமா? கண்டுபிடித்த z-ன் மதிப்பானது மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்களினால்மட்டுமே ஏற்பட்டிருக்கக் கூடியதைவிட அதிகமாக—சிறப்பாக அதிகமாகவிருந்தால், நம் எடுகோள்—முன்னுரிமைப் பங்குகளும், சாதாரணப் பங்குகளும், விலையைப்பொறுத்தமட்டில் ஒரே வகையாவன என்பது—ஏற்றுக்கொள்ள முடியாததாகின்றது.

z-ன் உண்மையான மதிப்பு சுழி என்ற எடுகோளிற்குப் பொருத்தமாகக் கண்டுபிடித்த z-ன் மதிப்பு உள்ளதா என்பதற்கு முடிவுகாண, z-ன் பரவலைப்பற்றிய தகவல்கள் தேவை; அதேவகையான இலக்கணங்களுக்குட்பட்டு அதே எண்ணிக்கையுடைய பல மாதிரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் பரவல் தேவை. இந்தப் பரவலுக்கு ஆர். ஏ. ஃபிஷர் என்பவர் சூத்திரம் தந்துள்ளார். குறித்த ஒரு நிலையில் அந்தப் பரவலின் தன்மை n_1, n_2 என்ற வரம்பற்ற டிகிரிகளையொட்டி இருக்கும்; இரண்டு தரவிலக்கங்களையும் கணக்கிட உதவும் எண்ணிக்கைகளே இவை. இரண்டு n-களும் பெரிதாகவோ, அல்லது இரண்டும் சுமாராக, பெரிதாகவிருந்து தோராய

மாக சமமாகவோ இருக்கும் நிலைகளில் z-ன் பரவல் நார்மல் பரவலை ஒத்து அமைந்திருக்கும். மேற்கூறிய விதிகள் பொருத்தமாக விருப்பின், z-ன் தரப்பிழையானது n_1, n_2 என்ற இரண்டின் ஒரு சார்பலன் (function) ஆகும். அதற்குச் சூத்திரம்

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (16.2)$$

தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் n_1, n_2 இரண்டும் 65தான்; s_z என்பது தரப்பிழையின் மதிப்பீடு என்றால் அது $\frac{1}{65}$-ன் வர்க்க மூலமாகிறது.

$$s_z = \sqrt{0.01538} = 0.124$$

z-ன் உண்மையான மதிப்பு சுழி என்பதல்லவா எடுகோள்; அதை இப்பொழுது கீழ்வருமாறு—0.58534 என்ற மதிப்பு, சுழி சராசரியாக உள்ளதும், தரவிலக்கம் 0.124 ஆக உள்ளதுமான ஒரு நார்மல் பரவலிலிருந்து வரமுடியுமா என்று—கருதலாம். அவ்வகை நார்மல் பரவலின் 99 சதவீத விவரங்கள் +0.319 லிருந்து —0.319-க்குள்ளாகவே அமையும்—அதாவது $0+(2.576 \times 0.124)$ மற்றும் $0-(2.576 \times 0.124)$ கண்டறிந்த மதிப்பான 0·58534 என்பது இந்த எல்லைகளுக்கப்பால் உள்ளதாகும். ஆதலால் இந்த வித்தியாசத்தைச் சுழியிலிருந்து ஏற்பட்ட வாய்ப்பு வித்தியாசமாக எண்ணமுடியாது; இந்த விடை சூனிய எடுகோளுக்கு (null hypothesis) ஒத்ததாக இல்லை. சாதாரணப் பங்குகளின் விலைச் சிதறல்கள் (dispersion), 7 சதவீதம் இலாப ஈவு (dividend) பெறுகிற முன்னுரிமைப் பங்குகளின் விலைச் சிதறல்களைவிட, சிறப்பாக (சிக்னிஃபிக்கென்டாக) மாறுபட்டுள்ளன.

இங்குப் பயன்படுத்திய சோதனை இரு-முனைச் சோதனை (two-tailed test) என்பதைக் கவனித்திருப்பீர்கள்; அதற்காகத்தான் z-பரவலின் இருபக்கங்களிலும் .005-மானங்களைக் (point) கையாண்டோம். இவைகளுக்கப்பால் இருக்கும் வளைகோட்டுப் பரப்புகளின் கூட்டுப் பரப்பு, மொத்தப் பரப்பின் 1 சதவீதமாகும்; எனவே, இரண்டுமுனைப் பரப்புகளும் சேர்ந்து .01 என்ற ஊக அளவையைத் தரும். இதுபோல் இல்லாமல், பிரச்சினை வேறு வகையாக அமைந்திருப்பின், விடையும் வேறாகவே இருக்கும். ‘இப்பொழுது காணும் வித்தியாசத்தைவிட அதிகமான வித்தியாசம் முன்னுரிமைப் பங்குகளின் விலைச் சிதறல்களுக்கும், சாதாரணப் பங்கு விலைச் சிதறல்களுக்கும் இருக்குமா? என்று கேட்டால்’—நாம் ஒரு-முனையாக உள்ள வித்தியாசத்தைப்பற்றிதான் ஆராய்ந்தாற்போல் ஆகிறது. அப்பொழுது பயன்படுத்தவேண்டியது ‘ஒரு-முனைச்

சோதனையே' (பாகம் I, பக்கம் 274). ஆனால், இங்கு நமக்கு வேண்டியது—இரண்டு விலைகளுக்கான தரவிலக்கங்கட்கிடையே மாறுதல் இருக்குமா, இல்லையா என்பதே; ஆதலால் z-ன் மதிப்பு —ஆக விருந்தாலும், +ஆக விருந்தாலும் பொருளுள்ளதாகும். ஆகையினால், இதுபோன்ற நிலைகளில் நாம் இரண்டு பக்கங்களிலும் நேரக்கூடிய வித்தியாசங்களையும் கவனிப்போம்.

இரண்டு n-களும் வெவ்வேறாக இருந்தாலும், ஒன்று சிறிய எண்ணாக இருந்தாலும், z-ன் பரவல் நார்மலாக அமையாது. ஃபிஷர் என்பவர் n-களின் பல மதிப்புகளுக்கு z-ன் பரவல்களைக் கண்டுபிடித்துள்ளார். ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கு நல்ல முறையில் பயனளிக்கக்கூடிய அட்டவணைகள் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன; அவை n_1, n_2-வின் பல மதிப்புகளுக்கும், ஊக அளவையின் பல படிகளுக்கும் (levels) பொருத்தமானவை.[1] அல்லது, z-உடன் நெருங்கிய தொடர்பு கொண்ட F என்பதன் அட்டவணைகளையும் பயன்படுத்தலாம். இவை சற்று எளிதாக அமைந்தவை; ஏனென்றால் F-ஐக் கணக்கிட இயற்கை லாகிருதங்களைக் கணக்கிட வேண்டியதில்லை. n_1, n_2 என்பவை வித்தியாசமாக அமைந்த நிலையில் சோதனைச் செய்ம்முறையைப் பின்பு வரும் இரண்டாம் எடுத்துக்காட்டு நன்கு விளக்கும்.

மாறுபாடுகளின் ஒப்பு; F-அளவை

இரண்டு ஊர்களிலுள்ள தொலைபேசி வைத்திருப்போர்களின் இரண்டு மாதிரிகளை எடுத்துள்ளோம் என்போம்; அவர்களை, வருடத்திற்கு அவர்கள் எவ்வளவு தடவைகள் தொலைபேசியில் பேசினார்கள் என்பதனைக் கொண்டு பாகுபாடு செய்தோமானால், கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் வருகின்றன என்போம்; முதல் ஊரிலிருந்து 31 விவரங்களும், இரண்டாம் ஊரிலிருந்து 121 விவரங்களும் கிடைத்தன.

$$n_1 = 30 \qquad n_2 = 120$$
$$s_1 = 140 \qquad s_2 = 120$$
$$s_1^2 = 19{,}600 \qquad s_2^2 = 14{,}400$$

இப்பொழுது தரவிலக்கங்களைப் பயன்படுத்தாமல் அவைகளின் வர்க்கங்களை—அதாவது மாறுபாடுகளைப் (variances) பயன்படுத்துவோம். ஒரு பொதுவான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பெற்ற இரு தனித்த மாதிரிகள் இவை என்றும், ஆதலால் அம் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடான σ^2-ன் இரு மதிப்பீடு

[1] ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (து.நூ.ப. 50)-ஐயும், ஃபிஷர், மற்றும் யேட்ஸ் (து.நூ.ப. 51)-யும் பார்க்க.

களாக, s_1^2, s_2^2 இருக்கும் என்றும் கருத முடியுமா? F-ஐப் பயன் படுத்துங்கால், இரண்டு மாறுபாடுகளுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைக் கருதாமல், அவைகளின் விகிதத்தைக் கருதுவோம்.[2] அதாவது:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad (16.3)$$

$$= \frac{19{,}600}{14{,}400} = 1.36$$

இரு மாறுபாடுகளும் சமமாகவிருந்தால், F-ன் மதிப்பு ஒன்றுதான். அதாவது, முழுமைத் தொகுதியில் F-ன் உண்மையான மதிப்பு ஒன்று என்ற எடுகோளை நாம் இப்பொழுது சோதிக்கிறோம். கணக்கிட்ட 1.36 என்ற மதிப்பு ஒன்றைவிட வித்தியாசமாக உள்ளதா (வாய்ப்பு விதிகளினால் ஏற்படக்கூடிய மாற்றத்திற்குள்ளேயே உள்ளதா)? அல்லது வாய்ப்பில்லாத மற்றக் காரணங்களும் இருந்திருக்கவேண்டும் என்று கூறுமளவிற்கு வித்தியாச முள்ளதா? இக் கேள்விகளுக்கு விடைகாண, F-ன் பரவல், வாய்ப்பு விதிகளுக்கு மட்டுமே இலக்காகின், எப்படி அமையும் என்பதை ஆராய வேண்டும்.

F-ன் மதிப்பு சுழியிலிருந்து, எல்லையிலா எண்வரை (infinity—எண்ணிலி) எந்த எண்ணுகைவும் இருக்கலாம் என்பது தெளிவு. இந்த இரு எல்லைகளுக்கிடையே F என்பது எப்படிப் பரவலாக அமைந்துள்ளது என்பது n_1, n_2-என்பவைகளின் மதிப்பைப் பொறுத்திருக்கும்; இவைகள்தாம், s_1^2, s_2^2 என்ற மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிட உதவும் வரையற்ற டிகிரிகள். ஆகையால் F-ன் பரவல்கள் பல உண்டு; இவைகள் n_1-ம், n_2-ம் சமமாகவிருந்தால் சமச்சீர் பரவல்களாக அமையும்; சமமாக இல்லாவிடில் கோட்டுப் பரவல்களாக (skew distribution) இருக்கும். மேற்குறித்த எடுத்துக்காட்டில் $n_1 = 30$, $n_2 = 120$ ஆகவிருப்பதால், F பரவல் கோட்டமுடையதாக இருக்கும். x அச்சின் குறித்த புள்ளிகளுக்கான குத்துக் கோடுகளுக்கு இடப்பக்கம் உள்ள பரப்புகளைப் (areas) பின்வரும் சுருக்கமான அட்டவணை தருகிறது.[3]

[2] F, z என்ற இரண்டிற்குமுள்ள தொடர்பை, $F = e^{2z}$ அல்லது $z = \frac{1}{2} \text{Log}_e F$ என்ற சமன்பாடுகள் விளக்கும் என்பதைக் காண்பது எளிது. மாறுபாட்டு ஆய்வில் முதன்முதலில் z-ஐ வைத்துதான் சோதனை செய்து வந்தார்கள். தற்சமயம், பொதுவாக மாறுபாடுகளின் விகிதம்தான் அதிகமாகப் பழக்கத்தில் உள்ளது. ஜி. டப்ளியூ. ஸ்னெடகார் என்பவர் இந்த F எழுத்தைப் பயன்படுத்தவேண்டுமென்று முதலில் துணிந்தார்—ஆர். ஏ. ஃபிஷரின் பெருமையைக் குறிப்பதற்காக.

[3] 'Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (F) Distribution' என்ற நூலிலிருந்து தொகுத்தது. இது 'பயோமெட்ரிகா' 33ஆம் வால்யூம், பக்கம் 73-88ல், மாக்ஸின் மெர்ரிங்டன், காதரீன் எம். தாம்ஸன் என்பவர்களால் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

F	குறித்த F மதிப்புக்கு இடப்பக்கத்திலுள்ள பரப்பின் சதவீதம்
0.4348	0.5
0.4738	1.0
0.5358	2.5
0.5940	5.0
0.6676	10.0
0.8049	25.0
0.9833	50.0
1.1921	75.0
1.4094	90.0
1.5543	95.0
1.6899	97.5
1.8600	99.0
1.9839	99.5

இரண்டிற்கும் வித்தியாசம் சிறப்பாக உள்ளதா என்பது தான் பிரச்சினை; எது பெரிதாக உள்ளது என்பதன்று; ஆதலால், இந் நிலைக்கும் முன்போலவே இருமுனைச் சோதனையே பொருந்தும். சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் மட்டத்தை 0.01 என்று கொண்டோமானல் F-ன் தீர்வுகட்டமான பரப்பு (critical region) 0·4348-லிருந்து 1.9839 வரை இருக்கும். F-ன் உண்மையான மதிப்பு ஒன்ருக இருந்தால், வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டும் அதன் மதிப்பு 0.4348 லிருந்து 1.9839 வரை வித்தியாசப்படும்; இந்த எல்லைகளுக்குப் புறம்பாக அந்த வித்தியாசம் அமைய ஊக அளவை 100-ல் 1 பங்கு. இந்த எடுத்துக்காட்டில் F-ன் மதிப்பு 1.36 என்பது; இது, மேற்கூறிய எல்லைகளுக்கிடையேதான் அமைந்துள்ளது. ஆதலால் இரண்டு மாறுபாடுகளுக்கும் சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை.

இச் சோதனைகளுக்கு மேற்கண்ட பட்டியலிலுள்ள எல்லா விவரங்களுமே தேவைப்படாது. சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தப் படும் ஏற்கக்கூடிய அல்லது மறுக்கக்கூடிய எல்லைகளுக்குமட்டும் F-ன் மதிப்புத் தெரிந்தால் போதும்; ஆனல் n_1, n_2 என்பன வற்றின் பல மதிப்புகளுக்கும் F தேவைப்படும். இதுபோன்ற ஒரு F அட்டவணை, பல n_1, n_2 மதிப்புகளுக்கு, பின் இணைப்பில் அட்டவணை VI-ல் உள்ளது.[4] 95 சதவீதம், 99 சதவீதம் என்ற

[4] ஸ்னெடகார் (Snedecor, து.நூ.ப. 147) என்ற நூலிலிருந்து, அனுமதி பெற்று, இந்தப் பட்டியல் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. F-ன் மற்றும் விரிவான மதிப்புகள். ஃபிஷர் மற்றும் யேட்ஸ் (து.நூ.ப. 51) நூலிலும், மெர்ரிங்டன் மற்றும் தாம்ஸன் என்பவர்களின் கட்டுரையிலும் உள்ளன (அடிக்குறிப்பு 3-ஐப் பார்க்க).

இரு எல்லைகளுக்குண்டான F-ன் மதிப்புகள் $F_{.95}$, $F_{.99}$ என்ற பெயரிடப்பட்டு இந்த அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளின் குத்துக்கோட்டிற்கு இடப்புறம் இருக்கும் பரவல் வளைகோட்டின் பரப்பு, மொத்தப் பரவலின் 95 அல்லது 99 சதவீதமாகும். சாதாரணமாக நடைமுறையில் ஆராய்ச்சி யாளர்களுக்கு இந்தப் பட்டியலே போதுமானதாக அமைந்துவிடும்.[5]

[5] F என்பது χ^2 உடன் தொடர்பு கொண்டதே. இது F-ன் பரவலைப் பற்றிச் சிறிதளவு தெளிவுறுத்தும்.

$$\chi^2 = \frac{\Sigma x^2}{\sigma^2} \qquad (a)$$

என்பதை நாம் அறிவோம். இங்கு x-என்னும் ராண்டம் மாறிக்குச் சராசரி சுழி, தரவிலக்கம் $= \sigma$ (பக்கம் 212-ஐ பார்க்க).

ஆனால் $$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} \quad (n \text{ என்பது } N-1\text{-ஐ குறிக்கும்})$$

$$\Sigma x^2 = ns^2$$

ஆதலால் $$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} \qquad (b)$$

அதாவது ns^2/σ^2 என்ற கோவை கை-வர்க்கப் பரவலில் அமைந்துள்ளது (வரையற்ற டிகிரிகள் $= n$).

(b) இலிருந்து $$s^2 = \frac{\chi^2\sigma^2}{n} \qquad (c)$$

என்பது வருகிறது.

F என்பது s_1^2, s_2^2 இரண்டிற்கும் உள்ள விகிதமாகும் என்பதனையும், அவையிரண்டும், ஒரே நார்மல் முழுமைத் தொகுதியினுடைய மாறுபாட்டின் தனித்த இரண்டு மதிப்பீடுகள் என்பதனையும் நாம் அறிவோம். ஆதலால், இந்த மதிப்பீடுகளில் முதலானதற்கு

$$s_1^2 = \frac{\chi_1^2\sigma^2}{n_1} \qquad (d)$$

என்றும், இரண்டாவதற்கு $$s_2^2 = \frac{\chi_2^2\sigma^2}{n^2} \qquad (e)$$

என்றும் எழுத $$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\chi_1^2\sigma^2}{n_1} \div \frac{\chi_2^2\sigma^2}{n_2}$$

சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்திலுள்ள இரண்டு கோவைகளிலும் வரும் σ^2 என்பது ஒன்றையே குறிக்குமாதலால் (இது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு என்று நாம் கருதியுள்ளோம்)

$$F = \frac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2} \qquad (f)$$

அதாவது, F என்பது இரண்டு தனித்த (independent) அளவுகளின் விகிதம்; அவை இரண்டும் கை-வர்க்கப் பரவலாகவே அமைந்துள்ளன. இரண்டு கை-வர்க்கப் பரவல்களுக்குண்டான n_1, n_2-க்களைப் பெற்று, இந்த விகிதமானது F பரவலாகத் திகழும்.

மாறுபாட்டு ஆய்விற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு : வட்டி வீதங்கள்

ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் (Federal Reserve System) உறுப்பினர்களான பாங்குகளால் வியாபாரக் கடன்களின்மேல் விதிக்கப்பட்ட சராசரி வட்டி வீதங்களைப் பட்டியல் 16-2-ல் காணலாம். இந்தத் தகவல்கள் எல்லாவகையான பாங்குகளால், எல்லாவகையான வியாபாரிகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட சுமார் 100,000 கடன் விவரங்களைக்கொண்டு தொகுக்கப்பட்டவை. இவ் விவரங்கள், 1946ஆம் ஆண்டு நவம்பர் 20ஆம் தேதியன்று நிலுவையாகாது நின்ற (outstanding) கடன்களைப்பற்றிய விசாரணையிலிருந்து எடுத்தவை. விசாரணையில் இடம்பெற்றிருந்த கடன்களுக்கான வட்டிவீதங்களை, பலதரப்பட்ட வியாபாரிகளுக்கும் வெவ்வேறு கடன் தொகைகளுக்கும், இங்குச் சராசரியாக்கியுள்ளோம். வியாபாரத்துறையில் சில பண்புகளையும் அளவுகளையும் கொண்ட ஒரு வியாபாரிகளின் குழுவினரால் பெறப்பட்ட பல கடன்களின் வட்டி வீதங்களின் சராசரிதான், இந்த அட்டவணையில்

அட்டவணை 16-2

ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தைச் சேர்ந்த உறுப்பினர் பாங்குகளால் 100 விதமான வியாபார தொகுப்புகளுக்கு அளிக்கப்பட்ட கடன்களின் சராசரி வட்டி விகிதங்கள் (ஆண்டிற்குச் சதவீத வட்டி).

A	B	C	A	B	C
3.0	5.1	4.0	2.5	5.2	2.7
5.2	4 7	3.2	3.7	4 8	2.2
3.5	2 6	4.9	1.9	4·3	3.0
2.0	3.2	4.5	3.3	1 7	4.0
2.9	3.7	5 4	2.0	2 2	2 8
5.5	3.8	2.2	5.4	2.7	1.5
4.2	5.1	4.1	2.7	3 5	3.9
6.1	4.5	2.8	2.1	5.4	5.4
4.5	3.2	4.4	2.5	1 8	2.4
4.4	2.1	2.9	2.2	1.7	3.7
2.5	4.9	1.8	4.3	1.7	4.6
4.1	3.7	4.6	3.3	3.6	2 9
3.8	4.5	2.2	4.2	1.9	1.9
3.3	4.1	5.1	4.0	4.1	4.2
3.8	4.3	4.2	5.0	3.0	3.8
3.5	3.5	3.7	4.9	3.0	1.9
3.8	3.3	1.6	3.0		

உள்ள விவரங்களின் அலகாகும்.[6] நாம் தேர்ந்தெடுத்த மாதிரியில் (sample), இவ்வகையான வியாபாரிகளின் 100 தொகுப்புகள் இடம் பெற்றுள்ளன.

மாதிரிப்பிழை அளவுகளுக்கிடையே, மேற்கண்ட வட்டி வீதங்கள் நார்மல் பரவலாக அமைந்துள்ளன. இந்த அதிகாரத்தில் வகுத்துக் கூறப்படும் முறைகள் திருத்தமாக அமைவதற்கு முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் நார்மலாக இருப்பது மிக்க அவசியம்.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளை ஒப்பிடுதல் : முதல் எடுத்துக்காட்டு

மேற்கண்ட விவரங்களைக்கொண்டு பல்வேறு முறைகளில் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டைக் கணக்கிட்டு, அவைகள் வித்தியாசப்படுவதைக் காண்பிப்போம். கண்டறிந்த 100 விவரங்களை ராண்டம் முறைகளினால் மூன்று பிரிவுகளாக்கி, அவைகளை முறையே A, B, C என்று அழைப்போம்; A-ல் 34-ம், B, C களில் ஒவ்வொன்றிலும் 33 விவரங்களும் இடம் பெறுகின்றன. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் தனியே கணக்கிட்ட மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் காணலாம் :

பிரிவு	N	சராசரி	பிரிவுச் சராசரியிலிருந்து வரும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
A	34	3.6206	40.6556
B	33	3 5424	41.8206
C	33	3.4091	42.4473
மொத்தம்	100	3.5250	124.9235

இம் மூன்று பிரிவுகளை ராண்டம் முறைகளிலேயேதான் பிரித்துள்ளதால், மூன்று பிரிவுச் சராசரிகளினிடையே உள்ள வித்தியாசங்களும், பிரிவுகளுக்குள்ளே காணப்படுகிற வித்தியாசங்களைப்போல் ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்டவைகளாக இருக்கவேண்டும். ஆதலால், ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்ட

[6] ஒவ்வொரு வியாபாரக் குழுவிற்கும், வட்டி வீதத்தை, அந்தக் கடனில் பாக்கியிருக்கும் கடன் அளவுகளை நிறையாக்கி, சராசரிகளைக் கணக்கிட்டுள்ளோம். பல தொகுதிகளுக்கான வீதங்களை, இந்தச் சோதனையில் சராசரியாக்கும்பொழுது, எவ்வித நிறைகளையும் பயன்படுத்தவில்லை. விசாரணையின் முதல்நிலை விவரங்களை யங்டாஹ்ல் (Youngdahl) என்பவரின் நூலில் (து.நூ.ப. 198) காணலாம்.

வித்தியாசங்களை மதிப்பிட (அதாவது 100 விவரங்களைக்கொண்ட இந்த மாதிரியானது எந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதோ, அந்தத் தொகுதியின் σ அல்லது σ^2-ஐ மதிப்பிட) நமக்குப் பல முறைகள் உள்ளன. A, B, C என்ற மூன்று பிரிவுகளும் தனித்தனியே இந்த வித்தியாசங்களை எடுத்து விளக்குபவைகள். இவைகளின்றி, நாம் மேலே கூறியதுபோல் இந்த மூன்று சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களும் மதிப்பீடாக அமையும். இவைகளெல்லாம், தனித்த முறை (independent) மதிப்பீடுகளாகும். எந்த ஒரு பிரிவிலும் உள்ள வித்தியாசங்களுக்கும், மற்றப் பிரிவுகளிலுள்ள வித்தியாசங்களுக்கும் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை; அதேபோல் பிரிவுச் சராசரிகளினிடையே இருக்கக்கூடிய வித்தியாசங்களுக்கும், எந்த ஒரு பிரிவுக்குள்ளே இருக்கும் வித்தியாசங்களுக்குங்கூட எத்தகைய தொடர்பும் இல்லை.[7] தற்சமயம் நாம் பிரிவுகளுக்குள்ளே இருக்கும் வித்தியாசங்களைப் பற்றிக் கவலைப்படப் போவதில்லை. ஆதலால் இந்த மூன்று பிரிவு வித்தியாச மதிப்பீடுகளையும் மொத்தமாக்கி, முழுமைத் தொகுதியின் வித்தியாச மதிப்பீடொன்றைப் பெறுவோம். ஆக, நமக்குக் கிடைப்பது இரு மதிப்பீடுகளே—ஒன்று, பிரிவுகளினிடையே உள்ள வித்தியாசங்களிலிருந்து கணக்கிடப்பெற்றது ; மற்ெறான்று பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ளவற்றைக்கொண்டு கணக்கிடப்பட்டது.

z என்பதனைக் கணக்கிடுவதைவிட, F என்பதைக் கணக்கிடுவது சௌகரியமாதலால், முதலில் முழுமை மாறுபாடான (variance) σ^2-ன் மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடுவோம். பிரிவுகளுக்குள்ளே (variance within classes) இருக்கும் மாறுபாட்டை s_2^2 என்று குறித்தால்

$$s_2^2 = \frac{\text{பிரிவுச் சராசரிகளிலிருந்து வரும் வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம்}}{\text{பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ள வித்தியாசங்களுக்கான வரையற்ற டிகிரிகள்}}$$

$$= \frac{\Sigma d_a^2 + \Sigma d_b^2 + \Sigma d_c^2}{(f_a - 1) + (f_b - 1) + (f_c - 1)} \qquad (16.4)$$

இங்கு d_a, (d_b, d_cயும் கூட) என்பது A பிரிவின் சராசரியிலிருந்து வரும் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கும்; f என்பவைகள் அந்தந்தப்

[7] நாம் மற்றுமொரு மதிப்பீட்டையும் கணக்கிடலாம் என்பது தெளிவு. அதுதான் குறித்த 100 விவரங்களையும் கொண்டு அமைக்கப்பெற்ற மாறுபாடு (variance); இது முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் ஒரு மதிப்பீடு என்பதும் உண்மை. ஆனால், இது பிரிவுகளுக்குள்ளேயும், பிரிவுகளுக்கிடையேயும் உள்ள வித்தியாசங்களிலிருந்து தனித்ததன்று. தற்போதைய நமது ஆராய்ச்சி, பிரிவுகளிடையேயும், பிரிவுகளுக்குள்ளேயும் உள்ள வித்தியாசங்களே.

பிரிவுகளிலுள்ள எண்ணிக்கைகள். தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்த

$$s_2^2 = \frac{124 \cdot 9235}{97} = 1 \cdot 2879$$ என்பது கிடைக்கும்.

பிரிவுகளுக்கிடையேயுள்ள மாறுபாட்டை (variance between classes) s_1^2 என்பதால் குறிக்கலாம். அப்பொழுது நாம் ஒவ்வொரு பிரிவுச் சராசரியும், மொத்த (100 தகவல்களுக்குமான) சராசரியிலிருந்து விலகியிருப்பதைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை வர்க்கமாக்கி, அந்தப் பிரிவுகளிலுள்ள எண்ணிக்கைகளை நிறையாக (weight) வைத்துக் கணக்கிடுவோம்.

$$s_1^2 = \frac{\text{மொத்தச் சராசரியிலிருந்து பிரிவுச் சராசரிகளின் வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}}{\text{பிரிவுகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களுக்கான வரையற்ற டிகிரிகள்}}$$

$$= \frac{[(M_a - M)^2 \times f_a] + [(M_b - M)^2 \times f_b] + [(M_c - M)^2 \times f_c]}{\text{பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை} - 1} \quad (16.5)$$

$$= \frac{[(3.6206 - 3.5250)^2 \times 34] + [(3.5424 - 3.5250)^2 \times 33]}{3 - 1}$$

$$+ \frac{[(3.4091 - 3.5250)^2 \times 33]}{3 - 1}$$

$$= \frac{0.7640}{2}$$

$$= 0.3820$$

மூன்று பிரிவுச் சராசரிகளுள்ளதால், பிரிவுகளிடையே இருக்கக்கூடிய வரையற்ற டிகிரிகள் இரண்டுதாம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள அலைவெண் எண்ணிக்கைகளை நிறையாக்குவது, பின்னத்தின் பகுதியிலுள்ள (denominator) டிகிரிகளை மாற்றாது.

ஆக, இப்பொழுது, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடான σ^2-ன் இரண்டு மதிப்பீடுகள் s_1^2, s_2^2 என்று நமக்குக் கிடைத்துள்ளன. பிரிவுகளுக்குள்ளே திகழும் வித்தியாசங்களைப்போலவே பிரிவுகளினிடையேயும் (ராண்டம் காரணங்கள்) உள்ள வித்தியாசங்களை ஏற்படுத்துவதுதான் என்று நாம் எடுகோளாகக் கொண்டால், s_1^2, s_2^2 இரண்டும், மாதிரிப் பிழை எல்லைகளுக்குள் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுகோள் $s_1^2 = s_2^2 = \sigma^2$

அல்லது $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$

கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து $F = \frac{0.3820}{1.2879} = 0.297$

என்று வருகிறது. இந்த மதிப்பானது F ஒன்று என்ற எடு கோளுக்கு ஒத்ததா? வரையற்றடிகிரிகள் 2, 97-க்கான F பரவல் விவரங்களே நமக்குத் தேவை. F-ன் பரவல் இந்த மதிப்புகளுக்குக் கோட்டமாக (skew) அமையும். இந்தப் பரவலின் சில நிலைகளை—இந்த எடுத்துக்காட்டிற்குப் பயன்படக்கூடியவற்றைக் கீழே தருகிறோம்:

F	குறித்த F மதிப்பின் இடப் பாகத்தில் வளைகோட்டிற்கு அடியில் உள்ள பரப்புகளின் சதவீதம் ($n_1=2$; $n_2=97$)
0.005	0.5
0.01	1.0
0.05	5.0
3.09	95.0
4.83	99.0
5.60	99.5

அதாவது F பரவலின் 90 சதவீதப் பரப்பு, 0·05 மற்றும் 3·09 என்ற F மதிப்புகளிடையே இருக்கும். நமக்குக் கிடைத்த 0·297 என்பது இந்த இரண்டு எல்லைகளுக்குள்ளாகவே அமைந்துள்ளது; ஆதலால் அது வாய்ப்பு விதிகளினுல்மட்டுமே ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய வித்தியாசம்தான். பிரிவுகளிடையே உள்ள மாறுபாடு, பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ள மாறுபாட்டைவிடக் குறைவாக இருந்தாலும், இவ்விரண்டிற்குமுள்ள வித்தியாசம் பொருட்படுத்தும் அளவிற்குச் சிறப்பாக இல்லை. நாம் எடுத்த 100 விவரங்கள் கொண்ட மாதிரி σ^2 என்னும் மாறுபாடுடைய முழுத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாகும்; s_1^2 என்பது பிரிவுகளினிடையே உள்ளது; மற்றும் s_2^2 என்பது பிரிவுகளுக்குள்ளே இருப்பது—இவை இரண்டும் (σ^2-ன்) தனித்த சார்பற்ற மதிப்பீடுகள்தாம் என்ற எடுகோளிற்குப் புறம்பாக விவரங்கள் அமைந்தில்லை.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளை ஒப்பிடுதல்: இரண்டாம் எடுத்துக்காட்டு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், பிரிவுகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்கள் ராண்டமாக இருக்குமாறு நாமே வேண்டுமென்று (deliberately) அமைத்தோம். ஆனால், இதுபோன்று சாதாரணமாக ஏற்படுவதில்லை. நடைமுறையில் பல கண்டறிந்த விவரங்களை முறைப்படுத்தும்பொழுது ஏதாவதொரு கொள்கையை வைத்துதான் செய்வோம்; அப்படிச் செய்யுங்கால் அந்தப் பிரிவுகளினிடையே மாறுதல்கள் நேரும் என்பதையும் நாம் மனத்தில் வைப்போம். பிறகு இந்தக் கொள்கையையொட்டி அமைந்த சராசரிகளினிடையே உள்ள மாறுபாடானது, ராண்டம் காரணங்களால்

மட்டும் உண்டாகும் மாறுபாட்டைவிட அதிகமாக இருக்குமா என்பதனை ஆராய்வோம். இந்த முறையை விளக்க நாம் முதலில் எடுத்துக்கொண்ட உதாரணத்தையே (வட்டி வீதங்கள்) பயன் படுத்துவோம். அவைகளை இப்பொழுது வியாபாரிகளின் சொத்து களின் மதிப்பை வைத்துப் பாகுபாடு செய்வோம். கடன் வாங்கிய சிறு தொழிலதிபர்கள், கடன் வாங்கிய நடுத்தரத் தொழிலதிபர்கள், கடன் வாங்கிய பெருந் தொழிலதிபர்கள் என்று பிரிப்போம். பகுத்தறி வளவில் இம் மூன்றுவகைக் கடன்களுக்குண்டான வட்டி வீதங்கள் மாறும் என்று எண்ணுகிறோம். இந்த எண்ணத்தை எடுகோளாக வைத்துக் கண்டறிந்த விவரங்கள் இதற்குச் சாதகமாக உள்ளதா, இல்லையா என்பதனைப் பார்ப்போம். பாகுபாடான வீதங்களை அட்டவணை 16-3-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 16-3

ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டத்தின் அங்கத்தினர் பாங்குகளால் கடன் கொடுக்கப்பட்ட தொழிலதிபர்கள் செலுத்திய சராசரி வட்டி வீதங்கள் (வருடத்திற்குச் சதவீதம்). தொழிலதிபர்களை அவர் கள் சொத்துக்கேற்றவாறு பாகுபாடு செய்துள்ளது.

சிறு தொழிலதிபர்கள் கொடுத்த வட்டி வீதங்கள்*	நடுத்தர தொழிலதிபர்கள் கொடுத்த வட்டி வீதங்கள்†		பெரும் தொழிலதிபர்கள் கொடுத்த வட்டி வீதங்கள்‡	
5.4	4.5	3.8	3.0	1.8
5.1	4.1	3.3	2.5	1.9
5.4	4.6	3.8	3.3	2.0
5 1	4.2	3.5	3.0	1.7
5.4	4.4	3 7	2.7	2.2
4.9	4.2	3.3	2.8	1.6
4.5	3.7	2.9	2.1	1.7
4.9	4.3	3.7	2.7	2.2
5.2	4.1	4.2	3.0	2.4
4.7	4.0	3.2	2.2	1.7
4.9	4.1	3.7	2.8	1.8
4.5	3.8	3.2	2.5	2.0
5.0	4.2	3.6	2.7	1.9
5.4	4.6	4.0	3.3	2.1
5.1	4.3	3.5	2.9	2.2
6.1	4.4	4.1	2.9	1.9
5.2	4.3	3.7	3.5	2.6
5.5	4.5	3.8	3 0	2.5
3.8	3.9	3.2	2.2	1.5
4.8	4.0	3.5	3.0	1.9

* 50,000 டாலர்களுக்குக் குறைவான மொத்த சொத்துள்ளவர்கள் (total assets).

† 50,000-லிருந்து 750,000 டாலர்கள் வரை மொத்த சொத்துள்ளவர்கள்.

‡ 750,00 டாலர்களுக்கும் மேல் மொத்த சொத்துள்ளவர்கள்.

பிரிவுகளின் N எண்ணிக்கைகளும் அவைகளின் சராசரிகளும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

		N
சராசரி வட்டி வீதம், சிறு தொழிலதிபர்கள் ...	5·0450	20
சராசரி வட்டி வீதம், நடுத்தரத் தொழிலதிபர்கள்	3·8975	40
சராசரி வட்டி வீதம், பெருந் தொழிலதிபர்கள் ...	2·3925	40
சராசரி, எல்லோருக்குமானது	3·5250	100

முன்போலவே நாம், s_1^2, s_2^2 என்ற—பிரிவுகளுக்கிடையேயுள்ள மாறுபாடு, பிரிவுகளுக்குள்ளே யுள்ள மாறுபாடு—இரண்டினையும் கணக்கிடுவோம். அவைகளுக்கு முறையே n_1, n_2 என்பவை வரையற்ற டிகிரிகளாகும். முடிவுகள் அட்டவணை 16-4-ல் இடம்பெறுகின்றன.

அட்டவணை 16-4

மாறுபாட்டின் ஆய்வு

அவர்களின் சொத்துக்கேற்றவாறு பிரிக்கப்பட்ட தொழிலதிபர்களின் கடன் வட்டிவீதங்கள்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற டிகிரிகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	மாறுபாடு
பிரிவுகளிடையே	2	103.0605	51.530
பிரிவுகளுக்குள்ளே	97	22.6270	0.233
மொத்தம்	99	125.6875	

இந்தப் பட்டியலில் இறுதிப் பத்தியிலுள்ள இரண்டு மாறுபாடுகளும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கத்தக்கவை. இரண்டாம் மாறுபாடான 'பிரிவுகளுக்குள்ளே' என்பது பலப்பலவான ராண்டம் காரணங்களால் (அல்லது வாய்ப்பு விதிகளால்) மட்டுமே உண்டாகக்கூடிய மாறுபாட்டின் ஓர் அளவாகும்; இந்த மாறுபாட்டைவிட மற்றொன்றான 'பிரிவுகளுக்கிடையே மாறுபாடு' பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வித்தியாசப்படுகிறதா, இல்லையா என்பதே நாம் முடிவு செய்ய வேண்டியது. [பின் வரும் பக்கங்களில் 'செய்ம்முறைப் பிழைகள்' (experimental errors) என்ற தொடரை இதுபோன்ற ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்படும் வித்தியாசங்களைக் குறிக்கப் பயன்படுத்துவோம்; இதுபோன்ற ராண்டம் காரணங்கள், அல்லது வாய்ப்பு விதிகள், பிரிவு செய்வதற்காகக் கருதப்பட்ட கொள்கையுடன் தொடர்பில்லாமல் தனியானவை என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது.]

வித்தியாசத்தைச் சுட்டிக்காட்டும் விகிதமான F என்பது

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{51.530}{0.233} = 221.1$$ என்ருகிறது.

இங்கு F பின்னத்தின் மேலுள்ள (தொகுதி எண்) மாறுபாடு கீழுள்ள (பகுதி எண்) மாறுபாட்டைவிட அதிகமாகவுள்ளதா என்பதுதான் பிரச்சினை ; ஆதலால் நமக்குத் தேவையானது F பரவலின் வலப்பக்க முனைதான் (upper tail). அதாவது இங்கு நாம் ஒருமுனைச் சோதனையைச் செய்கிருேம். n_1 என்பது 2, n_2 என்பது 97. இவைகளுக்கு ஒத்த F-ன் மதிப்புகளைத் துணை இணைப்புப் பட்டியல் VII-ல் காணலாம்; $n_1 = 2; n_2 = 80$ என்பவைகளுக்கு 99ஆம் நூற்றுமானம் $F = 4{\cdot}88$; $n_1 = 2$, $n_2 = 100$ என்பவைகளுக்கு 99ஆம் நூற்றுமானம் 4·82; ஆதலால், தோராயமாக $n_1 = 2$; $n_2 = 97$ என்பவைகளுக்கான F-ன் 99ஆம் நூற்றுமானம் 48.3 என்ருகும். உண்மையான மதிப்பு F-ற்கு 1 ஆக விருப்பின், வாய்ப்பு விதிகளால் மட்டுமே அது 4·83-க்கும் மேலாக இருப்பதன் ஊக அளவை 100-க்கு ஒன்றுதான். நம் எடுத்துக்காட்டிலுள்ள 221·1 என்பது 4·83-ஐ விட மிகமிக அதிகமாகவுள்ளது. ஆதலால் ‘ பிரிவுகளினிடையே ’ மற்றும் ‘ பிரிவுகளுக்குள்ளே ’ மாறுபாடுகள் இரண்டும், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் தனித்த இரண்டு மதிப்பீடுகள் என்று கருதுவது சரியில்லை என்று முடிவு செய்வோம். ‘பிரிவுகளினிடையே’ மாறுபாடானது ‘ பிரிவுகளுக்குள்ளே ’ மாறுபாட்டைவிடச் சிறப்பாக அதிகமாகவுள்ளது. அதாவது, வாய்ப்பு விதிகள்மட்டும் செயல்பட்டிருப்பின் நிகழும் மாறுபாட்டைப் பிரிவுகளுக்குள்ளான மாறுபாடு குறிக்கிறது; இந்த உதாரணத்தில், நிகழ்ந்துள்ள வித்தியாசங்கள் வாய்ப்பு விதிகள்மட்டுமின்றிப் பிற பல காரணங்களால் ஏற்பட்டவை.

இதுபோன்ற சோதனைகளில், F-ன் தொகுதி எண்ணுகைப் (numerator) பிரிவுகளினிடையே உள்ள மாறுபாட்டைக் கொள்வது முறை. F-என்பது ஒன்றைவிடக் குறைவாக விருப்பின், சிறப்பான காரணங்கள் எதுவும் நிகழவில்லை என்று ஆராய்ச்சியாளர் முடிவு காண்பர். F என்பது ஒன்றைவிடச் சிறப்பாக, பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு, வித்தியாசப்பட்டால்தான் அவர் தாம் கருதிய எடுகோளான $F = 1$ என்பதனைத் தள்ளுபடி செய்வார். சாதாரணமாக ஒருமுனைச் சோதனைதான் பயன்பட்டு வருவது—0·01 மட்டத்தில் நாம் எடுகோளை நிராகரிப்பதாயின் 99ஆம் நூற்றுமானமான $F_{\cdot 99}$ என்பதையும் (0.05 மட்டத்தில் நிராகரிப்பதாயின் $F_{\cdot 95}$ என்பதையும்) நோக்குவோம். இந்தக் காரணத்திஞல்தான், F பரவலின் நூற்றுமானங்கள்மட்டுமே (வலமுனைப் பரப்பைக் குறிப்பவை) பட்டியல்களில் இடம்பெற்றுள்ளன. சில சமயங்களில் F-ன் மதிப்பு ஒன்றைவிடக் குறைவாக இருக்குமா என்பதனையும் ஆராய

வேண்டிய நிலை வரலாம்; அப்பொழுது நமக்குத் தேவைப்படுபவை 1, 5 நூற்றுமானங்களில் F-ன் மதிப்புகளாகும். இங்குள்ள F அட்டவணைகளிலிருந்தே, அவைகளையும் கணக்கிடலாம்; ஏனெனில் F பரவல்கள் ரெஸிப்ரோக்கல்களைப்பொறுத்தமட்டில் சமச்சீராக அமைந்தவையாகும்.[8]

குறியீட்டுமுறை : இந்த நிலையில், இந்த அதிகாரத்தில் கையாளப்பட்ட, கையாளப்போகும் அடையாளக் குறிகளைப்பற்றிச் சுருக்கமான ஒரு பட்டியலைத் தருதல் நலமாகும்.

z : இரண்டு தரவிலக்கங்களின் இயற்கை லாகிருதங்களின் வித்தியாசம்.

F : இரு மாறுபாடுகளின் விகிதம்.

M_a, M_b, . . . ; M_1, M_2 . . . . என்பன : a, b, ... அல்லது 1, 2, . . . போன்ற பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரி.

d_a, d_b . . . ; d_1, d_2 . . . . என்பன : a, b, . . . அல்லது 1, 2, ... பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்துள்ள வேறுபாடுகள்.

f_a, f_b . . . ; f_1, f_2 . . . என்பன : a, b,. . . அல்லது 1, 2,. . . பிரிவுகளின் அலைவெண்கள்.

$\bar{X}_0$: ஒரு குறித்த பிரிவின் கண்டறிந்த சராசரி.

$\bar{X}_e$: ஒரு குறித்த பிரிவின் மதிப்பிடப்பட்ட சராசரி.

c : மாறுபாட்டின் ஆய்வு அட்டவணையிலுள்ள பத்திகள்.

n_i : (பத்திக்குப் பத்தி எண்ணிக்கை மாறுகின்றவாறு அமையுங்கால்) ஒரு பத்தியிலுள்ள எண்ணிக்கை.

$\bar{X}_i$: அந்தப் பத்தியிலுள்ள விவரங்களின் சராசரி.

[8] இடப்பக்க நூற்றுமானங்களைக் கணக்கிட, n_1, n_2 என்பவைகளின் மதிப்புகளை மாற்றி வைத்துக்கொண்டு, F பட்டியலை நோக்கவேண்டும்; அதாவது, மேலுள்ள தொகுதிக்கு n_2 என்பதை வரையற்ற டிகிரிகளாகவும் கீழுள்ள பகுதிக்கு (denominator) n_1 என்பதை வரையற்ற டிகிரிகளாகவும் கொள்ளவேண்டும். இவைகளுக்கான 99ஆம் நூற்றுமான F-ஐ பட்டியலிலிருந்து காணலாம். இந்த மதிப்பின் ரெஸிப்ரோக்கல்தான், n_1, n_2-க்களின் மூல மதிப்புகளுக்கொத்த F பரவலின் 1ஆம் நூற்றுமானமாகும். $F_{.05}$ என்பதையும் இவ்வாறே $F_{.95}$ என்பதிலிருந்து கணக்கிடலாம்.

உதாரணமாக, $n_1 = 4$, $n_2 = 100$ என்ற நிலையின் F-ன் 1ஆவது நூற்றுமானத்தைக் கணக்கிடுவோம். துணை இணைப்புப் பட்டியல் VII-ல் F-ன் 99ஆம் நூற்றுமானம் 3.51 என்றுள்ளது. நமக்குத் தேவையான F-ன் 1ஆவது நூற்றுமானத்தைப் பெற, முதலில் n_1, n_2-க்களை மாற்றி அமைக்கவேண்டும். அதாவது $n_1 = 100$, $n_2 = 4$ என்ற நிலையில் $F_{.99}$-ன் மதிப்பைப் பட்டியலிலிருந்து 13.57 என்று குறித்துக்கொள்வோம். இதன் ரெஸிப்ரோக்கலை $\left(\frac{1}{13.57}\right)$ கணக்கிட 0.074 என்று வருகிறது. இதுதான் நமக்கு வேண்டிய F-ன் 1ஆவது நூற்றுமானம். இந்த F-க்கு தொகுதியின் டிகிரிகள் 4, பகுதியின் டிகிரிகள் 100.

Q_1 : அந்தந்தப் பத்தியிலுள்ள அலைவெண்களை நிறையாக்கிப் பத்திச் சராசரிகளுக்கும் மொத்தச் சராசரிக்கும் உள்ள விளக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

Q_2 : பத்திகளிலுள்ள உறுப்புகளுக்கும் அந்தந்தப் பத்திச் சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

Q : மொத்தச் சராசரியிலிருந்து தனித்த ஒவ்வோர் உறுப்பின் விளக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

Σ' : குறித்த பத்தியிலுள்ள உறுப்புகளுக்கும், அந்தப் பத்தியின் சராசரிக்குமுள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கூட்டாகச் செய்ய உதவும் குறி.

r : மாறுபாட்டின் ஆய்வுப் பட்டியலிலுள்ள வரிசைகள் (rows) (பத்திகளாக இல்லாமல் வரிசைகளாக அமைந்த விவரங்களை ஆராயும்பொழுது மேற்சொன்ன குறிகளை வரிசைகளுக்குப் பொருந்துமாறு அமைத்துக்கொள்ளலாம்).

H_r : வரிசைகளின் சராசரிகளுக்கான சூனிய (null) எடுகோள்.

H_c : பத்திகளின் சராசரிகளுக்கான சூனிய எடுகோள்.

H_{rc} : இடை விளைவுக்கான (interaction) சூனிய எடுகோள்.

$F_{\cdot 99}$: F பரவலின் 99ஆவது நூற்றுமானம் ; வாய்ப்பு விதிகளால் மட்டுமே பாதிக்கப்பட்ட நிலையில், ஊக அளவை 100-ல் 1ஆக இருக்கும்படியான F-ன் மதிப்பு. (மற்ற ஒட்டுக் குறிகள் மற்ற நூற்றுமானங்களைக் குறிக்கும்.)

தரப்படுத்தப்பட்ட முறை : மாறுபாட்டின் ஆய்வுக்கான கணக்கு முறைகளைச் சுட்டிக்காட்ட உதவும் பொதுவான ஒரு முறையின் எடுத்துக்காட்டு மேற்கண்ட அட்டவணை 16-4 ஆகும். இதுபோன்ற மற்றப் பிரச்சினைகளுக்கும் பொருத்தமான ஓர் அமைப்பு முறையை அட்டவணை 16-5-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 16-5

மாறுபாட்டின் ஆய்வுக்கான தரப்படுத்தப்பட்ட முறை

மறுபாட்டின் மூலம் (1)	வரையற்ற டிகிரிகள் (2)	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (3)	சராசரி வர்க்கம் (மாறுபாடு) (4)
பிரிவுகளினிடையே (பத்திகளில்)	$n_1 = c - 1$	$Q_1 = \Sigma n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2$	$s_1^2 = Q_1/n_1$
பிரிவுகளுக்குள்ளே (பத்திகளில்)	$n_2 = N - c$	$Q_2 = \Sigma\Sigma'(X - \bar{X}_i)^2$	$s_2^2 = Q_2/n_2$
மொத்தம்	$n = N - 1$	$Q = \Sigma(X - \bar{X})^2$	

ஒரே ஒரு கொள்கைக்கேற்பப் பாகுபாடு அமையுமாயின் மேற் கண்டமுறை நன்கு பயனளிக்கும். மேற்கண்ட 16-3ஆம் அட்ட வணையிலுள்ளதைப்போலவே இந்த எடுத்துக்காட்டிலும் பிரிவுகள் பத்திகளே. அட்டவணை 16-5-ன் மூன்றும் (3) பத்தியிலுள்ள சூத்திரங்கள் மாறுபாட்டின் ஆய்வில் உள்ள சிறப்பு முறைகளைச் சுட்டிக் காட்டுகிறது; இங்கு வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையான Q என்பதை Q_1, Q_2 என்ற இரு பகுதிகளாக்குதல் தான் முக்கியமான பாகுபாடு. 16-5-ன், (2) மற்றும் (3)ஆம் பத்தியின் மொத்தங்கள் மேலுள்ள இரண்டு தொகைகளின் மொத் தங்களாகும். இவைகளே அங்குக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. வர்க் கங்களின் பல கூட்டுத் தொகைகளிடையே இருக்கும் ஓர் அடிப்படை யான விதியைக் கீழ்க்காணும் சமன்பாடு விளக்கும் :

$$\Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 + \Sigma\Sigma'(X - \bar{X}_i)^2 \qquad (16.6)$$

சாதாரணமாக நாம் ஆராயும் எடுகோளானது F என்பதன் மதிப்பு 1 என்பதுதான். வர்க்கங்களின் ஒவ்வொரு கூட்டுத் தொகையையும், அதனதன் வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுத்தால் வரும் முடிவுகள், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடான σ^2 என்பதன் தனித்த மதிப்பீடு என்பதுதான் நாம் எண்ணிக்கொள்வது. அந்த எடுகோள் உண்மையற்றதாயின், மேற்கூறியவாறு வர்க் கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைப் பிரிப்பதால் பிரிவுக்காக எடுக்கப்பட்ட பாகுபாட்டின் விளைவுகளைச் சிறப்பாகக் காண முடிகிறது.

கணக்கிடு முறைகள் : 5ஆம் அதிகாரத்தில் விவரித் துள்ள ஒரு சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதால், மாறுபாட்டு ஆய்விற்கான கணக்குகளை எளிதில் போடுதல் சாத்தியமாகும்.

X என்ற பல அளவுகளிருந்தால்,[9]

$$\Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - N(\Sigma X/N)^2 \qquad (16.7)$$

அல்லது $\Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - N\bar{X}^2$ (16.8)

(16·7) என்ற சமன்பாட்டில் வரும் ΣX என்பதற்குப் பதில் T (மொத்தம்) என்பதைப் பொருத்தினால் நமக்குக் கிடைக்கும் சூத்திரம்

$$\Sigma(X-\bar{X})^2 = \Sigma X^2 - T^2/N \qquad (16\cdot9)$$

இது அடிக்கடி பயன்படக்கூடிய சூத்திரமாகும். இதன்படி, எல்லாப் பிரிவுகளின் மொத்தச் சராசரியிலிருந்து எல்லா விவரங் களின் வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடலாம்;

[9] இந்தச் சமன்பாடு எப்படி வந்தது என்பதன் விளக்கத்திற்கு முதல் பாகம், 152ஆம் பக்கத்திலுள்ள அடிக்குறிப்பைக் காண்க. (அங்குச் சிறிதே மாற்றமான குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.)

மற்றும் பத்திகளின் சராசரிகளிலிருந்து அந்தந்தப் பத்தியிலுள்ள விவரங்களின் வர்க்கக் கூட்டுத் தொகையையும் கணக்கிடலாம்; கண்டறிந்த Xகளின் மொத்தமும், அவைகளின் வர்க்கங்களின் மொத்தமும்—வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளேயும், அதன் பிரிவுகளேயும் கணக்கிட அடிப்படையாக அமைந்தவை.

இரண்டு கொள்கைகளுக்கேற்ற பிரிவுகளுக்கான மாறுபாட்டு ஆய்வுமுறை

(Analysis of Variance with Dual Principles of Classification)

மேலே எடுத்துச் சொல்லப்பட்ட உதாரணத்தில் வட்டி விகிதங்களே ஒரே ஒரு கொள்கைக்குப் பொருத்தமாகப் பிரிவுபடுத்தியிருந்தோம், ஆனுல், மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையில் கண்டறிந்த விவரங்களே இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு கொள்கைகளுக்கேற்றவாறும் பிரித்து ஆராயலாம். இப்பொழுது இரண்டு கொள்கைகளின்படி பாகுபாடு செய்யப்பட்ட ஒரு பொருளாதார எடுத்துக்காட்டை விளக்குவோம். 1926ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1933ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி மாதம் வரையில் அமெரிக்க நாட்டின் (U.S.) மொத்தச் சந்தைகளில் விற்பனையான 620 பொருள்களின் விலைகளேப்பற்றிய தகவல்களே ஆராய்வோம். விலைகள் ஒப்புமையானவைகள் (relative). இந்தக் கால இடைவெளியில் விலைகளின் மாற்றத்திற்கு முக்கியக் காரணமாயிருந்தது பெரிய 'பின்னிறக்கம்' (great recession) தான். அது 1933-ல்தான் மிகுந்த கீழ்நிலையை (trough) அடைந்தது. பலரகப்பட்ட பொருள்களின் விலையிறக்கங்களின் தன்மைகளேப்பற்றிதான் நாம் ஆராயப்போகிறேம்.

அமெரிக்காவின் பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் (Bureau of Labour Statistics) என்ற நிறுவனத்தாரால் தொகுக்கப்பட்ட 670 ஒப்புமை விலைகளே இரு பிரிவுகளாக்கலாம்—நீடிக்காத பொருள்கள் (perishable goods) 505 உள்ளன. நீடித்த பொருள்கள் (durable goods) இவை 165 உள்ளன. ஒரு முக்கியமான பின்னிறக்கத்தில் இந்த இருவகைப் பொருள்களிடையே பெரிதும் வித்தியாசங்கள் விளேயக்கூடும்—தேவை (demand) அளிப்பு (supply) என்ற இரு நிலைகளிலும்—ஆதலால் பொருள்களே இவ்வாறு பிரிப்பது பொருளாதார முறையில் பொருள் செறிவுள்ளதாகும். அதேபோல், இதே பொருள்களேக் கச்சாப் பொருள்கள் (raw materials) என்றும், பொறிசெய் பொருள்கள் (manufactured goods) என்றும் பிரிக்கலாம். முதல் வகையில் 134-ம், இரண்டாம் வகையில் 536-ம் உள்ளன. இப்படிக்கு இரு கொள்கைவாருகப் பாகுபடுத்தினுல், நமக்கு நான்கு உட்பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன—நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்கள் (101), நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்கள் (404), நீடிக்கும்

கச்சாப் பொருள்கள் (33), நீடிக்கும் பொறிசெய் பொருள்கள் (132). நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கும், நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம் 101 : 404; அதேபோல மற்ற இரண்டுவிகிதப் பொருள்களின் எண்ணிக்கைகளுக்குள் விகிதம் 33 : 132. இரண்டு விகிதங்களும் சமமென்பதை நன்கு கவனிக்கவும். இதுபோல் பல உட்பிரிவுகளுக்கான அலைவெண்கள் விகித சம முறையில் (in proportion) அமைந்திருத்தல் இச் செய்ம்முறையின் ஒரு முக்கிய விதியாகும்.

அட்டவணை 16-6-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மொத்தமான எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு, இந்த இரண்டு பிரிவுக் கொள்கைகளுக்கான பல பிரச்சினைகளை ஆராயலாம்.

அட்டவணை 16-6

பெப்ரவரி 1933-ல் விற்பனையில் இருந்த 670 பொருள்களின் ஒப்புமை விலைகளின் ஆய்வுக்கான அளவைகள்

(1926 = 100)

1	2	I
நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்கள்	நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்கள்	எல்லாம் நீடிக்காத பொருள்கள்
$N_1 = 101$	$N_2 = 404$	$N_p = 505$
$M_1 = 41.663366$	$M_2 = 62.329208$	$M_p = 58.196040$
$\Sigma d_1^2 = 31{,}118.56$	$\Sigma d_2^2 = 187{,}414.21$	$\Sigma d_p^2 = 253{,}040.57$
3	4	II
நீடித்த கச்சாப் பொருள்கள்	நீடித்த பொறிசெய் பொருள்கள்	எல்லாம் நீடித்த பொருள்கள்
$N_3 = 33$	$N_4 = 132$	$N_d = 165$
$M_3 = 65.060606$	$M_4 = 75.719697$	$M_d = 73.587879$
$\Sigma d_3^2 = 12{,}217.88$	$\Sigma d_4^2 = 31{,}308.63$	$\Sigma d_d^2 = 46{,}525.97$
A	B	
எல்லாம் கச்சாப் பொருள்கள்	எல்லாம் பொறிசெய் பொருள்கள்	எல்லாம் பொருள்கள்
$N_r = 134$	$N_m = 536$	$N = 670$
$M_r = 47.425373$	$M_m = 65.626866$	$M = 61.986567$
$\Sigma d_r^2 = 56{,}952.76$	$\Sigma d_m^2 = 236{,}562.35$	$\Sigma d^2 = 329{,}029.88$

ஒவ்வொரு பிரிவிலும், உட்பிரிவிலும் உள்ள விவரங்கள் கீழ் வருமாறு: அந்தப் பிரிவிலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை, பிப்ரவரி 1933-க்கான ஒப்புமை விலைகளின் சராசரி, அந்தப் பிரிவின் சராசரியிலிருந்து, அப் பிரிவின் ஒவ்வொரு பொருள் விலைக்குமுள்ள வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை – இவைகளே. நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களுக்குச் சராசரி 41·663366 (அதாவது, அப் பொருள்களின் விலைகளில் ஏற்பட்டுள்ள சராசரி இறக்கம்

58·34 சதவீதம்). அந்தப் பிரிவிலுள்ள 101 விவரங்களின் விலக்க வர்க்கங்களின் மொத்தம் (சராசரியான 41·663366-லிருந்து) 31,118·56 என்பது. எல்லாப் பொருள்களுக்கான சராசரி 61·986567; இந்தச் சராசரியிலிருந்து எல்லாப் பொருள்களின் விலையிறக்கங்களினது விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 329,029·88 (கணக்கிடுங்கால் முடிவுகளில் முரண்பாடு ஏற்படாமல் இருக்கத்தான் அதிகமான தசம ஸ்தானங்களுக்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன).

சோதனை செய்யவேண்டிய எடுகோள்கள் (Hypotheses to be tested): பலவகைப்பட்ட பொருள்களின் விலை இறக்கங்களின் (சில வற்றில் குறைவாகவும், சிலவற்றில் அதிகமாகவும் இருக்கிறது) தன்மையை ஆராய்வதற்காக அட்டவணை 16-6-ஐ அமைத்தோம். இப்பொழுது நமக்குத் தோன்றக்கூடிய பிரச்சினைகள் பலவாகும்: ஒரு முக்கியமான வியாபாரப் பின்னிறக்கம் நிகழ்ந்துகொண்டிருக்கும் சமயம் நீடிக்காத பொருள்களின் விலை-நடக்கையிலும் (price behaviour) நீடிக்கும் பொருள்களின் விலை-நடக்கையிலும் மாறுதல்கள் ஏற்பட்டிருக்குமா? இந்தக் கேள்விக்கான விடையை I, II என்று குறிக்கப்பட்ட இரு வரிசைச் சராசரிகளிலிருந்து கணக்கிடலாம். (மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையை விவரிக்கும் நூல்களில் இதுபோன்ற—அவைகளுக்குண்டான பண்புகளுக்கு ஒப்ப ஏற்படும்—வித்தியாசங்களைச் 'சூழ்நிலை விளைவுகள்' என்று கூறுவர்.) கச்சாப் பொருள்களின், மற்றும் பொறிசெய் பொருள்களின் விலைகளிலும் ஒரு பின்னிறக்கத்தில் வித்தியாசங்கள் ஏற்படுமா? இரு பத்திகளின் (இங்கு A, B என்று குறிப்பிடப்பட்டவை) சராசரிகளிலிருந்து இக் கேள்விக்கு விடை காணலாம். [அமைப்பு முறைகளால் (processes of fabrication) உண்டாகும் வித்தியாசங்களை 'நடத்துகை விளைவுகள்' (treatment effects) என்று கூறுவர்.] வியாபாரப் பின்னிறக்கம் இருக்கும்பொழுது, அப் பொருள்கள் எவ்வாறு அமைக்கப்பெற்றன என்பதனைப் பொறுத்து, அப் பொருள்களின் விலையிறக்கம் வேறுபடுமா என்பதே இரண்டாம் கேள்வியின் உட்பொருள். இங்கு மற்றுமொரு கேள்வியும் எழும். அமைப்பு முறையானது நீடிக்காத பொருள்களையும், நீடிக்கும் பொருள்களையும் ஒரே அளவாக மாற்றுகிறதா? அல்லது இவ்விருவகைப் பொருள்களின் விலைகள் அமைப்பு முறையால் வெவ்வேருகப் பாதிக்கப்படுகின்றனவா? இதுபோன்ற வேறுவேருன விளைவுகள் இருக்குமாயின், அதனை 'இடைவிளைவு' (interaction) என்போம். இம் மூன்று கேள்விகளுக்கும் விடைகளைக் காண, நாம் இப்பொழுது மூன்று சூனிய (null) எடுகோள்களை எண்ணத்தில் கொண்டு கீழ்க்கண்ட குறிப்புகளால் விளக்குவோம்:

H_r என்ற எடுகோள்: வரிசைகளின் சராசரிகளில் வித்தியாசமில்லை.

H_c என்ற எடுகோள்: பத்திகளின் சராசரிகளில் வித்தியாச மில்லை.

H_{rc} என்ற எடுகோள்: இடைவினைவு இல்லை.

(இவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளையே குறிக்கும். இவைகளுக்கு முறையான மாதிரி மதிப்புகள் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வித்தியாசமாக வுள்ளனவா என்பதனையே நாம் சோதனை செய்யப்போகிறோம்.)

வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையின் பிரிவுகள் (Components of the Total Sum of Squares)

மொத்தக் கூட்டுத்தொகையான 329,029·88 என்பதனை, மேற் கூறப்பட்ட மூன்றுவகை எடுகோள்களால் சுட்டிக்காட்டப்பட்ட வித்தியாசங்களுக்குத் தகுந்தவாறு பிரிக்கவேண்டும். அதுசமயம், பாகுபாட்டிற்கான பண்பு வித்தியாசங்களே அல்லாமல், மற்ற ராண்டம் அல்லது வாய்ப்பு விதிமுறைகளினால் ஏற்படக்கூடும் வித்தியாசத்தை விளக்கும் மற்றுமொரு பிரிவையும் கணக்கிட வேண்டும். இதனைப் 'பிழைப் பிரிவு' என்று அழைக்கலாம். இது வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்படும் செய்ம்முறை வித்தியாசங்களுக்கான ஓர் அளவை (measure)யாகும்.

பாகுபாட்டிற்கான இரண்டு பிரிவுகளுக்கும் தனித்தனியே வர்க்கங்களின்கூட்டுத்தொகைகள், முன் எடுத்துக்காட்டிலுள்ளதைப் போன்று கணக்கிடப்படும். அதாவது, ஒவ்வொரு பிரிவின் சராசரியையும், மொத்தச் சராசரியிலிருந்து கழித்து, அதனை வர்க்கப் படுத்தி, அந்தப் பிரிவிலுள்ளஎண்ணிக்கையால்நிறைப்படுத்துவோம்; அதுபோல் எல்லாப் பிரிவுகளுக்கும் செய்வோம். இந்த நிறையிட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைதான் நமக்குத் தேவைப்படுவது.

நீடிக்காத—நீடிக்கும் பிரிவுகளுக்கான Σd^2 என்பது

$$= [(58{\cdot}196040-61{\cdot}986567)^2 \times 505] + [(73{\cdot}587879-61{\cdot}986567)^2 \times 165]$$

= 29,463·31 என்று கிடைக்கிறது.

அதேபோல், 'கச்சா-பொறிசெய்' பிரிவுகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 35,514·75 என்றாகும்.

எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும் ஓர் அளவுகோலாக (yardstick) இந்தப் 'பிழைப் பிரிவு' உள்ளது. ஆதலால், மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து இந்தப் பிரிவு, மற்ற இரண்டு பண்புகளின் தொடர்பில்லாமல், தனித்தவாறு கணக் கிடப்பட வேண்டும். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், இதனை நான்கு பிரிவுகளுக்குள்ளிருக்கும் வித்தியாசங்களை வைத்துக் கணக்கிடுவது தான் பொருத்தமாகும். (இப் பிரிவுகளை 1, 2, 3, 4 என்று அட்ட

வணை 16-6-ல் குறித்துள்ளதைப் பார்க்க.) இந்த நான்கு பிரிவு களில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் கிடைக்கும் மாறுபாடானது வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டுமே உண்டாகும் வித்தியாசங்களை மதிப்பிடும். செல் (Cell) 1-ல் உள்ள 101 பொருள்களும் நீடிக்காதவைகள்; கச்சாப் பொருள்கள்; ஆதலால், இவைகளெல்லாம் ஒரே வகையைச் சார்ந்தவைகளே. அதேபோன்று 4ஆம் பிரிவிலுள்ள 132 பொருள் களும் ஒரே வகையைச் சார்ந்தவை—நீடிக்கும், பொறிசெய் பொருள்களே. இந்த ஒவ்வொரு பிரிவிற்கான Σd^2 என்பது இரு பண்புகளின் பாகுபாட்டினுல் ஒரே வகையான பொருள்களுக் குள்ளிருக்கும் வித்தியாசங்களை அளவிடும்.[10] இவைகளில் நான்கில் எதுவும் மற்றதைவிடச் சிறந்த மதிப்பீட்டைத்தரமுடியாத தாலாலும் கொடுக்கப்பட்ட எல்லா விவரங்களையும் பயன்படுத்த வேண்டியதாலும், நாம் இவை நான்கையும் சேர்த்து ஒரு மதிப் பீட்டைப் பெறுவோம். முறை கீழ்க்கண்டவாறு :

நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு = 31,118·56

நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்களுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு = 187,414·21

நீடிக்கும் கச்சாப் பொருள்களுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு = 12,217·88

நீடிக்கும் பொறிசெய் பொருள்களுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு = 31,308·63

பிரிவுகளுக்குள் இருக்கும் மொத்த வேறுபாடு = 262,059·28

இம் மொத்தமான 262,059·28-ஐத் தகுந்த வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுத்தால் நமக்குக் கிடைக்கும் மாறுபாடானது, வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்படக்கூடிய வேறுபாடுகளின் ஒரு மொத்த மதிப்பீடாகும். அதாவது, பொருள்களின் நீடிக்கும்—நீடிக்காத தன்மை, அவை களின் அமைப்பு முறைகள் இவைகளன்றி, மற்றப் பலப்பல காரணங் களால் ஏற்படக்கூடிய எல்லா மாறுதல்களையும் கூட்டாக்கி, வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்படுபவை என்று கூறுகிறேம்.

Σd^2 என்ற கூட்டுத்தொகை மூன்றிற்கும் நீடிக்காத—நீடிக்கும் பொருள்களுக்கிடையே உள்ளது; கச்சா, பொறிசெய் பொருள் களுக்கிடையே உள்ளது; வாய்ப்பு விதிகளுக்கானது என்பன

[10] மேற்கூறிய வாக்கியத்தைத் தற்சமயமுள்ள எடுத்துக்காட்டிற்காக மட்டும் உண்மையென்றே கொள்ளுவோம். நீடிக்காத, நீடிக்கும் பொருள்களுக்கும், கச்சா மற்றும் பொறிசெய் பொருள்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை அவ்வளவு உறுதியாகவும் தெளிவாகவும் கூறிவிட இயலாது.

வற்றின் மொத்தம் 327,037·34 என்ருகிறது. வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகையான 329,029·88 என்பதிலிருந்து இதைக் கழித்தால், 1,992·54 என்பது நிகழும். இது பிரிவுகளிடையே உள்ள மீதியான (residual) வேறுபாடாகும்; (மேற்கூறிய) இடைவிளைவை (interaction) இது அளவிடும். இடைவிளைவு இல்லாவிட்டால்—அதாவது, இரு பண்புகளும் ஒன்றற்கொன்று தொடர்பற்றவைகளாக இருந்தால்—இந்த மீதியான, பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு, வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டும் ஏற்படும் வேறுபாட்டையே குறிக்கும்.

இடைவிளைவை நேராகக் கணக்கிடுதல்: மேலே இடைவிளைவை ஒரு மீதியாகக் கணக்கிட்டோம். இப்படிச் செய்யாமல் அதனை நேராகக் கணக்கிட்டால், அதன் தன்மை நன்கு விளங்கும்; மற்றும், மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையின் அடிப்படைகளின் ஒன்று தெளிவாகப் புலனுகும். இப்பொழுது இதைத்தான் செய்யப் போகிறோம். அட்டவணை 16-7-ல் இரு பண்புகளால் நான்காகப் பிரிந்துள்ள ஒவ்வொரு பிரிவிலும், அப் பிரிவின் கண்டறிந்த சராசரியான $\bar{X}_o$ஐ அட்டவணை 16-6-லிருந்து எடுத்து எழுதியுள்ளோம்; மற்றும் $\bar{X}_e$ என்ற சராசரியின் ஒரு மதிப்பீட்டையும் குறித்துள்ளோம். (இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் தனித்தனியே ஒட்டுக் குறிகளை உபயோகிக்கவில்லை.) இந்த மதிப்பீடு இரண்டு கொள்கைகளுக்கிணங்கக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது; அவை யாவை எனில்—ஒன்று, இரு பண்புகளும் ஒன்றோடொன்று தொடர்பற்றவை என்பது; இரண்டு, ஒவ்வொரு பண்பின் இயக்கமும் (influence) 'கூட்டு முறை'யில் (additive) உள்ளது என்பது. அதாவது, நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களுக்கான பிரிவின் $\bar{X}_e$ஐக் கணக்கிடுவோம்: எல்லாப் பொருள்களுக்கும் பொதுவான சராசரி 61·986567; இதைவிட நீடிக்காத பொருள்களின் சராசரியானது (58·196040) 3·790527 குறைவாக உள்ளது. மேற்கூறிய இரண்டு கொள்கைகளுக்கேற்ப நோக்கின், நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களின் சராசரி, எல்லாக் கச்சாப் பொருள்களின் சராசரியைவிட (47·425373) இதே அளவில் (3·790527) குறைவாக இருக்கவேண்டும். அதாவது, எதிர்பார்க்கப்படுகிற சராசரி—நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்களுக்கு—43·634846 என்று வருகிறது. இப்படியே, நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்களின் எதிர்பார்க்கப்படுகிற சராசரி (61·836339) என்பதை, எல்லாப் பொறிசெய் பொருள்களின் சராசரியிலிருந்து (65·626866), அதே மதிப்புக் (3·790527) குறைவாகக் கணக்கிடுவோம். அதே போல், ஆனல், வேறு மதிப்பான +11·601312 (= 73·587879 —61·986567) என்பதனை வைத்து, நீடிக்கும் பொருள்கள் இடம்பெற்றுள்ள மற்ற இரு பிரிவுகளின் எதிர்பார்க்கப்படுகிற சராசரிகளையும் கணக்கிடுவோம். இப்படி நாம் கணக்கிடுங்கால், முதலில் கருத்தில்

கொண்ட கொள்கைகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்று கவனிப் போம். நீடிக்காத எல்லாப் பொருள்களின் சராசரியானது, நீடித்த எல்லாப் பொருள்களின் சராசரியைவிட எவ்வளவு வித்தியாசமாக உள்ளதோ, அதே மொத்த அளவிலும் திசையிலும் (direction) தான், இவைகளின் உட்பிரிவுகளின் (உட்பிரிவிற்கான பண்பு நீடித்த—நீடிக்காத பண்புடன் தொடர்பற்றதாக இருக்கவேண்டும்) சராசரிகளுக்கும் வித்தியாசம் அமைதல் வேண்டும். இதையே வேருெரு வகையில் கூறின், H_{rc} என்ற எடுகோள்: 'பத்திகளுக்கும் வரிசைகளுக்குமுண்டான இரு பாகுபாட்டுப் பண்புகளுக்கு இடை விளைவு இல்லை' என்பதாகும்.

அட்டவணை 16-7

இடைவிளைவை நேர்முறையாகக் கணக்கிடுதலுக்கான விவரங்கள், விலைகளின் இறக்கங்கள்

1	2
நீடிக்காத கச்சாப் பொருள்கள்	நீடிக்காத பொறிசெய் பொருள்கள்
$\bar{X}_0 = 41.663366$	$\bar{X}_0 = 62.329208$
$\bar{X}_e = 43.634846$	$\bar{X}_e = 61.836339$
$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e) = -1.971480$	$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e) = +0.492869$
$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e)^2 = 3.886733$	$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e)^2 = 0.242920$
3	**4**
நீடிக்கும் கச்சாப் பொருள்கள்	நீடிக்கும் பொறிசெய் பொருள்கள்
$\bar{X}_0 = 65.060606$	$\bar{X}_0 = 75.719697$
$\bar{X}_e = 59.026685$	$\bar{X}_e = 77.228178$
$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e) = +6.033921$	$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e) = -1.508481$
$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e)^2 = 36\ 408203$	$(\bar{X}_0 - \bar{X}_e)^2 = 2.275515$

Σd^2 (இடைவிளைவு) $= (3.886733 \times 101) + (0.242920 \times 404) + (36.408203 \times 33) + (2.275515 \times 132) = 1992.5384$

ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் தனித்தனியே $\bar{X}_0$, $\bar{X}_e$ என்பவற்றைக் கணக்கிட்டபிறகு, இடைவிளைவைக் கீழ்க்கண்ட எளிய சமன் பாட்டினல் கணக்கிடுகிருேம்:

$$\Sigma d^2 \text{ (இடைவிளைவு) } = \Sigma n_i (\bar{X}_0 - \bar{X}_e)^2 \qquad (16\cdot10)$$

இங்கு n_i என்பது ஒவ்வோர் அறையிலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கைகளைக் குறிக்கும். இந்த முறையின் விளக்கங்கள் 16-7ஆம் அட்டவணையில் உள்ளன. இடைவிளைவுக்கான வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகை 1992.5384 என்று வருகிறது; இதே மதிப்பு

தான் முன்பு மீதியாகக் கணக்கிடும்பொழுதும் வந்தது என்பதனைக் கவனிக்க.

எடுகோள்களின் சோதனைகள் (Tests of Hypotheses)

670 பொருள்களின் ஒப்புமை விலைகளை (relative prices) ஆராய்வதற்காக, வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரித்துவிட்டோம். இவைகளை அட்டவணை 16-8-ல் தொகுத்துள்ளோம். ஒவ்வொன்றையும் கணக்கிடும் முறை முன்பே விளக்கப்பட்டுள்ளது. வரையற்ற டிகிரிகளைக் கணக்கிடக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் உதவும். (இங்கு r என்பது வரிசைகளையும், c என்பது பத்திகளையும் குறிக்கும்.)

வரிசைகளிடையே உள்ள வரையற்ற டிகிரிகள்			$=r-1$
பத்திகளிடையே உள்ள	,,	,,	$=c-1$
இடைவிளைவிற்கான	,,	,,	$=(r-1)(c-1)$
அறைகளிடையே உள்ள	,,	,,	$=N-cr$
மொத்தமான	,,	,,	$=N-1$

மொத்த டிகிரிகளை ($N-1$-களை) நான்கு பாகங்களாகப் பிரித்துள்ளோம்; இதற்குச் சற்று விளக்கம் தேவை. ஒவ்வோர் அறையிலும் ஒவ்வொரு டிகிரி குறைவதாலும், மொத்தம் cr அறைகள் இருப்பதாலும், அறைகளிடையே உள்ள வரையற்ற டிகிரிகள் $(N-cr)$

அட்டவணை 16-8

1926—பிப்ரவரி 1933-ல் இருந்த பொருள்களின் விலைமாற்றங்களைப்பற்றிய தகவல்கள்; மாறுபாட்டின் பிரிவுகள்
(1926 = 100)

மாறுபாட்டின் மூலம் (1)	வரையற்ற டிகிரிகள் (2)	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (3)	மாறுபாடு s^2 (4)	F (5)	$F_{.99}$ (6)
நீடிக்கும்-நீடிக்காத பிரிவுகளிடையே	1	29,463.31	29,463.31	74.9	6.68
கச்சா-பொறிசெய் பிரிவுகளிடையே	1	35,514.75	35,514.75	90.3	6.68
இடைவிளைவு	1	1,992.54	1,992.54	5.06	6.68
அறைகளுக்குள்ளே ('செய்ம்முறைப் பிழை')	666	262,059.28	393.48		
	669	329,029.88			

என்றுகிறது. இடைவிளைவை நேராகக் கணக்கிட்ட முறையை இப்பொழுது நினைவில் கொள்ளவேண்டும். தனி அறைகளுக்காக எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரிகளைக் கணக்கிட, வரிசைகளின் சராசரிகளையும் பத்திகளின் சராசரிகளையும் பயன்படுத்துகிறோம்; ஆதலால், அறைச் சராசரிகளை மதிப்பிடவும், கண்டறிந்த சராசரிகளும் எதிர்பார்க்கப்படுகிற சராசரிகளும் வித்தியாசப்படவும்—நமக்குள்ள சுதந்திரம் வரையுள்ளதாகிவிடுகிறது. ஏனென்றால், வரிசைகளிலும் பத்திகளிலுமுள்ள கூட்டுத் தொகைகள் முன்பிருந்தவாறே (கண்டறிந்த விவரங்களில்) இருக்கவேண்டும். 2×2 என்ற பாகுபாட்டில், ஓர் அறையில் ஓர் எண்ணை நம் விருப்பம்போல் அமைத்தால், மற்ற மூன்று அறைகளிலும் இருக்கவேண்டிய எண்ணிக்கைகள் தாமாகவே முடிவாகிவிடுகின்றன. 3×3 என்ற பாகுபாட்டில், ஏதாவது நான்கு அறைகளில் நாம் விரும்பிய மதிப்புகளை வைத்தால், மற்ற அறைகளில் இருக்கவேண்டிய மதிப்புகள் தாமாகவே தீர்மானிக்கப்பட்டுவிடும். மேற்கூறப்பட்ட சமன்பாடு, பொதுவான ஒரு நிலையில் ஏற்படும் வரையற்ற டிகிரிகளைக் குறிக்கிறது.

257, 258ஆம் பக்கங்களில் கையாளப்பட்ட எடுகோள்களை அட்டவணை 16-8-ல் உள்ள விவரங்களைக்கொண்டு சோதனை செய்யலாம். H_r என்ற எடுகோளுக்கான ('வரிசை சராசரிகளில் வித்தியாசமில்லை' என்பது) F விகிதத்தை $\frac{29,463\cdot31}{393\cdot48}$ என்பதிலிருந்து $74\cdot9$ என்று கணக்கிடுகிறோம். பின் இணைப்பு அட்டவணை VII-லிருந்து $n_1 = 1$, $n_2 = 666$ என்பதற்கு $F_{\cdot99}$-ன் மதிப்பு சுமாராக 6.68. கண்டறிந்த F இதைவிடப் பெரிது; ஆதலால், இச் சோதனையின் முடிவு எடுகோளுக்குப் பொருத்தமாக இல்லை. முக்கிய பின்னிறக்கத்தில் நீடிக்காத பொருள்களின் விலையிறக்கங்களுக்கும் நீடிக்கும் பொருள்களின் விலையிறக்கங்களுக்கும் வேறுபாடு நிச்சயமாக உள்ளது என்று கூறவேண்டும். இப்பொழுது H_c என்பதனைச் ('பத்திகளின் சராசரிகளில் வித்தியாசமில்லை' என்பது) சோதிக்க, பிழை மாறுபாட்டை முன்போலவே வைத்துக்கொண்டு, அதனைக் கச்சா-பொறிசெய் பொருள்களுக்கான மாறுபாட்டுடன் பொருத்தி, $F = \frac{35,514\cdot75}{393\cdot48} = 90\cdot3$ என்று கணக்கிடுவோம். இங்குள்ள வித்தியாசமும் மிகவும் சிறப்பானதே. ஆதலால், கச்சாப் பொருள்களின் விலையிறக்கங்களுக்கும் பொறிசெய் பொருள்களின் விலையிறக்கங்களுக்கும் அதிகமாக வேற்றுமை உள்ளது.

H_{rc} என்ற எடுகோளைச் ('இடைவிளைவு இல்லை' என்பது) சோதனை செய்யவும்கூட, அறைகளுக்குள்ளே உள்ள 'செய்ம்

முறைப் பிழை'யையே வைத்துக்கொண்டு இடைவிளைவுக்கான மாறு பாட்டுடன் இணைத்து, $F=\frac{1,992 \cdot 54}{393 \cdot 48} = 5 \cdot 06$ என்று கணக்கிடுவோம். இந் நிலையிலும் $F_{.99}$ என்பதன் தோராய மதிப்பு 6·68 தான்; $F_{.95}$ என்பது 3·86 ஆகும். 1 சதவீத அளவில் நோக்கினுல், எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ளவேண்டும்; அறைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டை வாய்ப்பு விதிகளாலானது என்று கொள்ளவேண்டும்; 5 சதவீத நிலையில் நோக்கின், இரு பண்புகளுக்கும் இடைவிளைவு உள்ளது என்றே முடிவு காணவேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில், சோதனை முடிவான நிலையில் அமையவில்லை என்று கூறுவது பொருந்தும்; ஆனல், இரண்டு பண்புகளுக்கும் இடைவிளைவு இருக்கக்கூடும் என்று துணிவாகக் கூறக் காரணங்கள் உள்ளன. அட்டவணை 16-6ஐக் கவனிக்கவும். வியாபாரப் பின்னிறக்கத்தினுல் ஏற்பட்ட விலையிறக்கத்தைப் பொறிசெய் பொருள்கள்—அவைகள் நீடிக்காதவை களாயினும் சரி நீடித்தவைகளாயினும் சரி—சற்றுச் சமாளித்துள்ளன (அதாவது, விலையிறக்கம் அதிகமில்லை) என்பது தெளிவாகும். M_2 என்பது M_1ஐ விடவும், M_4 என்பது M_3ஐ விடவும் சிறப்பாக அதிகமாக உள்ளன. மற்றும், நீடிக்காத பொருள் விலையிறக்கத்தை விட நீடித்த பொருள் விலையிறக்கம் குறைவாக உள்ளது.

இடைவிளைவுச் சோதனை H_{rc} என்ற எடுகோளை ஏற்பதாக அமைந்திருந்தால், அந்த மாறுபாடும் வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டும் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாடாகிவிடும். அப்பொழுது, அந்த வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகையைச் செய்ம்முறைப் பிழைக் கூட்டுத்தொகை யுடன் சேர்த்து, சற்று விரிவான ஒரு மதிப்பீட்டைப் பெறுவோம். இந்த மொத்தத்தை வரையற்ற டிகிரிகளின் மொத்தத்தினுல் வகுத்து, பிழைமாறுபாட்டைப் (error variance) பெறுவோம்.

விலை மாற்றங்களின் பல சோதனைகளின் முடிவுகளை நன்கு ஆராயுங்கால் நாம் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டியது மற் ஹென்றும் உள்ளது. பயன்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள், மாறுபாட்டு ஆய்வைப் பிழையின்றிச் செய்ய அடிப்படையான விதிகளுக்கு முற்றும் பொருத்தமாக இல்லை என்பதே. (இதே அதிகாரத்தின் பின்பகுதிகளைப் பார்க்க.) முதல் இரண்டு எடுகோள்களைப்பற்றிய மட்டில்—இரு பண்புகளைப்பொறுத்தமட்டில்—முடிவில் உறுதியின்மை ஒன்றும் இல்லை. காணப்பட்ட வித்தியாசமானது, வெகு சிறப்பாகவே உள்ளது. இடைவிளைவுச் சோதனையில்மட்டும் ஊக அளவை யானது தீர்வு கட்டமான (critical) அளவிற்கு அருகில் இருக்கிறது. இதுபோன்ற நிலைகளில்தான் கவனம் அதிகம் வேண்டும்; விவரங் கள் அடிப்படை விதிகளுக்கு முழுவதும் பொருத்தமாக இல்லாவிட் டால், முடிவுகளைக் கூறும்பொழுது நாம் மிகவும் எச்சரிக்கையாக

இருத்தல் வேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் இறுதியாகச் சொல்லக்கூடியது இடைவிளைவு இருக்கலாம் என்று கூறக் காரணங்கள் உள்ளதால், இதைப்பற்றிய ஆராய்ச்சிகளைத் தொடர்ந்து நடத்திப் பார்க்கவேண்டும் என்பதுதான்.

சுழல் தோரணியின் ஒரு சோதனை
(A Test of a Cyclical Pattern)

கண்டறிந்த விவரங்களைப் பத்திகளிலும், வரிசைகளிலுமாகப் பாகுபடுத்தும்பொழுது, ஒவ்வோர் அறையிலும் ஒரே ஓர் உறுப்பு வருவதும் உண்டு. இந்த நிலையில் நமக்கு 'அறைகளுக்குள்ளே' வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை கிடைக்காது; ஆதலால், செய்ம்முறை பிழைக்கான அளவும் கிடைக்காது. பொருளாதார, மற்றும் தொழில் முறை ஆராய்ச்சிகளில்— பருவகால வேற்றுமைகளை ஆராயும்பொழுதும், சுழல் அசைவுகளின் (cyclical movement) தோரணியை ஆராயும்பொழுதும், இதுபோலவேதான் விவரங்கள் அமையும். அட்டவணை 16–9-ல் உள்ள விவரங்கள், 12ஆம் அதிகாரத்திலுள்ளவைகளிலிருந்து சற்றே மாற்றி அமைக்கப்பெற்றவை.[11] இதுபோன்ற நிலையில் சோதனையின் விளக்கம் இந்த அட்டவணையிலிருந்து தரப்படும்.

12ஆம் அதிகாரத்தில் இந்த விவரங்களின் தன்மையும் பொருளும் விளக்கப்பட்டன. இங்கு அதனைச் சுருங்கக் கூறுவோம். ஆகஸ்டு 1904-ன் தாழ்விலிருந்து (trough), ஜூன் 1908-ன் தாழ்வுவரை உள்ள தொழில் சுழற்சியில் ஒன்பது கட்டங்கள் (stages) உள்ளன. இந்த ஒன்பது கட்டங்களின் சரக்குடன் மைல்களை அட்டவணை 16-9-ன் முதல் வரிசையில் காணலாம். ஒவ்வொரு தொழில் சுழற்சியிலுள்ள எல்லா மாதச் சராசரிகளின் விகிதங்களாக மாதாந்தரச் சரக்கு டன்-மைல்களைத் தந்துள்ளோம். முதல் கட்டத்திலுள்ளது ஒரு தாழ்வு (trough); அடுத்த மூன்று கட்டங்களும் (II-லிருந்து IVவரை) விரிவடை தோற்றங்கள் (phases of expansion); பிறகு முகட்டிலிருந்து (Vஆம்படி) மூன்று கட்டங்கள் சுருங்கும் தோற்றம் (VI படியிலிருந்து VIIIவரை); கடைசியாக (படி IX) வருவது முடிவடையும் தாழ்வு—இவைகள்தாம் ஒரு தொழில் சுழற்சியின் ஒன்பது கட்டங்கள். சாதாரணமாக, ஒரு தாழ்விலிருந்து முகட்டிற்கு ஏற்றமிருக்கும்; முகட்டிலிருந்து முடிவான தாழ்விற்கு இறக்கமிருக்கும். ஆனால், சுழற்சிக்குச் சுழற்சி இவைகளின் தோரணி (pattern) மாறும். அட்டவணை 16-9-ன் கடைசி வரியில்

[11] அட்டவணை 12-7-ல் கட்டச் சராசரிகள் (stage averages) ஒரு தசமாஸ்தானத்திற்குத் தோராயமாகவுள்ளன; இங்கு அவைகளை முழு எண் தோராயமாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆதலால், கட்டச் சராசரிகளின் மதிப்புகள் சிறிது வேறுபட்டிருக்கும்.

அட்டவணை 16-9

அமெரிக்க ரெயில்வே சரக்கு டன்-மைல்கள் ;* குறிப்புச் சுழல் ஒப்புமைகளின் சராசரிகள்; சுழல் கட்டங்களுக்கு

சுழற்சி எண்	முடிவடை தாழ்வுகளின் தேதி விவரங்கள்	கட்டத்தில் சுழற்சி ஒப்புமைகளின் கட்டச் சராசரிகள் I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	மொத்தம்	சராசரி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
1	ஆகஸ்டு 1904—ஜூன் 1908	83	88	99	106	117	116	106	96	95	906	100.67	92,292
2	ஜூன் 1908—ஜனவரி 1912	85	90	93	101	103	106	103	104	107	892	99.11	88,894
3	ஜனவரி 1912—டிஸம்பர் 1914	91	94	96	102	111	106	101	96	92	889	98.78	88,175
4	டிஸம்பர் 1914—ஏப்ரல் 1919	74	86	101	111	114	113	106	94	96	895	99.44	90,447
5	ஏப்ரல் 1919—செப்டம்பர் 1921	93	95	102	101	113	111	106	82	87	890	98.89	88,898
6	செப்டம்பர் 1921—ஜூலை 1924	85	87	87	112	120	111	106	102	98	908	100.89	92,872
7	ஜூலை 1924—டிஸம்பர் 1927	86	94	99	104	106	106	102	100	96	893	99.22	88,941
8	டிஸம்பர் 1927—மார்ச்சு 1933	115	118	124	126	127	116	90	66	63	945	105.00	104,411
9	மார்ச்சு 1933—மே 1938	74	88	91	116	127	119	106	94	91	906	100.67	93,600
10	மே 1938—அக்டோபர் 1945	51	61	96	134	135	137	133	116	111	974	108.22	113,954
11	அக்டோபர் 1945—அக்டோபர் 1949	99	97	106	106	104	96	93	82	77	860	95.56	83,016
	மொத்தம்	936	998	1,094	1,219	1,277	1,237	1,152	1,032	1,013	9,958		1,025,500
	சராசரி	85.09	90.73	99.45	110.82	116.09	112.45	104.73	93.82	92.09		100.59	

* நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனமிக் ரிஸர்ச் (National Bureau of Economic Research) என்ற நிறுவனத்தாரின் அனுமதியைப் பெற்று வெளியிடப்பட்டவை.

சுழற்சிக் கட்டங்களின் சராசரிகளைக் காணலாம். இவைகள், சாதாரணத் தொழில்களில் ஒரு சுழற்சி இருக்கும்பொழுது இங்குக் கருதப்படும் தொடர்கள் (டன்-மைல்கள்) எவ்வாறு மாறுதல் அடைகின்றன என்பதை எடுத்துக்காட்டும். முதல் (I) கட்டத்திலிருந்து ஐந்தாம் (V) கட்டம்வரை ஓர் திட்டமான ஏற்றமுள்ளது; அவ்வாறே, நடுவில் எந்தவிதமான வேறுபாடுமின்றி, (V) ஐந்தாம் கட்டத்திலிருந்து ஒன்பதாம் (IX) கட்டம்வரை ஓர் இறக்கமுள்ளது என்பது தெரிகிறது. ஆனால், இங்கும் பொதுவாக எந்தப் புள்ளியியல் பிரச்சினையிலும் நாம், இதுபோன்ற தோரணி பொருட்படுத்தும் அளவிற்குச் சிறப்பானதா என்பதை ஆராயவேண்டும். முதல் கட்டத்திலுள்ள சராசரிகள் 51-லிருந்து 115 வரை உள்ளன; அதுபோலவே இரண்டாம் கட்டத்தில் 61-லிருந்து 118 வரை; ஆறும் கட்டத்தில் 96-லிருந்து 137 வரை; ஒன்பதாம் கட்டத்தில் 63-லிருந்து 107 வரையுள்ளன. இது ஒழுங்கான ஒரு தோரணியாகாது என்பதை வலியுறுத்த வேண்டியதில்லை. வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டும் இத்தகைய விவரங்கள் கிடைக்கக்கூடுமா என்பதனை ஆராய்ந்து முடிவுகாணும் வரைக்கும், இதை நாம் சிறப்பானது என்று ஒத்துக்கொள்ள மாட்டோம்.

நாம் முக்கியமாக ஆராயப்போவது அட்டவணையின் இறுதி வரிசையிலுள்ள ஒன்பது கட்டச் சராசரிகளையே. சரக்கு டன்-மைல்களுக்கும் (freight ton-miles) சாதாரணமாகத் தொழில் சுழற்சியின் ஏற்றவிறக்கங்களுக்கும் ஒருவிதத் தொடர்பும் இல்லையென்றால், இந்த ஒன்பது சராசரிகளும், மாதிரிப் பிழை எல்லைகளுக்குள் சமமாக இருத்தல்வேண்டும். அதாவது, சரக்கு டன்-மைல்களைப் பாதிக்கும் பலவாறான ராண்டம் காரணங்களால் எப்படி இவைகள் வித்தியாசப்படுமோ, அதுவரையில்தான் சமநிலையிலிருந்து மாறுக அமையும். இப்பொழுது பிழை மாறுபாட்டின் ஓர் அளவைதான் நமக்குத் தேவை; அது கிடைத்தால், அதனை ஒன்பது சராசரிகளுடன் தொடர்ப்படுத்தி, இவைகளில் உள்ள ஒரு வெளிப்படையான சுழல் மாற்றங்களின் சிறப்பு வேற்றுமையைச் சோதனை செய்யலாம்.

இங்கும், வட்டிவீதங்கள் எடுத்துக்காட்டிலுள்ளவாறு பத்திகளுக்குள் இருக்கும் மாறுபாட்டைக் கணக்கிட்டு, அதனைப் பிழை மாறுபாடாகக் கொள்ளலாம் என்று தோன்றலாம் (அட்டவணை 16-3). ஆனால், வட்டிவீத விவரங்களுக்கும், சரக்கு டன்-மைல் விவரங்களுக்கும் ஒரு முக்கியமான வேற்றுமையுள்ளது. வட்டிவீத விவரங்களில் ஒவ்வொரு பத்தியிலுமுள்ள விவரங்கள் ராண்டம் முறையில் அமைந்தவை; சரக்கு டன்-மைல்களில் விவரங்கள் காலவாரியாக (chronological) அமைந்தவை. அட்டவணை 16-9-ல் நாம் இருவகையில் விவரங்களைப் பாகுபாடு பண்ணியுள்ளோம். வரிசைவழியில்

நோக்கின், பாகுபாடு காலத்தையொட்டியுள்ளன; பத்திகளின் வழியில் நோக்கினுல், சுழற்சிக் கட்டங்களையொட்டி விவரங்கள் உள்ளன. அதாவது, பத்திகளில் 9 பகுப்புகளும், வரிசைகளில் 11பகுப்புகளுமாக மொத்தத்தில் 99 அறைகள் உள்ளன. ஆனுல், இந்த 99 அறைகளிலும், அறைக்கு ஒன்ருகவே விவரங்கள் அமைந்துள்ளன. முன்பே கூறியதுபோல், நமக்கு 'அறைகளுக்குள்ளே' யான பிழை மாறுபாட்டு அளவு கிடைக்காது. ஆதலால், வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மூன்று பிரிவுகளாகத்தான் பிரிக்கமுடியும்; விலைகள் எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதுபோல் (அட்டவணை 16-6) நான்காகப் பிரிக்கமுடியாது. இம் மூன்று பிரிவுகளையும் கணக்கிட்டு, அதற்குப் பிறகு பிழைமாறுபாட்டினை எந்த முறையில் சிறப்பாகக் கண்டுபிடிப்பது என்பதைச் சிந்திப்போம்.

அட்டவணை 16-10-ல் வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையையும், அதற்கான வரையற்ற டிகிரிகளையும் காணலாம். இதனைக் கண்டுபிடித்தலும், மற்றப் பிரிவுக் கூட்டுத் தொகைகளைக் கண்டுபிடித்தலும் நேர்வழியைச் சேர்ந்தவைகளே. சூத்திரம் (16.9) என்பது பொதுப்படையான சமன்பாட்டைத் தருகிறது:

$$\Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - T^2/N.$$

அட்டவணை 16–9-லிருந்து தகுந்த விவரங்களைப் பொருத்தினுல்,

$$\Sigma(X - \bar{X})^2 = 1,025,500 - 9,958^2/99 = 23,866$$

என்ற மொத்தக் கூட்டுத் தொகை வரும்.

பத்திகளிடையே உள்ள வேற்றுமையைக் கணக்கிட, ஒவ்வொரு பத்தியின் சராசரியிலிருந்து மொத்தச் சராசரியின் வித்தியாசத்தைக் கண்டுபிடித்து, அதனை இருபடியாக்கி, பத்தியிலுள்ள விவர எண்ணிக்கைகளினுல் நிறையிட்டு, அவைகளின் மொத்தத்தை அறிகிறேம். ஆக Σd_c^2 என்பதனை அந்த அளவைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தினுல்,

$$\Sigma d_c^2 = 11(85{\cdot}09 - 100{\cdot}59)^2 + 11(90{\cdot}73 - 100{\cdot}59)^2 + \ldots$$
$$11(92{\cdot}09 - 100{\cdot}59)^2$$

$= 10,555{\cdot}0962$* என்று கிடைக்கிறது.

* மாருன ஒரு முறை (16.9) என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இந்தக் கணக்கிடுதலை எளிதாக்கும். பத்திச் சராசரிகளை X_i என்றும், அலைவெண்களை n_i என்றும் குறித்தால்:

$$\Sigma d_c^2 = \Sigma(n_i \bar{X}_i^2) - T^2/N$$ என்று வரும்,

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்திலுள்ள முதற் கோவையை, ஒவ்வொரு பத்திச் சராசரியின் வர்க்கத்தைக் கணக்கிட்டு, அதனை அந்தப் பத்தியிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கி, கூட்டுத் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கிறேம். இரண்டாம் கோவையானது; மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிட உதவியதும் முன்பே கண்டுபிடிக்கப்பட்டதும் ஆகும்.

அதுபோலவே, சுழற்சிச் சராசரிகளினிடையே உள்ள வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் கணக்கிடுவோம். இது வரிசைச் சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் Σd_r^2 என்று குறிக்கலாம்.

$$\Sigma d_r^2 = 9(100{\cdot}67 - 100{\cdot}59)^2 + 9(99{\cdot}11 - 100{\cdot}59)^2 + \ldots 9(95{\cdot}56 - 100{\cdot}59)^2$$
$$= 1{,}031{\cdot}6214.$$

Σd_c^2 என்பதனையும், Σd_r^2 என்பதனையும் கூட்டி மொத்தக் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து கழிக்க, மீதி 12,279·2824 என்று வரும் (16-10ஆம் அட்டவணையைப் பார்க்க). இம் மூன்று பிரிவுகளினது மாறுபாடுகளின் தன்மையை நோக்குவோம்.

அட்டவணை 16-10

சரக்கு டன்-மைல்களின் மாறுபாட்டு ஆய்வு; குறிப்புச் சுழல் தோரணியின் சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம் (1)	வரையற்ற டிகிரிகள் (n) (2)	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (3)	மாறுபாடு (4)	F (5)	$F_{\cdot 99}$ (6)
சுழற்சிக் கட்டங்களின் சராசரிகளினிடையே	8	10,555.0962	1,319.39	8.60	2.74
சுழற்சிச் சராசரிகளினிடையே ...	10	1,031.6214	103.16		
மீதி	80	12,279.2824	153.49		
மொத்தம் ...	98	23,866.0000			

சுழற்சிக் கட்டங்களின் சராசரிகளினிடையே உள்ள மாறுபாடு—பத்திகளினிடையே உள்ளது—வாய்ப்பு விதிகளினல் உண்டாகும் மாற்றத்தைக் குறிக்கலாம். ஆனல், சரக்கு டன்-மைல்கள், சாதாரண தொழில் சுழற்சிகளால் பாதிக்கப்படுமாயின், இச் சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்கள், தொழில் சுழற்சியினலும் ஏற்பட்டிருக்கக் கூடும். இந்த உதாரணத்தில் நாம் பார்க்கவேண்டிய சூனிய எடுகோள் பத்திச் சராசரிகளிடையே வித்தியாசங்கள் இல்லை என்பது தான். சுழற்சிச் சராசரிகளினிடையே உள்ள மாறுதல்கள்—16-9 அட்டவணையில், 11 வரிசைகளினிடையே உள்ளது—இந்த உதாரணத்தில், யதேச்சையான (arbitrary) காரணமொன்றினல் ஏற்பட்டவை. ஒவ்வொரு சுழற்சியிலும், கட்டச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அந்தந்தக் கட்டத்திலுள்ள மாதங்களால் நிறையாக்கி, சராசரியைக் கண்டுபிடித்திருந்தால், அதன் மதிப்பு 100 ஆகத்தான் இருக்கவேண்டும். [குறித்த ஒரு கட்டத்திலுள்ள மாதச் சுழல்

ஒப்புமைகளைச் (relatives) சராசரியாக்கி, அந்தச் சுழல் கட்டத்தின் சராசரியைமுதலில் கணக்கிட்டோம்; இந்த ஒப்புமைகளின் அடிப்படை (base) அந்தச் சுழற்சியின் மாத விவரங்களின் சராசரியாகும்.] சாதாரணமாக இந்த முறையில் நிறையிடாத சராசரிகள் தாம் பயன்படுத்தப் படும். அதனையொட்டியே நாமும் பத்திச் சராசரிகளைக் கண்டு பிடிக்க நிறையிடப்படாத கட்ட அளவைகளைப் பயன்படுத்தியிருப்ப தால், அதே முறையில், சுழற்சிச் சராசரிகளைக் கணக்கிடவும் நிறை யிடப்படாத அளவைகளையே கையாளவேண்டும்.[12] ஆகவே சுழற்சிச் சராசரிகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டை உண்டாக்கிய இந்த யதேச்சையான காரணியின் விளைவுகளையும் கழித்து, பிறகு பிழை மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இந்தப் பிரிவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் சுழற்சிப் படிகளுக்கான கூட்டுத் தொகை யையும் வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து கழிக்க, நமக்கு மீதியான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 12,279·2824 என்று வருகிறது; இதற்கு ஒத்த வரையற்ற டிகிரிகள் 80 ஆகும்.

வித்தியாசப்பட்ட விலைகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியில் (அட்டவணை கள் 16-6, 16-8) கருதப்பட்ட இடைவிளைவும் இந்த மீதி மாறு பாடும் ஒரே வகையைச் சார்ந்தவைகளே. அந்த ஆராய்ச்சியின் இடைவிளைவைப்போலவே, இதுவும் வாய்ப்பு விதிகளால்மட்டு மன்றி, இரு பாகுபாட்டுப் பண்புகளுக்கிடையே இருக்கக்கூடிய தொடர்புகளாலும் வித்தியாசப்படும். இரு பண்புகளும் தொடர் பற்றவை என்று எடுத்துக்கொண்டால்மட்டும்தான், இந்த மீதியை பிழை மாறுபாட்டைக் கணக்கிடப் பயன்படுத்தலாம். இரு பண்பு களிடையே எந்தவிதமான தொடர்பு இருப்பினும், அது இந்த உதாரணத்தில் சரக்கு டன்-மைல்களின் சுழற்சித் தன்மை, காலம் செல்லச்செல்ல மாறிக்கொண்டு வருகிறது என்பதனைக் குறிக்கும். அதுபோன்ற படிப்படியான முன்னேற்றம் இருப்பின், அவற்றின் விளைவுகள் மீதிக் கூட்டுத் தொகையில் இடம்பெறும். இவைகள் ராண்டம் விளைவுகள் அல்லாதவையாதலால், இவைகளை உட் கொண்ட மீதிக் கூட்டுத் தொகையும், பிழை மாறுபாட்டைக் (error variance) கணக்கிட உதவாது. விலைகள் எடுத்துக்காட்டில் (அட்டவணை 16-6) இரண்டு பண்புகளிடையே தொடர்புள்ளதா என்பதனைச் சோதிக்க முடிந்தது; ஏனென்றால், அந்த எடுத்துக் காட்டில் அறைகளுக்குள்ளே இருக்கும் மாறுபாட்டைக் கணக்கிட்டு அதனைப் பிழை மாறுபாடாக அமைக்க முடிந்தது. இங்கு அது

[12] நிறையிட்ட கட்டச் சராசரிகளைக் கொண்டே பத்திச் சராசரிகளையும் வரிசைச் சராசரிகளையும் கணக்கிடுதல் சாத்தியமே. அப்பொழுது கிடைப்பது சிறிது மாறுபட்ட சுழற்சித் தோரணியாகும். ஒரு சுழலானது காணும் ஒரு தனி அலகாகும்; சுழல்கள்—அவைகளின் காலம் எவ்வாறாக இருப்பினும்—எல்லாம் ஒரேவித முக்கியத்துவம் உடையவை; இந்த இரண்டு காரணங்களுக்காகத்தான், நாம் நிறையிடாத சராசரிகளையே பயன்படுத்துகிறோம்.

போன்ற வசதியில்லாததால், பகுத்தறிவு வழியில், மற்றச் சான்று களைக்கொண்டு, மீதியானது ஏற்கக்கூடிய பிழை மாறுபாட்டினைக் கணக்கிட உதவுமா என்பதனை முடிவு செய்யவேண்டும். நேஷனல் பியூரோவின் பல ஆராய்ச்சிகளின் முடிவை இங்கு நாம் கவனிக்க லாம். சுழல் தோரணிகளில், படிப்படியான பன்னெடுங்கால மாற் றங்கள் (progressive secular changes) குறித்த சில வேளைகளில் இருப்பதுண்டு. ஆனால், அமெரிக்கப் பொருளாதாரத் தொடர்ச்சி களில் (American Economic Series) அவைகள் பெரும்பாலும் இல்லை[13] என்பதுதான் அது. ஆதலால், இந்த எடுத்துக்காட்டில், இடைவிளைவு இருப்பின் அது மிகக் குறைவானது என்றும், மீதி யானது செய்ம்முறைப் பிழையின் அளவைக் கணக்கிட உதவும் என் றும் முடிவுகட்டுவது சரியாகும் என்று துணியலாம்.

மாறுபாட்டின் விகிதத்தைக் கணக்கிட, படிகளினிடையே உள்ள மாறுபாட்டை, பிழை மாறுபாட்டினால் வகுத்து (இதனை மீதியிலிருந்து கண்டுபிடித்தோம்), $F = 1,319{\cdot}39/153{\cdot}49 = 8{\cdot}60$ என்ற முடிவைக் காண்கிறோம். $n_1 = 8, n_2 = 80$ என்ற நிலையில் $F_{.99}$-ன் மதிப்பு 2·74 என்பதாகும். முடிவுகள், பத்திச் சராசரிகளினிடையே சிறப்பான வித்தியாசங்கள் இல்லை என்ற எடுகோளிற்கு ஒத்தனவாக இல்லை. சரக்கு டன்-மைல்களில் ஒருவகைச் சுழல் தோரணியின் அமைப்பு உண்மையாக உள்ளது என்பதுதான் நம் முடிவு.[14]

பருவகாலப் போக்குகளில் தோன்றும் ஒரு தோரணி சிறப் பானதா (சிக்னிபிஃக்கென்டானதா) என்பதனைச் சோதிக்கவும் இதேபோன்ற சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம் என்பது தெளிவு. இங்கும் பருவகாலவாக்கில் படிப்படியான மாற்றங்கள் ஏற்பட்டு, உண்மையான ஓர் இடைவிளைவு நிகழக்கூடும். அதுபோன்ற இடை விளைவு வலுவுள்ளதாக அமைந்தால், மீதி மாறுபாட்டில் பெரிதான பங்கு அதனுடையதாகும்; அப்பொழுது அது பிழை மாறுபாட்டைக் கணக்கிடப் பொருத்தமற்றதாகிவிடும். இடைவிளைவு ஏற்படக்கூடிய சூழ்நிலை, சுழல் தோரணிகளிடையே இருப்பதைவிடப் பருவகாலத்

[13] பர்ன்ஸ், மற்றும் மிச்செல் (Burns and Mitchell) ஆகியோர் நூலின் (து.நா.ப. 13) 10ஆம் அதிகாரத்தையும், அதே நூலின் 412-413ஆம் பக்கங் களிலுள்ள முடிவுகளையும் பார்க்க.

[14] மாறுபாட்டுச் சோதனையினால் கண்டறிந்த இந்த முடிவிற்கு வர, இதைவிட உறுதியான சான்று உள்ளது என்பதனையும் சுட்டிக்காட்டுவோம். கட்டச் சராசரிகளிடையே வித்தியாசங்கள் உள்ளன என்பதுமட்டுமன்று; அந்த வித்தி யாசங்களில் ஒருவகை முறையும் உள்ளது—Iஆம் கட்டத்திலிருந்து, Vஆம் கட்டம்வரை ஏற்றமும், Vஆம் கட்டத்திலிருந்து IXஆம் கட்டம்வரை இறக்கமும் உள்ளன. கட்டச் சராசரிகளிடையே உள்ள மாறுபாடு, சமநிலையினின்று எவ் வாறான மாறுதல்களையும் குறிக்கலாம். ஆனால், இவ்வகை மாற்றம் ஒரு முறைப்படி (systematic) இருக்குமாயின், பகுத்தறிவு முறையில் அமையுமாயின், ஆராய்ச்சியாளருக்கு இச் சிறப்பான மாற்றத்தின்மீது இருக்கும் நம்பிக்கையானது, மாறுபாடுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதனால் வருவதைவிட உறுதியுறும்.

தோரணிகளிடையே அதிகமாக இருக்கும்; பல தொடர்ச்சிகளில் பருவகாலப் போக்குகள் காலவாக்கில் மாறுதல் அடையும்; சுழற்சிப் போக்குகள் அவ்வளவாக மாறுதல் அடையாது.

காலத் தொடர்வரிசைகளில் (time series) ஊக அளவைச் சோதனைகளைப் பயன்படுத்துதல் ஐயத்துக்கிடமான முறை என்பதனை முன்பே கூறியுள்ளோம். அந்த நிலைகளில், மயிரிழை அளவில் முடிவு செய்வது இயலாதென்பது உண்மையே; ஏனென்றால், நிஜமான ராண்டம் வழியிலும் சார்பற்ற முறையிலும் விவரங்கள் அமைந்திருக்க மாட்டா. ஆனால், இங்கு விளக்கப்பட்ட உதாரணத்தில், ஏற்கத்தகுந்த முடிவைக் காண்பதற்கான சூழ்நிலை உள்ளது. அடிப்படை விதிகளைத் திட்டமாக மீறியிருப்பதாகக் கூற முடியாது (அடுத்த பகுதியைப் பார்க்க). படி சராசரிகளால் ஏற்பட்டுள்ள தோரணியானது ஒழுங்கான முறையுடனும், பகுத்தறிவிற்கு உட்பட்டும் அமைந்துள்ளது; கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பானது $F_{.99}$ என்பதன் மதிப்பைவிட வெகு அதிகமாகவுள்ளது.

மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகளைப் பயன்படுத்தக்கூடிய பல எடுத்துக்காட்டுகளைச் சென்ற பக்கங்களில் தந்துள்ளோம். அடுத்த அதிகாரத்தில் இதே முறைகளைத் தொடர்பையும் தொடர்புப் போக்கையும் (regression) ஆராயக்கூடிய முறைகளைப் பொதுப்படையாக்கவும், அவற்றிற்கு உதவும் கருவிகளைத் திட்பமுடையனவாகச் செய்யவும் பயன்படுத்துவோம். சென்ற எடுத்துக்காட்டுகளை மனத்தில் வைத்துக்கொண்டு, இப்பொழுது மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்துவதற்கு, விவரங்களில் இருக்கவேண்டிய சில விதிகளைப்பற்றிச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம்;[15] மற்றும் இவற்றுடன் தொடர்புடைய சில சிறப்புக் கூறுகளைப்பற்றியும் சொல்வோம்.

மாறுபாட்டு ஆய்வில் சில ஆதாரக் கோட்பாடுகள்

செய்ம்முறைப் பிழைகள் நார்மல் பரவலில் அமையவேண்டும்

மாறுபாட்டு விகிதத்தின் விகுதியின் (denominator) வேலையை நாம் முன்பே வலியுறுத்தியுள்ளோம். இது ஒரு பிழை மாறுபாடாகும் (error variance); வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்படக்கூடிய மாற்றங்களை அளக்கும் பிழை மாறுபாட்டை எந்த மாதிரிகளிலிருந்து கணக்கிடுகிறோமோ, அந்த மாதிரிகள் நார்மல் பரவலில் அமைந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவையாக இருக்க வேண்டும்; இது ஓர் அடிப்படைக் கருத்தாகும். அட்டவணை 16-3-ல்

[15] இந்த அடிப்படைக் கருத்துகளைப்பற்றிய விளக்கங்களை ஈஸன்ஹார்ட் என்பவரின் நூலில் காண்க (து.நூ.ப. 33).

உள்ள எடுத்துக்காட்டில், நாம் வட்டிவீதங்களைச் சிறு தொழிலதிபர்கள் (வாங்கும் கடன்களின் வட்டி வீதங்கள்), நடுத்தரத் தொழிலதிபர்கள், பெரும் தொழிலதிபர்கள் என்று பாகுபடுத்திப் பிழை மாறுபாட்டைப் 'பிரிவுகளுக்குள்ளே'யுள்ள வேற்றுமைகளிலிருந்து கணக்கிட்டோம். மேற்கூறிய விதி இங்குப் பொருந்தவேண்டுமாயின், இம் மூன்று மாதிரிகளும் ஒரு நார்மல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்கவேண்டும். அதுபோலவே, தொடர்பு விலைகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டில் (அட்டவணை 16-6), ஒவ்வோர் அறையிலுள்ள விவரங்கள் எல்லாம் நார்மல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவைகளாக இருக்கவேண்டும். சோதனை முழுவதும் திருத்தமாக அமைய இந்த விதி அவசியம் என்பது உண்மையே; ஆனால், இதையே ஒரு முடிவான விதியாகக் கொள்ளவேண்டியதில்லை என்பது ஒரு நல்ல செய்தியாகும். நார்மல் பரவலாக அமையாவிட்டாலும், முற்றும் கோட்டமான பரவலையொத்ததாக இல்லாவிடில், சோதனைகளில் நிகழக்கூடிய தவறு அதிகமாகவிருக்காது—இவ்வாறு டபிள்யூ.ஜி. காக்ரான் (W.G. Cochran, து.நூ.ப. 18) என்பவர் நார்மல் அல்லாத பற்பல ஆராய்ச்சிகளை ஆழ்ந்து நோக்கி முடிவு கூறியுள்ளார். சாதாரணமாக, F அட்டவணையிலிருந்து 1 சதவீதம் சிறப்பு அளவில் சோதனையைச் செயல்படுத்தும்பொழுது, முழுமைத் தொகுதி நார்மல் பரவலாக இல்லாவிட்டால், அந்த ஊக அளவை $\frac{1}{2}$ சதவீதத்திலிருந்து 2 சதவீதம் வரை அமையலாம் எனத் தோராயமாகவைத்துக்கொள்ளலாம் என்றும் அவர் கருதுகிறார். 5 சதவீத அட்டவணை அளவிற்கு, உண்மையான ஊக அளவை 4-லிருந்து 7 வரை என்று வைத்துக்கொள்ளலாம். அதாவது, ஒரு சோதனை நமக்கு 5 சதவீத அளவில் சிக்னிஃபிக்கென்டாக அமைகிறது என்று எண்ணுவோம்; விவரங்கள் நார்மலாக இருக்கிறது என்று திட்டமாகக் கூற முடியவில்லை என்றும் கருதுவோம். அப்பொழுது மேற்கூறிய தோராயப்படி ஊக அளவை 7 சதவீதமாகவும் இருக்கமுடியும் என்று தெரிகிறது. ஆகையால், நாம் அட்டவணையின் 7 சதவீத அளவைக்கொண்டு, காணப்படும் வித்தியாசம் உண்மையானதுதான் என்று எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்தால், தவறு செய்தவராவோம். அதாவது, உண்மையாகப் பொருட்படுத்தும் அளவில் இல்லாதவைகளை இருக்கிறது என்று கொண்டுவிட்டாற்போலாகும். ஆகவே, நார்மல் பரவல் விதி பொருந்துமா என்ற கேள்வி எழுமாயின், சற்று நிதானித்து முடிவு செய்வது நல்லது; பொருட்படுத்தும் (சிக்னிஃபிக்கென்ட்) அளவையும் தேவையைவிடச் சற்று அதிகமாகக் கருதுதல் நலம்.[16]

[16] *மாறுபாட்டு ஆய்வில் நார்மல் அல்லாத விவரங்களை எப்படி ஆராய்வது என்ற பிரச்சினைகளைப்பற்றிய விளக்கத்திற்கு, கெண்டால் (Kendall) என்பாரின் நூலைப் பார்க்க (து.நூ.ப. 78, II, 205—15).*

செய்ம்முறைப் பிழைகள், அவைகளின் மாறுபாடுகளின் ஒரே படித்தானவைகளாக இருக்கவேண்டும் (Experimental Errors should be Homogeneous in their Variances)

பல பிரிவுகளிலிருந்தோ, அல்லது அறைகளிலிருந்தோதான், பிழை மாறுபாட்டை (மாறுபாட்டு விகிதத்தின் விகுதியிலுள்ளது) சாதாரணமாகக் கணக்கிடுகிறோம். அட்டவணை 16–3-ல் மூன்று பிரிவுகளிலிருந்து மொத்தமாக்கிப் பிழை மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடித்தோம்; அட்டவணை 16–6-ல் நான்கு அறைகளிலிருந்து கிடைத்தது. இதுபோன்று பல பகுதிகள் ஒரே வேற்றுமையின் தோற்றங்களாக அமைந்தால் இந்த விதி பொருந்தும் என்று கூறலாம். [நுட்ப முறையில் கூறின் பிழை மாறுபாடு எந்தெந்த வரிசைகளிலிருந்தோ, பத்திகளிலிருந்தோ அல்லது அறைகளிலிருந்தோ கணக்கிடப்படுகிறதோ அவைகள் யாவும் ஹோமோஸ்கெடெஸ்டிக்காக (homoscedastic) இருக்கவேண்டும்.] வாய்ப்பு விதிகளினால் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாட்டை அளக்கும் கருவியாகப் பிழை மாறுபாட்டைக் கருதவேண்டுமானால், அது இந்த் விதியை ஒத்திருக்கத்தான் வேண்டுமென்பது தெளிவு. ஏனென்றால், ராண்டம் காரணங்கள் எல்லாப் பிரிவுகளிலேயும் ஒருவாறாகத்தான் அமைந்திருக்க வேண்டும்; அப்பொழுதுதான், பிரிவு மாறுபாடுகளை ஒன்றாக்கி அக் கூட்டுத் தொகையைப் பிழை மாறுபாடாகக் கருதமுடியும். பிழை மாறுபாட்டுக் கணக்கிடலில் இடம் பெறும் ஒவ்வோர் உறுப்பு அல்லது விவரமும், ஒரே வகையான ராண்டம் மாறுதலுக்குட்பட வேண்டும். இங்கும், இந்த விதி எப்பொழுதும் பொருந்திதான் இருக்கவேண்டும் என்று வலியுறுத்திதான் ஆகவேண்டும் என்பதில்லை. பிழை மாறுபாட்டின் பிரிவுகளிடையே வேற்றுமைகள் பெரிய அளவில் இருந்தால், சோதனைகள் சரியாக அமையா என்பது நிச்சயம். ஆனால், ஒருபடித்தான நிலை சற்றே குறைவாகவிருப்பின் சோதனைகள் பயனற்றுப் போகா என்றுதான் கூறவேண்டும். முன்பு கூறியதுபோல் சோதனைகளின் திட்பம் குறையலாமேயன்றி, சோதனைகளைச் செயல்படுத்தவே கூடாது என்பதற்கில்லை. மாற்றங்கள் பலபடித்தாகவே பிரிவுகளிலே அமைந்துள்ளன என்ற ஐயம் இருப்பின் முடிவுகளைக் கூறும்பொழுது சற்றே நிதானித்துக் கூறுதல் நல்லது. (மாறுபாடுகளின் ஒருபடித்தான தன்மையைச் சோதிக்கப் பின்பு ஒருமுறை விளக்கப்படும்.)

பாகுபாட்டிற்கான பண்புகளின் விளைவுகள் கூட்டுமுறையில் (Additive) அமையவேண்டும்

சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தும் சொற்களைக் கொண்டு கூறினால், சூழ்நி[illegible]லை விளைவுகளும் (environmental effects), நடத்துகை விளைவுகளும் ([illegible]reatment effects) கூட்டு முறையில் அமையவேண்டும்.

இந்த விதியின் பொருள், விலைகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டில் (அட்டவணை 16-7) இடைவிளைவை நேர் முறையில் கணக்கிடும் போது விளக்கப்பட்டது. அந்த உதாரணத்தில், பொறிசெய்முறை கள் பலவகைப் பொருள்களின் விலையிறக்க, ஏற்றங்களை எவ்வாறு பாதிக்கின்றன என்பதனை ஆராய்ந்தோம். ஒரு முக்கியப் பின்னிறக் கம் நிகழும்பொழுது இவைபோன்ற விளைவுகள் கூட்டுமுறையில் (அல்லது கழித்தல் முறையில்) அமையும் என்றும் கருதினோம். அதாவது, ஓர் அறையிலுள்ள விவரங்களின் சராசரியானது (ஒவ் வோர் அறையிலும் ஒரே ஒரு விவரம் இருப்பின் அதன் மதிப் பானது) கீழ்க்கண்ட நான்கு பகுதிகளால் ஏற்பட்டதாகக் கொள்ள லாம்: (1) மீதமான அல்லது ராண்டம் முறை விளைவுகள்; (2) அந்த உட்பிரிவுக்கான சூழ்நிலை விளைவுகளைக் குறிக்கும் ஓர் அளவு; (3) அந்த உட்பிரிவுக்கான நடத்துகை விளைவுகளைக் குறிக்கும் ஓர் அளவு; (4) எல்லாப் பொருள்களின் மொத்தச் சராசரி. இந்த நான்கு வகை விளைவுகளைக் கூட்டுமுறையில் கொண்டவைதான் கண்டறிந்த விவரங்கள் என்ற கொள்கை மாறுபாட்டு ஆய்வின் ஓர் அடிப்படைக் கோட்பாடாகும். கூட்டுமுறையில் இல்லாமல், பெருக்கல் முறையில் இந்த விளைவுகள் இருக்குமாயின், மேற்கூறிய செய்முறைகள் தவருன மதிப்பீடுகளைத் தருகின்ற தவருன சோதனைகளாகிவிடும். நிகழக்கூடிய மாற்றங்களே அல்லாமல், கூட்டுமுறையிலிருந்து விலகிய காரணத்தினுலும், பிழை மாறுபாட்டின் அளவு பாதிக்கப் படும். ஆனுல், கூட்டுமுறையில்லாத விளைவுகள் அதிகமாக நேரா விட்டால், மேற்கூறிய முறைகளிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகள் நல்ல தோராயங்களாக அமைந்துவிடுகின்றன [காக்ரானின் நூலைப் பார்க்க (து.நூ.ப. 18)]. விளைவுகள் பெருக்கல் முறைகளில் அமைந் திருப்பின், விவரங்களை அப்படியே கருதாமல் அவைகளின் லாகிரிதங் களைக் கொண்டு ஆய்வு நடத்தினுல், இந்தக் கூட்டு விதியும் பொருத்தமாகிவிடும்.

செய்ம்முறைப் பிழைகள் தொடர்பற்றுத் தனித்திருக்க வேண்டும் (Experimental Errors should be Independent)

ஒவ்வோர் அறையிலும் (அல்லது பிரிவிலும்) உள்ள விவரங்கள் அந்த அறையின் சராசரியிலிருந்து தொடர்பற்றும், நார்மலாகவும் அமைந்திருக்கவேண்டும். அதாவது ஓர் அறையிலுள்ள விவரங் களின் பரவலுக்கும், மற்ற அறைகளிலுள்ள விவரங்களின் பரவல் களுக்கும் தொடர்பு இருக்கலாகாது. தொடர்பு இருப்பின், மாறுபாடு களின் மதிப்பீடுகள் ஒரு சார்புற்றவைகளாகிவிடும்; சிறப்புகாண் சோதனைகளும் பழுதாகிவிடும். ஆய்வுக்காகக் கருதுகிற விவரங்களை நமக்கு வேண்டிய முறையில் பாகுபடுத்தித் திட்டமாக (design) அமைக்கக்கூடுமாயின், அவைகளைத் தொடர்பற்றவைகளாக அமைக்க ராண்டம் முறைகளைக் கையாளலாம். ஆனுல், இதுபோன்று

திட்டமாக்குவது சமூகப் பொருளாதாரத் துறைகளில் எப்பொழுதும் சாத்தியமாகாது. மேலே விளக்கிய உதாரணங்களில் சுழற்சி உதாரணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்: இங்குக் கட்டச் சராசரிகளை அமைக்க விவரங்களைப் பிரித்துள்ளோம். இதனுல் விவரங்கள் கட்டத்திற்குக் கட்டம் தொடர்பற்றவை என்று கூறலாம். ஆனுல், விலைகளிடையும் வட்டி வீதங்களிடையும் தொடர்பு இல்லையென்று சொல்வதற்கில்லை; இருக்கக்கூடிய தொடர்பின் அளவு சிறிது என்று எண்ணுகிருேம். தொடர்பு இருப்பதால், அந்த அளவிற்குச் சோதனையின் திட்டம் குறைகிறது.

சென்ற பகுதிகளில் கூறியுள்ளதைப்போல், இவ் விதிகள் சற்று ஏற்றத்தாழ்வாக அமைந்தாலும், ஆராய்ச்சியாளர் தம் சோதனைகளைச் செய்து முடிவுகள் காணலாம். ஆனுல், இதனுல் ஏற்படக்கூடிய தவறுகள் சோதனையின் திருத்தங்களைப் பாதிக்கிறது—முக்கியமாக F என்பது தீர்வுகட்டமான (critical) அளவிற்கு வெகு அருகில் அமையும்போது, அளவைகளின் அலகுகளை மாற்றி அமைப்பதால், இவ்வகை இன்னல்களைச் சில சமயம் தவிர்க்கலாம். நார்மலில்லாத விவரங்களை, லாகிரிதம்களாக மாற்றுவதால் நார்மலாகச் செய்யலாம் என்பது தெரிந்துகொள்ள வேண்டியதே. கூட்டுமுறை அமைப்பும் இதே மாற்றத்தினுல் செயல்படும். பாய்ஸான் (Poisson) பரவலின் மாறுபாட்டை நிலைத்திருக்கச் செய்ய பார்ட்லெட் (Bartlett) என்பவர் வர்க்கமூல முறையைக் கையாண்டுள்ளார். கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு மாருகத் தரங்களைப் (ranks) பயன்படுத்தி நார்மலுக்கு வெகு புறம்பாக உள்ள அளவைகளை நார்மலாக்கலாம். இவை போன்ற மற்றச் சில முறைகளையும்[17] பயன்படுத்துவதால், மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையைப் பற்பல வகை விவரங்களை ஆராய்வதற்கு உகந்ததாகச் செய்யலாம்.

அலைவெண்களின் விகிதசமங்கள் (Proportionality of frequencies): விலைகளைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டில் அறைகளிலுள்ள அலைவெண்கள் விகிதசம முறையில் அமையவேண்டுமென்பதனைக் கூறினேம். எடுத்துக்காட்டாக விளக்கப்பட்ட முறைகள், பிரிவு அலைவெண்கள் சமமாகவோ, அல்லது விகித சமமாகவோ இருக்கும் நிலைகளுக்குத்தான் பொருந்தும். அட்டவணை 16-6-லுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு விகித சமமற்ற விவரங்களால் ஏற்படும் இன்னலை விளக்குவோம். நீடிக்காத பொருள்களில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு கச்சாப் பொருள்கள்; நீடிக்கும் பொருள்களிலும் ஐந்தில் ஒரு பங்கு கச்சாப் பொருள்களே. இந்த விகிதங்கள் சமமாகவிருப்பதால், 'கச்சா'த் தன்மையானது நீடிக்காத மற்றும் நீடிக்கும் பொருள்களை ஒரே அளவில் பாதிக்கும். இப்படியில்லாமல்,

[17] இதுபோன்ற மாற்றங்களின் (transformations) பயன்களைப்பற்றிய சுருக்கத்தை பார்ட்லெட் அவர்களின் நூலில் (து.நூ.ப. 9) காண்க.

நீடிக்காத பொருள்களில் 10-ல் 9 பங்கு கச்சாப் பொருள்களாகவும், நீடிக்கும் பொருள்களில் 10-ல் 1 பங்குதான் கச்சாப் பொருள்களாக வும் இருக்குமாயின், மற்றும் கச்சாப் பொருள்களும் பொறிசெய் பொருள்களும் விலையிறக்கத்தில் வெவ்வேறு வகைகளில் மாறுபட் டிருந்தால், நீடிக்காத, நீடிக்கும் பொருள்களின் விலை மாற்றங்களை நாம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடியாது. அப்பொழுது கச்சாப் பொருள் களின் தன்மை, நீடிக்காத பொருள்களின் அளவைகளையும், பொறிசெய் பொருள்களின் தன்மை நீடிக்கும் பொருள்களின் அளவைகளையும் அதிகமாகப் பாதிக்கும். அலைவெண்கள் விகிதசமம் அற்ற முறைகளில் வருவதால் நிகழக்கூடிய பலவகைச் சிக்கல்களை இங்கு விவரிக்க முடியாது. உட்பிரிவுகளின் அலைவெண்கள், சமமாக இல்லாமலும், விகிதசமமற்றும் இருந்தால், அப்பொழுது ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனைகளைச் செய்ய (tests of homogeneity) முறைகளுள்ளன என்பதனை மற்றும் இங்குக் கூறலாம். அம் முறைகளைப்பற்றி விளக்கங்களை யேட்ஸின் (து.நூ.ப. 195) மற்றும் கெண்டாலின் (து.நூ.ப. 78) நூல்களில் காண்க. இதற்கு மேலும் தேவைப்படும் நூல்களின் பட்டியலைக் கெண்டால் தந்துள்ளார்.

மாதிரி மாறுபாடுகளில் ஒருபடித்தானநிலைச் சோதனை (Testing the Homogeneity of Sample Variances)

மாறுபாட்டு ஆய்வில் செய்ம்முறைப் பிழைகள் ஒருபடித்தானவை களாக இருக்கவேண்டும் என்ற அடிப்படைக் கோட்பாட்டை முன்பே கூறியுள்ளோம். சென்ற எடுத்துக்காட்டுகளில் பத்திகள், வரிசைகள், அறைகள் என்ற பல பிரிவுகள் இருந்தன. ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் மாறுபாடுகளைக் கணக்கிட்டு, அவைகளை ஒன்ருக்கிப் பிழை மாறு பாட்டின் அளவை நாம் கண்டுபிடித்தோம். இந்த மாறுபாடு களிடையேயும் வேற்றுமை இருக்கும்; ஆனல், அது மாதிரி எல்லை களுக்குள் அமையவேண்டுமென்பதே நம் அடிப்படைக் கோட்பாடு. மாறுபாட்டை ஆய்வதற்கு முன்பே இந்த அடிப்படைக் கோட்பாடு சரியாகவுள்ளதா என்று சோதனை செய்யவேண்டிய நிலை பல சமயங் களில் ஏற்படக்கூடும். இதே பிரச்சினை, பொதுப்படையாகவும் ஏற்படுவதுண்டு. மாதிரிகளின் வரிசைத்தொடர் ஒன்று இருந் தால் அவைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு மாறுபாட்டைக் கணக் கிடலாம்; அப்பொழுது இந்தப் பல மாறுபாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவைகளா என்ற கேள்வி எழும். காணப்படும் வேற்றுமை களை வாய்ப்பு விதிகள்மட்டுமே ஏற்படுத்தியிருக்கக்கூடுமா? மாறு பாடுகள் சமமாகவுள்ள முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து இந்த மாதிரி கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளன என்று கூறலாமா? அதாவது, நாம் சோதனை செய்யும் எடுகோளை H_0 என்று குறித்தால், அது

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\ldots\ldots=\sigma_k^2$ என்பதாகும்.

இங்கு k மாதிரிகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மாறுபாடுகளை s_1^2, s_2^2, s_3^2;...s_k^2 என்றும், அவைகளுக்கான தொகுதிகளின் மாறுபாடுகளை, முறையே σ_1^2, σ_2^2...σ_k^2 என்றும், இந்த மாறுபாடுகளைக் கணக்கிடப் பயன்படுத்திய வரையற்ற டிகிரிகளை n_1, n_2,...n_k என்றும் குறித்துள்ளோம். மற்றும் k மாதிரிகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை என்றும் எண்ணுகிறோம். பொதுவாக இந்த s-களையும், n-களையும் குறிக்க, s_i^2, n_i என்ற அடையாளங்களை உபயோகிப்போம்.

பார்ட்லெட் அவர்களின் (து.நூ.ப. 8) ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனையை இங்கு விளக்குவோம். இங்கு M/C என்ற ஒரு கோவையைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்; இதன் மதிப்பு, மாதிரி மாறுபாடுகளிலுள்ள வேற்றுமைகளைப்பொறுத்தும், அவைகளைக் கணக்கிடப் பயன்படுத்திய வரையற்ற டிகிரிகளைப்பொறுத்தும் இருக்கும். எந்த ஒரு மாறுபாட்டைக் கணக்கிடவும் 4-க்குக் குறையாத டிகிரிகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம் என்று கொள்வோம்; அப்பொழுது இந்தக் கோவையானது (M/C யானது), (k—1) வரையற்ற டிகிரிகளைக் கொண்ட கை-வர்க்கப் பரவலாகத் தோராயமாக அமையும் என்று பார்ட்லெட் அவர்கள் நிரூபித்துள்ளார்.

M என்பதனைக் கீழ்வரும் சூத்திரம் கணக்கிடும் :

$$M = n \log_e s_a^2 - \Sigma(n_i \log_e s_i^2) \qquad (16.11)$$

இங்கு $$n = \Sigma n_i$$

$$s_a^2 = \frac{\Sigma(n_i s_i^2)}{n}$$ என்பதாம்.

s_a^2 என்பது மாறுபாடுகளான s_i^2 களை, n_i களைக்கொண்டு நிறையிட்ட ஒரு சராசரியாகும். இப்பொழுது எல்லா மாறுபாடுகளும் சமமாக இருந்தன என்று எண்ணுவோம்; நிறையிட்ட மாறுபாடுகளின் சராசரியை nஆல் பெருக்க வந்த பலனும் (16.11 என்ற சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் முதல் கோவை), மாதிரி மாறுபாடுகளின் லாகிருதங்களின் நிறையிட்ட கூட்டுத்தொகையும் (சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் இரண்டாவது கோவை) சமமாகவிருக்கும் என்று காண்பிக்கலாம். அப்பொழுது M-ன் மதிப்பு சுழிதான். மாறுபாடுகளில் வேற்றுமை அதிகமானல், M-ன் மதிப்பும் அதிகமாகும்.

நடைமுறையில் M-ஐக் கணக்கிட, நாம் சாதாரண லாகிரிதங்களைக்கொண்டே கண்டுபிடித்து, கடைசியில், இயற்கை லாகிரிதங்களுக்கு மாற்ற 2·3026 என்ற பெருக்கியைப் பயன்படுத்துவோம். அப்பொழுது (16·11) என்ற சூத்திரம்

$$M = 2.3026 \{n \log_{10} s_a^2 - \Sigma(n_i \log_{10} s_i^2)\} \qquad (16.12)$$

என்று மாறும்.

இந்த M-ன் பரவலானது $(k-1)$ வரையற்ற டிகிரிகளைக் கொண்ட கை-வர்க்கப் பரவலைப்போல் தோராயமாக அமையும்.[18] M என்பதை C என்பதனுல் வகுக்க, தோராயம் மற்றும் நெருக்க மாகிறது; ஆதலால் சோதனையும் அதிகத் திருத்தமாகிறது. C என்பது ஒன்று என்ற எண்ணை விடச் சற்றுக் கூடுதலாக இருக்கும். அது பல வரையற்ற டிகிரிகளின் எண்ணிக்கைகளைப் பொறுத் திருக்கும். சூத்திரம் பின்வருமாறு :

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left\{\Sigma\left(\frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{n}\right\} \tag{16.13}$$

அட்டவணை 16–3-ல் உள்ள வட்டிவீத விவரங்களைக் கொண்டு, ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனையை விளக்குவோம். அங்குள்ள பிரிவுகள் மூன்று; சிறு தொழிலதிபர்களின் கடன் வட்டி வீதங்கள், நடுத்தரத் தொழிலதிபர்களின் கடன் வட்டி வீதங்கள், பெரும் தொழிலதிபர்களின் கடன் வட்டி வீதங்கள் என்பன; அவற் றின் மாதிரி மாறுபாடுகள் முறையே 0.2247, 0·1854, 0·2853 என்பன. இம் மூன்று பிரிவுகளுக்கான மாறுபாடுகளில், முழுமைத் தொகுதியில் வித்தியாசம் இல்லை என்பதே இப்பொழுது நாம் சோதனை செய்ய வேண்டிய எடுகோள். (16·12) மற்றும் (16·13) சூத்திரங்களுக்கான தொகைகளை அட்டவணை 16-11-ல் கணக்கிட்டுள்ளோம்.

அட்டவணை 16-11

வட்டி வீதங்களின் மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவையா என்று சோதனை செய்வதற்கு வேண்டிய தொகைகளைக் கணக்கிடுதல்

கடன் வாங்கியவர் நிலை	n_i	Σd^2 $(=n_i s_i^2)$	s_i^2	$\log_{10} s_a^2$	$n_i \log_{10} s_i^2$	$1/n_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
சிறு தொழிலதிபர்கள்	19	4 26950	0.2247	—0.64840	—12 31960	0.05263
நடுத்தர தொழிலதிபர்கள்	39	7.22975	0.1854	—0 73189	—28.54371	0.02564
பெரும் தொழிலதிபர்கள்	39	11.12775	0.2853	—0.54470	—21.24330	0.02564
மொத்தம்	97	22.62700			—62.10661	0.10391

$$s_a^2 = \frac{22.62700}{97} = 0.2333$$

$$n \log_{10} s_a = 97 \times -0.63269 = -61.31273$$

[18] M என்பதனை மாத்திரம் கணக்கிட்டும் ஒருபடித்தானநிலைச் சோதனையைச் செய்யலாம்; அதுவும் திட்பமானதாகவே இருக்கும்; ஆனல், அப்பொழுது சி. எம். தாம்ஸன் மற்றும் எம். மெர்ரிங்டன் (C. M. Thompson and M. Merrington) என்பவர்கள் தயாரித்துள்ள (து.நூ.ப. 156) அட்டவணைகளைப் பயன் படுத்தவேண்டும்.

தேவையானவைகளைச் சூத்திரம் (16.12)-ல் பொருத்தினால்,

$$M = 2.3026 \; \{-61.31273-(-62.10661)\} = 1.82799$$

என்றும், (16.13) சூத்திரத்தில் பொருத்தினால்

$$C = 1 + \frac{1}{3 \times 2}(0.10391 - 0.10309) = 1.00014$$

என்றும் வரும். (இங்கு 0.10309 என்பது 97-ன் ரெஸிப்ரோக்கலாகும்.) C என்பது 1-ஐவிட வெகுச் சிறிதே மாறுபட்டுள்ளது. எனினும், அதையும் பயன்படுத்த

$$M/C = 1.82799/1.00014 = 1.82773$$

என்று வருகிறது.

இந்த மதிப்பின் சிறப்பைக் காண, $(k-1)$ வரையற்ற டிகிரிகளையுடைய கை-வர்க்கப் பரவலை நோக்கவேண்டும். k இங்கு மூன்றாதலால், இரண்டு வரையற்ற டிகிரிகளைக்கொண்ட கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பை, பின் இணைப்பு அட்டவணை VI-லிருந்து, $\chi^2_{.95} = 5.991$ என்று பெறலாம். 100-ல் 5 தடவைகள்தான் வாய்ப்பு விதிகளால் மட்டும் கை-வர்க்கத்தின் மதிப்பு இதற்குச் சமமாகவோ, அல்லது அதிகமாகவோ இருக்க முடியும். கண்டுபிடித்த 1.82773 என்பது இதனைவிட மிகச் சிறியதாகவே உள்ளது; ஆகவே, எடுகோளிற்கு முரணாக விவரங்கள் அமையவில்லை என்றும், பலவகைப்பட்ட கடனுளிகளின் மாதிரி மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவைகளாகவே உள்ளன என்றும் துணியலாம்.[19]

F-ம், t-ம்: 8ஆம் அதிகாரத்தில் இரண்டு சராசரிகளுக்கான வித்தியாசத்தைச் சோதனை செய்ய முறையொன்றைக் கவனித்தோம். அதையே பொதுப்படுத்திப் பல சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசங்களைச் சோதிப்பதுதான் மாறுபாட்டு ஆய்வின் முக்கியமான ஒரு பயன் என்பதை இதனைப் படிப்பவரும் உணர்ந்திருப்பார். அப்பொழுது t சோதனையானது F சோதனையின் ஒரு தனிப்பட்ட நிலையாகும். இந் நிலையில், F-ஐக் கணக்கிட, $n_1 = 1$ என்று கொள்ள வேண்டும். அப்படியாயின் $t^2 = F$ என்றாகும்; $n_1 = 1$ என்பதற்கான F மதிப்புகளும், n_2 என்பதனை n என்று கொண்ட t மதிப்புகளும் சமமாகவிருப்பதைக் காணலாம். அப்படியாயினும் இரண்டு அட்டவணைகளிலும் அமைப்பு முறை வேறாக உள்ளதால், இந்த வேற்றுமையையும் கவனத்தில் வைத்து, அவைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டும்.

[19] மாதிரிகளின் எண்ணிக்கைகள் சமமாகவிருப்பின், எச். ஒ. ஹார்ட்லி (H. O. Hartley) என்பவரின் முறையை உபயோகித்து இச் சோதனையைவிட எளிதான ஒருபடித்தானநிலைச் சோதனையைச் செய்யலாம். [ஹார்ட்லியின் நூல் (து.நா.ப. 68)-ஐ பார்க்க.] இந்தச் சோதனைக்குத் தனியாகத் தயாரிக்கப்பட்ட அட்டவணை தேவைப்படும். இச் சோதனையின் எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு வாக்கர் மற்றும் லெவ் (Walker and Lev) என்பவரின் நூலைப் (து.நா.ப. 186) பார்க்க.

சாதாரணமாக, F சோதனையில் நாம் பயன்படுத்துவது ஒரு முனைச் சோதனையே என்று முன்பே கூறினேம். 1 சதவீத மட்டத்தில், சோதனைக்கான F-ன் மதிப்பு $F_{.99}$ என்பது. இங்கு ஒரு முனையில்மட்டும் வித்தியாசமாகும் ஊக அளவைத்தான் நாம் கணக்கிடுகிறேம். ஆனல், t சோதனையிலோ, இருமுனைச் சோதனையே நடைமுறையில் அதிகம். இங்கு வித்தியாசம் அதிகமாகவும், குறைவாகவும்—ஆனல் ஒரே அளவில்—இருக்க ஊக அளவையைத் தான் பயன்படுத்துகிறேம். இங்கு ஊக அளவை $P=0{\cdot}01$ என்றல் அது இரண்டு ஊக அளவைகளின் மொத்தமாகும்; சராசரியைவிட அதிகமாவதற்கு ஊக அளவை 0·005; குறைவதற்கு ஊக அளவை 0·005. [விரிவாகக் கூறவேண்டுமானல் $t_{.995}$ என்பது ($t_{.995}=3.169$) t ஸ்கேலில் அந்த அளவிற்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பின் மொத்தப் பரப்பின் 0·005 பங்கு எனக் குறிக்கிறது. அதே போல் $t_{.005}$ என்பதும் 3.169 ஆகிறது. இந்த இரண்டு எல்லைகளுக்கு வெளியே உள்ள பரப்பு, மொத்தப் பரப்பின் 1 சதவீதமாகும் (·005+·005=·010). இது கண்டறிந்த விவரம், சராசரிக்கு அதிகமாகவோ, குறைவாகவோ உள்ளதின் ஊக அளவைக் குறிக்கும்.] F பரவலின் ஒருமுனைக்கான மதிப்பையும், t பரவலின் இருமுனைக்கான மதிப்பையும் கணக்கிட்டால், $F=t^2$ என்ற சமன்பாடு பொருத்தமாகும்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டு இதனை நன்கு விளக்கும். இந்தப் பின்னிணைப்பு IIIஆம் அட்டவணையின்படி $P=0{\cdot}01$ ஆனல், $n=10$ என்ற நிலையில் $t=3{\cdot}169$ என வருகிறது. இந்த Pயானது இருமுனைகளையும் சேர்ந்தது என்பதைப் பார்த்தோம். $n_1=1$, $n_2=10$ என்று வைத்து, பின் இணைப்பு VIIஆம் அட்டவணையிலிருந்து $F_{.99}$ என்பது 10·04 என்று காண்கிறேம். இது ஒருமுனைச் சோதனைக்கானது. இந்த இரண்டு மதிப்புகளும் ($t=3{\cdot}169$, $F=10{\cdot}04$) $F=t^2$ என்ற சமன்பாட்டு நிலையில் அமைந்துள்ளன.

துணை நூல்கள்

Bartlett, M. S., 'The Use of Transformations,' 'Biometrics,' of the Biometrics Section of the American Statistical Association, March 1947 (transformations considered with special reference to variance analysis).

Clarke, C. E., 'An Introduction to Statistics', Chap. 7.

Cochran, W. G., 'Some Consequences when the Assumptions for the Analysis of Variance are not Satisfied,' 'Biometrics,' of the Biometrics Section of the American Statistical Association, Mar. 1947.

Cramer, H., ' Mathematical Methods of Statistics, ' Chap. 36.

Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., ' Introduction to Statistical Analysis, ' Chap. 10.

Eisenhart, C., ' Some Assumptions Underlying the Analysis of Variance, ' ' Biometrics ', of the Biometrics Section of the American Statistical Association, Mar. 1947.

Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis, W. A., ' Selected Techniques of Statistical Analysis ', Chaps. 8, 15.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), ' Statistical Methods for Research Workers, ' 11th ed., Chaps. 7, 8.

Freeman, H. A., ' Industrial Statistics, ' Chap. 2.

Friedman, M., ' The Use of Ranks to Avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance, ' ' Journal of the American Statistical Association ', Dec. 1937.

Goulden, C. H., ' Methods of Statistical Analysis ', 2nd ed., Chaps. 5, 9.

Kendall, M. G., ' The Advanced Theory of Statistics ', 3rd ed., Vol. II, Chaps. 23, 24.

Mather, K., ' Statistical Analysis in Biology ', 2nd ed , Chap. 6.

Mood, A. M., ' Introduction to the Theory of Statistics, ' Chap. 14.

Rosander, A. C., ' Elementary Principles of Statistics ', Chaps. 29-31.

Snedecor, G. W., ' Analysis of Variance. '

Snedecor, G. W., ' Statistical Methods, ' 4th ed., Chaps. 6, 7.

Tippett, L. H. C., ' The Methods of Statistics ', 4th ed., Chaps. 6, 7.

Tippett, L. H. C., ' Technological Applications of Statistics ', Chaps. 10, 11.

Walker, H. M. and Lev, J., ' Statistical Inference ', pp. 185-228.

Yates, F., ' The Analysis of Multiple Classifications with Unequal Numbers in the Different Classes, ' ' Journal of the American Statistical Association ', Mar. 1934.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., ' An Introduction to the Theory of Statistics, ' 14th ed., Chap. 22.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும் பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும், நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

17. தொடர்புகளை அளவிடுதல்: உடன் தொடர்பையும், தொடர்புப் போக்கையும் ஆராய்வதற்கான பொதுப்படை வழிகள்.

உடன்தொடர்புகளைப்பற்றி 9ஆம் அதிகாரத்தில் படிக்கும் பொழுது, இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்த நிலைகளைமட்டுமே கவனித்தோம். இரு மாறிகளின் மதிப்புகளான (X, Y) என்ற புள்ளிகளுக்கு அந்த நேர்கோடு ஒரு நல்ல இணைப்பாக (a good fit) அமைந்தால்தான், r என்னும் உடன்தொடர்புக் கெழு அம் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பைத் திருத்தமாகவும் சந்தேகத்துக்கிடமின்றியும் அளவிடும். காலத் தொடர் வரிசைகளைப் (time series) பற்றிக் கூறுங்கால், மாறிகளின் பன்னெடும் போக்கை (secular trend) குறிப்பிட உதவும் கோடுகள் எல்லாம் நேர்கோடுகளாக அமைவதில்லை என்பதைப் பார்த்தோம்; போக்கைக் குறிப்பிட அதிக அடுக்கு (degree-power) களையுடைய கோவைகள் (expressions) தேவைப்படுகின்றன என்பதனையும் கண்டோம். மாறிகளின் தொடர்பைப்பற்றிப் பொதுப்படையாக ஆராயும்பொழுதுகூட இதேபோன்ற நிலை ஏற்படும். இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு மிக அதிகமாக இருக்கும்; ஆனால், அவைகளிடை உள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்திராது; அப்படியான ஒரு நிலையில் அம் மாறிகளிடையே ஒரு நேர்கோட்டுத் தொடர்பைக் கணக்கிட்டால், (X, Y) புள்ளிகள் அந்த நேர்கோட்டிலிருந்து மிகையான அளவில் சிதறியிருக்கும்; எனவே, r என்ற கெழுவின் மதிப்பும் மிகக் குறைவாகவே அமையும்; அந்த மதிப்பளவு தொடர்பை அளவிடும் எனக் கொண்டால் அது தவறாகும். மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை உண்மையாகக் குறிப்பிடுவதற்கு ஒரு வளைகோடு (curve) பொருத்தப்பட்டால் சிதறல்கள் குறைந்து, தொடர்பைக் கணக்கிடுதல் முடியும். இந்தப் பொதுப்படையான பிரச்சினையைத்தான் இந்த அதிகாரத்தில் ஆராயப்

போகிறோம். இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்புப் போக்கை, ஓர் இருபடிக்கோவை (second degree expression) சரியாக எடுத்துக் காட்டும் என்று முதலில் கொள்வோம்; பிறகு ஒருபடியில்லாத (nonlinear) தொடர்பைக் கணக்கிட முறையொன்றை விளக்கு வோம். சென்ற 16ஆம் அதிகாரத்தில் உருவான மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகளைப் பயன்படுத்தி, உடன்தொடர்புகளையும் தொடர்புப் போக்குகளையும் அளவிடுவதற்கான முறைகளைப் படிப்படியாக வகுப்போம்.

இந்த அதிகாரத்தில் புதிதாகக் கீழ்க்கண்ட அடையாளக் குறியீடுகளைப் புகுத்துவோம்:

i : தொடர்புக் குறியீட்டின் மாதிரி மதிப்பு ; தொடர்புப் போக்கு, வளைகோட்டு முறையில் (அல்லது ஒருபடித் தான முறையில்லாது—nonlinear) அமையுமாயின், இது தொடர்பின் அளவை மதிப்பிடும். ஒட்டுக் குறிகளுடன் i_{yx} என்றும் இதனைக் குறிப்போம்—அப்பொழுது முதல் ஒட்டுக்குறி சார்புடை மாறியையும், இரண்டாம் ஒட்டுக் குறி தனித்த (சார்பற்ற) மாறியையும் குறிப்பிடும்.

$\bar{i}$: தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளைப் (constants) பயன்படுத்தி, திருத்தமாக்கப்பட்ட தொடர்புக் குறியீடு.

ι (அயோட்டா): இது ஒரு கிரேக்க எழுத்து; தொடர்புக் குறியீட்டின் முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பு.

s_i : தொடர்புக் குறியீட்டின் மாதிரிப் பிழை.

d_{ya} : குறித்த ஒரு Y-வரிசையிலுள்ள விவரமொன்று அதே வரிசை சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு வித்தியாசப்படுகிறது என்பது.

d_{my} : எல்லா Y-விவரங்களின் மொத்தச் சராசரியிலிருந்து, குறித்த ஒரு Y-வரிசைச் சராசரியின் வித்தியாசம்.

A_1 : வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை: நேர்கோட்டுப் போக்கினுல் 'விளக்கப்பட்டதும்' (explained) வரிசைகளினிடையே உள்ளதுமான மாறுபாட்டின் ஒரு பகுதி.

B_1 : வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை : நேர்கோட்டுப்போக்கினுல் 'விளக்கப்படாததும்', வரிசைகளினிடையே உள்ளதுமான மாறுபாட்டின் ஒரு பகுதி.

A_2 : வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை: இருபடிக் கோவைப் போக்கினுல் 'விளக்கப்பட்டதும்' (explained), வரிசைகளினிடையே உள்ளதுமான மாறுபாட்டின் பகுதி.

B_3 : வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை : இருபடிக் கோலைப் போக்கினால் 'விளக்கப்படாததும்', வரிசைகளினிடையே உள்ளதுமான மாறுபாட்டின் பகுதி.

η (ஈட்டா): தொடர்பு விகிதம் ; இதுவும் ஒட்டுக்குறிகளுடனும் எழுதப்பெறும். η_{yx} என்று குறிப்பிடும்பொழுது முதல் ஒட்டுக்குறி சார்புடைய மாறியையும், இரண்டாம் ஒட்டுக் குறி சார்பற்ற மாறியையும் குறிக்கும்.

η : தொடர்புப் பட்டியலிலுள்ள பத்திகளின் (அல்லது வரிசைகளின்) எண்ணிக்கையைக்கொண்டு திருத்த மாக்கப்பட்ட தொடர்பு விகிதம்.

வளைகோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு (Non–linear Regression)

அட்டவணை 17-1-ல் உள்ள விவரங்கள் வளைகோட்டுத் தொடர்புப் போக்கில் அமைந்தவைபோல் தோன்றுகின்றன. இவைகளையே படம் 17·1-லும் காணலாம். கலிஃபோர்னியா (California) நாட்டில் 44 நிலப்பகுதிகளில் பயிராக்கப்பட்ட ஆல்ஃபால்ஃபா பயிரின் விளைச்சல்களைக் குறிக்கும் விவரங்கள் இவை; பற்பல நிலப்பகுதிகளில் வெவ்வேறு அளவில் நீர்ப்பாசனம் நடந்துள்ளது. முதல் பத்தியிலுள்ள எண்ணிக்கைகள், நீரே பாய்ச்சாமலிருந்த 6 பகுதிகளில் விளைந்த பயிர் விளைச்சல்களைக் குறிக்கின்றன;

அட்டவணை 17-1

ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலும் நீர்ப்பாசனமும்

கலிஃபோர்னியாவில் டேவிஸ் என்னும் இடத்தில் நடத்திய ஆய்வின் சுருக்கமான குறிப்புகள்*

(44 செய்ம்முறைகளில் விளைந்த விளைச்சல், ஏக்கருக்கு இவ்வளவு டன்கள் என்ற அளவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

	பாசன நீரின் அளவு (அங்குலங்களில்)								
	0	12	18	24	30	36	48	60	
	2.35	4.31	5.69	6.00	7.53	7.58	8.05	5.55	
	2.75	4.78	6.46	6.89	7.97	8.22	8.45	7.25	
	2.89	4.84	7.02	7.96	8.32	8.63	8.63	10.17	
	3.85	5.83	8.02	8.32	9.43	9.33	8.83	10.70	
	5.52	6.51		8.38	9.54	9.38	9.52		
	5.94	7.52		9.96	11.06	12.48	10.62		
சராசரி விளைச்சல்	3.88	5.63	6.80	7.92	8.98	9.27	9.02	8.42	7.48

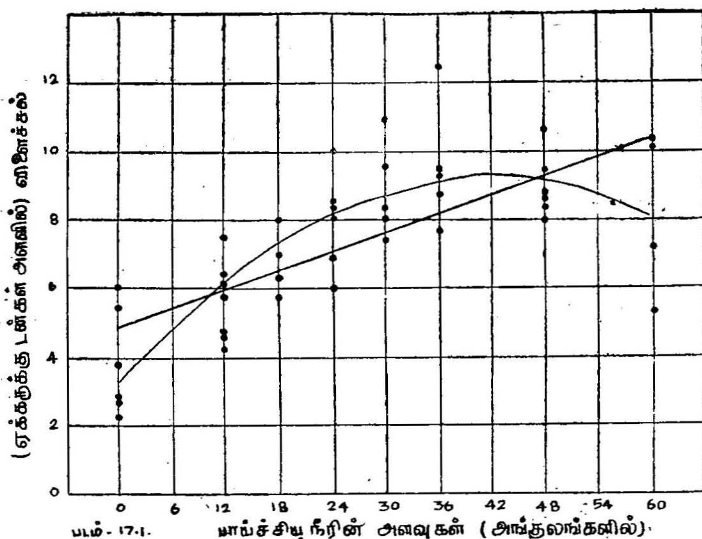
* மூலம் : பெக்கட் மற்றும் ராபர்ட்சனின் நூல் (து.நூ.ப. 10).

இரண்டாம் பத்தியிலுள்ள விவரங்கள் 12 அங்குலம் நீர் பாய்ச்சப் பெற்ற 6 நிலப்பகுதிகளில் விளைந்த விளைச்சல்களைக் குறிக்கும். Y என்பது விளைச்சலையும், X என்பது நீர் பாய்ச்சப்பட்ட அளவையும் குறிக்கும்; ஒவ்வொரு பத்தியையும் Y வரிசை (Y array) என்று குறிப்பிடுவோம்; ஏனென்றால், X-ன் மதிப்பு பத்திக்குப் பத்தி மாறும் ; ஒவ்வொரு பத்தியிலும் பல Y-மதிப்புகள் உள்ளன.

படம் 17.1-ல் குறித்துள்ள புள்ளிகளுக்கு (points) இரண்டு கோடுகள் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன அவைகளில் ஒன்று

$$Y = 5{\cdot}038 + 0{\cdot}0886X$$

என்ற ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். இங்கு Y என்பது ஏக்கருக்கு இவ்வளவு 'டன்' விளைச்சல் என்பதையும், X என்பது பாய்ச்சப் பெற்ற நீரின் ஆழத்தையும் குறிப்பிடுகின்றன. [ஒவ்வொரு வரிசையிலுமுள்ள சராசரியை அந்தந்த வரிசையிலுள்ள விவரங்களின்



சிதறல் படம், ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலையும், நீர் பாய்ச்சிய அளவையும் தொடர்புபடுத்துவது; இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளைக் கொண்டது.

எண்ணிக்கையால் நிறையிட்டுள்ளோம். அதாவது, முதல் பத்தியிலுள்ள 6 விவரங்களுக்கும் 0, 3·88 என்பவைதான் கோ-ஆர்டினேட்டுகள் (co-ordinates). இங்கு 3·88 என்பது முதல் பத்தியின் சராசரி. அதுபோலவே 18 அங்குல அளவிலுள்ள நான்கு புள்ளிகளுக்கும், கோ-ஆர்டினேட்டு 18, 6·80 ஆகும். இங்கு 6·80 என்பது மூன்றும் பத்தியிலுள்ள நான்கு நிலப் பரப்புகளின்

சராசரி விளைச்சல்—இதுபோலவே மற்றவை.] இந்த நேர்கோட்டின் மூலம் கணக்கிடப்பெற்ற உடன்தொடர்புக் கெழுவின் (correlation coefficient) மதிப்பு $r = +0.69$.

படத்தைக் (17.1) கூர்ந்து நோக்கினல், நேர்கோடு குறித்த புள்ளிகளுடன் நன்கு இணைந்ததாக அமையவில்லை என்பது தெரியும். ஆகையினல், r என்ற கெழுவானது, தொடர்பின் அளவைத் திருத்தமாகக் கணக்கிடுகிறது என்பதிற்கில்லைபோலும். (இதனை வலியுறுத்திக் கூறுவதற்கு, மற்றும் பல சான்றுகள் தேவை; படத்தை நோக்குவதுடன் நிறுத்திவிட்டு முடிவு கூறுவது நல்லதன்று. இதே அதிகாரத்தின் பின் பகுதிகளில் இவைகளுக்கான சோதனைகளைக் காண்போம்.)

இரு அடுக்குத் தொடர்புப் போக்குச் சார்பலன் (A Quadratic Regression Function)

படம் 17.1-ல் காட்டியுள்ள இரண்டாம் வளைகோடு ஓர் இரு அடுக்குச் சார்பலனுடையதாகும். இந்தச் சார்பலனை

$$Y = 3{\cdot}539 + 0{\cdot}2527X - 0{\cdot}002827X^2$$

என்று குறிக்கலாம்; இதனைப் புள்ளிகளுடன் குறைந்த வர்க்கமுறையில் (least squraes method) இணைத்துள்ளது. ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலுக்கும், பாய்ச்சப்பட்ட நீர் வசதிக்குமுள்ள தொடர்பினை இந்த வளைகோடு, நேர்கோட்டைவிட நன்கு விளக்குகிறது என்றே கூறவேண்டும்; இங்கு, குறைந்துசெல் விளைவுவிதி (law of diminishing returns) அமுலில் உள்ளதைக் கவனிக்கலாம். எந்த இடத்தில்—அதாவது நீர் வசதி அதிகமானலும் விளைச்சல் அதிகமாகாமல் குறைகிறதோ அது—இவ்விதி தொடங்குகிறது என்பதனைக்காண்பதே இந்த ஆராய்ச்சியின் முக்கிய நோக்கம். நேர்கோடு அவ்விதமான ஒரு நிலை இருக்கலாம் என்பதனைக்கூடக் காட்டுவதில்லை.

ஆதலால், தொடர்புப் போக்கைக் குறிப்பிட, நாம் நேர்கோட்டைவிட, இரு அடுக்கு வளைகோட்டையே பயன்படுத்தவேண்டும். இதற்குத் துணையான அளவையான $s_{y \cdot x}$ என்ற தரப் பிழையையும் (standard error) கணக்கிடவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு X மதிப்பிற்கும் அதன் சார்பான Y மதிப்பைப் பெறவேண்டும் (இரு அடுக்குச் சார்பலனின் உதவியால்). பிறகு அந்த மதிப்புகளுக்கும், கண்டறிந்த Y மதிப்புகளுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்தின் வர்க்க மூலத்தைக் கண்டுபிடித்தால், அதுதான் தரப் பிழையாகும். இந்த முறையை அட்டவணை 17-2 எளிதாக விளக்குகிறது.

அட்டவணை 17-2

ஆல்ஃபால்ஃபாவின் உண்மையான விளைச்சல்களையும் கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களையும் ஒப்பிடுதல்

பாய்ச்சப்பட்ட நீரின், அளவு	உண்மையான விளைச்சல்	இரு அடுக்குச் சார்பலனைக் கொண்டு கணக்கிட்ட விளைச்சல்	உண்மை விளைச்சலுக்கும், கணக்கிட்டதற்கும் உள்ள வித்தியாசம் (2)—(3)	
X	Y	Y_c	d	d^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	3.85	3.54	+ .31	.0961
0	5.94	3.54	+2.40	5.7600
0	5.52	3.54	+1.98	3.9204
0	2.75	3.54	— .79	.6241
0	2.89	3.54	— .65	.4225
0	2.35	3.54	—1.19	1.4161
12	4.78	6.16	—1.38	1.9044
12	7.52	6.16	+1.36	1.8496
12	6.51	6.16	+ .35	.1225
12	4.31	6.16	—1.85	3.4225
12	5.83	6.16	— .33	.1089
12	4.84	6.16	—1.32	1.7424
18	7.02	7.17	— .15	.0225
18	5.69	7.17	—1.48	2.1904
18	8.02	7.17	+ .85	.7225
18	6.46	7.17	— .71	.5041
24	6.00	7.98	—1.98	3.9204
24	8.38	7.98	+ .40	.1600
24	8.32	7.98	+ .34	.1156
24	6.89	7.98	—1.09	1.1881
24	9.96	7.98	+1.98	3.9204
24	7.96	7.98	— .02	.0004
30	7.53	8.58	—1.05	1.1025
30	9.54	8.58	+ .96	.9216
30	9.43	8.58	+ .85	.7225
30	7.97	8.58	— .61	.3721
30	11.06	8.58	+2.48	6.1504
30	8.32	8.58	— .26	.0676
36	7.58	8.97	—1.39	1.9321
36	9.33	8.97	+ .36	.1296
36	9.38	8.97	+ .41	.1681
36	8.22	8.97	— .75	.5625
36	12.48	8.97	+3.51	12.3201
36	8.63	8.97	— .34	.1156
48	8.45	9.16	— .71	.5041
48	9.52	9.16	+ .36	.1296
48	8.63	9.16	— .53	.2809
48	8.83	9.16	— .33	.1089
48	10.62	9.16	+1.46	2.1316
48	8.05	9.16	—1.11	1.2321
60	10.17	8.52	+1.65	2.7225
60	7.25	8.52	—1.27	1.6129
60	10.70	8.52	+2.18	4.7524
60	5.55	8.52	—2.97	8.8209
				80.9945

மேற்கண்ட ஈரடுக்குச் சமன்பாட்டைக்கொண்டு (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள Y_c-க்கள் கணக்கிடப்பட்டன.

அட்டவணை 17–2-ன் (5)ஆம் பத்தியிலுள்ள வர்க்க விலக்கங்களின் மொத்தத்தைக் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தில் பொருத்தினால்,

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{80.9945}{44}} = 1.36$$

என்ற விடை வரும்.

தொடர்புக் குறியீடு (Index of Correlation)

தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிடும் கருத்தியலான (abstract) ஒரு முன்ருவது மதிப்பு நமக்கு இப்பொழுது தேவை. நேர்கோட்டு முறையில் தொடர்பு அமைந்தபொழுது (முன்னேர் அதிகாரத்தில்), அதுபோன்ற ஓர் அளவை (உடன்தொடர்புக் கெழுவை) $s_{y \cdot x}$, மற்றும் s_y என்பவைகளைக்கொண்டு கண்டுபிடித்தோம்; அதேபோன்ற மற்றுமோர் அளவினை வளைகோட்டுமுறைத் தொடர்புகளுக்கும் கண்டு பிடிக்கலாம். தொடர்புக் கெழு என்பதும், r என்ற அடையாளக் குறியும் நேர்கோட்டுத் தொடர்பைச் சார்ந்தவைகளாகிவிட்டதால், வளைகோட்டு நிலைகளுக்கு நாம் தொடர்புக் குறியீடு என்ற சொற்றொடரையும், அதனைச் சுட்டிக்காட்ட i என்ற அடையாளக் குறியையும் பயன்படுத்தலாம்.[1]

தொடர்புக் குறியீடுகளைக் கணக்கிடக் கீழ்க்காணும் சூத்திரம் பொதுவானது.

$$i_{yx} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{y.x}}{s^2_y}} \qquad (17.1)$$

$s_{y \cdot x}$ என்பதனைக் கணக்கிட்டாகிவிட்டது.[2] s_y என்பதனை மதிப்பிட

[1] இந்த அளவை நான் முதன்முதலில் புகுத்தியபொழுது, இதனை ρ (ரோ) என்று குறித்தேன் (து.நூ.ப. 102). எஜெகீல் (Ezekiel) என்பவர் இதற்கொப்பான பல்தர வளைகோட்டுத் தொடர்புக் குறியீட்டை (index of multiple curvilinear) குறிக்கப் பெரிய (capital) Iஐப் பயன்படுத்தினார்(து.நூ.ப. 36). இப்பொழுது கிரேக்க எழுத்துகளை முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளைக் குறிக்க மட்டுமே உபயோகிப்பது வழக்கமாகிவிட்டது. ஆதலால், மாதிரிக் கெழு r ஆனால், அதற்கான முழுமைத் தொகுதியின் கெழு ρ ஆகிவிடும். எனவே, இங்கு மாதிரிக்கு i என்றும், இதற்கு முறையான முழுமைத் தொகுதிக்கானதை ι (அயோட்டா) என்றும் குறிக்கலாம்.

[2] இங்கு $s^2_{y.x}$, மற்றும் s^2_y என்பவைகளை விளக்க அளவைகள் (descriptive measures) என்றே கொண்டுள்ளோம். எனவே, இவ்விரண்டையும் கண்டுபிடிக்க வரையற்ற டிகிரிகளைப் பயன்படுத்தாமல், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை N என்பதனாலேயே வகுத்துவிடலாம்.

நமக்கு முறை முன்பே தெரியும். அதன் மதிப்பு 2.27. மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் இவைகளைப் பொருத்தினால்,

$$i_{yx} = \sqrt{1 - \frac{1.84}{5.19}} = 0.80$$

என்றாகிறது. இதன் மதிப்பு, தொடர்புக் கெழுவான r-ன் மதிப்பை விடச் (+0.69) சிறப்பாக அதிகமாயுள்ளது. நேர்கோட்டைவிட ஈரடுக்கு வளைகோடு கண்டறிந்த விவரங்களுக்குச் சிறந்த முறையில் இணைப்பாக உள்ளது என்பதனை, இந்த முடிவுகளும் வலியுறுத்தும்; இவை இரண்டு கெழுக்களுக்குமுள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதா (சிக்னிஃபிக்கென்டானதா) என்பது பின்பு சோதனை செய்யப்படும்.

கண்டறிந்த விவரங்களின் ஒரு தொகுதிக்கு இரண்டு தொடர்புக் குறியீடுகள் அமையும் என்பதனையும் நாம் கவனிக்கவேண்டும். X என்ற மாறியைச் சார்புடையதாகக் கருதினால், சூத்திரம் பின்வருமாறு ஆகும்.

$$i_{xy} = \sqrt{1 - \frac{{}^{2}_{x.y}}{s^{2}_{x}}} \qquad (17.2)$$

ஒட்டுக்குறிகளில் முதலாவது எப்பொழுதும் சார்புடைய மாறியையும், இரண்டாவது சார்பற்ற மாறியையும் குறிக்கும். இவ்விரண்டு கெழுக்களும் வெவ்வேறான மதிப்புடையனவாக இருக்கக்கூடுமாதலால், இரண்டு ஒட்டுக்குறிகளையும் வைத்தே எழுதுதல் அவசியம்.

i என்ற கெழுவின் தன்மையையும் அதன் எல்லைகளையும் விளக்கவேண்டும். Y-களின் சராசரியிலிருந்து உள்ள சிதறல்களுக்கும், இணைக்கப்பட்ட கோட்டிலிருந்து உள்ள சிதறல்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை i என்பதன் மதிப்பு கணக்கிடும், தொடர்பு உண்மையான நேர்கோடாக இருப்பின், r என்பதும் i என்பதும் சமமாகும். அப்பொழுது r என்பது i-ன் ஒரு தனிநிலை (special) மதிப்பாகிறது. i-ன் எல்லைகளும் 0, 1 என்பவை. 0 என்றால் தொடர்பில்லை என்றோ, அல்லது இந்த முறையில் அவைகளின் தொடர்பைக் கணக்கிடமுடியாது என்றோ கொள்ளலாம். மதிப்பு 1 ஆனால், பயன்படுத்திய சமன்பாடானது மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கைக் குறைபாடில்லாது காட்டுகிறது எனலாம். i என்பதற்கு + என்ற குறியோ, — என்ற குறியோ பொருத்தக்கூடாது ; ஏனென்றால், விவரங்களின் சில பகுதிகளில் தொடர்பு நேரானதாகவும், மற்ற இடங்களில் எதிரிடையாகவும் இருக்கும். மேலே விளக்கப்பட்ட ஆல்ஃபால்ஃபா எடுத்துக் காட்டிலும் இப்படி இருப்பதைக் காணலாம்.

தொடர்புக் குறியீட்டைத் தெரிவிக்கும்பொழுது, எந்த வளை கோட்டைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம் என்பதையும் கூறினல்தான் பொருள் நன்கு விளங்கும். r என்பது எப்பொழுதும் நேர்கோட்டுத் தொடர்பைப் பொறுத்ததாக இருப்பதால், அதன் பொருளை எளிதில் அறியலாம். எந்த வளைகோடு பயன்படுத்தப்பட்டது என்று கூருவிடில், i-ஐப் பொறுத்தமட்டில் குழப்பமே விளையும்.

கணக்கு முறையில், எவ்வளவு புள்ளிகளுள்ளனவோ அவ்வளவு புள்ளிகளிடையே செல்லக்கூடிய ஒரு வளைகோட்டைக் கண்டுபிடித்து விடலாம் ; ஆனல், சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலிகள் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும். அப்பொழுது i-ன் மதிப்பு 1 என்ருகும்; ஆனல், அதற்குப் பொருள் ஒன்றும் இராது. புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையும், மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையும் ஒன்ருகவிருக்கும். இந்தப் பொருந்தாத தன்மையைத்தான் 1 என்ற மதிப்பும் கூறும். இது கணக்கு முறைகளில் சார்பலன்களை அமைப்பதிலுள்ள ஒரு வரம்பாகும். i என்பதற்குத் தனியாக ஒரு பொருள் இருப்பதாகக் கொள்ளலாகாது ; அதன் சிறப்பு, எந்தச் சார்பலனைப் பயன்படுத்துகிருேமோ அதைப்பொறுத்து அமையும் ; ஆதலால், பொதுவாக வளைகோட்டுப் பொருத்தலில் (curve-fitting) உள்ள கோட்பாடுகளை நன்கு நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும். எந்தத் தொடர்புக் கெழுவிற்கும் இதுபோன்ற வரம்பு இருக்கிறது என்பதை மறந்துவிடுவதாலோ புறக்கணிப்பதாலோதான் பிழையான முடிவுகளை அடைகிருேம்.

தொடர்புக் குறியீட்டைக் கணக்கிட ஒரு சுருக்கமான முறை : சென்ற எடுத்துக்காட்டில் தொடர்புக் குறியீட்டையும் தரப் பிழையையும் கணக்கிட நாம் பயன்படுத்திய முறை வெகு நீண்டதான ஒன்ருகும். ஆனல், அப்படிச் செய்ததால், முறை நன்கு விளங்கியிருக்கும்; அதன் தன்மையைப்பற்றிய சந்தேகமும் வராது. தொடர்புக் கெழுவான r என்பதனைக் கணக்கிடுங்கால் பயன்படுத்திய முறைகளையும் நினைவுபடுத்திக்கொண்டால், இங்கும் கணக்கீட்டு முறைகளிலுள்ள சுமையை வெகுவாகக் குறைத்துவிட முடியும்.

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3 + \dots$$

என்ற ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு (polynomial) $s_{y.x}$ என்பதனைக் கண்டுபிடிக்க, நேர்கோட்டுக்கான முறையையே தொடர்ந்து கீழ்க் கண்ட சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) - c\Sigma(X^2Y) - d\Sigma(X^3Y) - \dots}{N} \quad (17.3)$$

இதுபோலவே, r கெழுவின் சூத்திரத்திற்கான முறையைப் பொதுப்படையாக்கின், கீழ்வரும் சூத்திரம்[3] கிடைக்கும்.

$$i_{yx}^2 = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) + c\Sigma(X^2Y) + d\Sigma(X^3Y) + \ldots - Nc_y^2}{\Sigma(Y^2) - Nc_y^2} \qquad (17.4)$$

இங்கு $c_y = \Sigma Y/N$.

கணக்கிடுவதற்கான மூலத்தை (origin), Y-களின் சராசரியில் பொருத்தினால், $\Sigma(y) = 0$, மற்றும் $c_y = 0$ என்றாகும். எனவே, மேற்கண்ட சூத்திரம் சிறிது எளிதாக அமையும்.

$$i_{yx}^2 = \frac{b\Sigma(Xy) + c\Sigma(X^2y) + d\Sigma(X^3y) + \ldots}{\Sigma(y^2)} \qquad (17.5)$$

$s_{y.x}$ மற்றும் i-களின் சூத்திரங்களின் தன்மைகளைக் கவனிக்க வேண்டும். X, Y மதிப்புகளுக்கு இணைப்புக் காணுவதற்கான சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளும், $\Sigma(Y^2)$, c_y^2 என்பனவும் பயன்படுத்தப்பட்டு, $s_{y.x}$ மற்றும் i என்பவைகளைக் கண்டுபிடிக்கிறோம். அதாவது, இணைப்பு முறையின் பக்கவிளைவுகளாக (by-products) நமக்கு இந்த இரண்டு அளவைகளும் கிடைக்கின்றன. இவைகளையும் துணையாகக்கொண்டால், குறித்த இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பின் முழு விவரமும் கிடைத்தாற்போலாகிறது. தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு சராசரியான தொடர்பைக் குறிக்கிறது; இந்தச் சமன்பாட்டையொட்டிக் கண்டுபிடித்த மதிப்பீடுகளின் நம்பகத்தை (reliability) அளவிடுவதற்கு, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையான $s_{y.x}$ உதவும். i என்பது இரண்டு மாறிகளுக்குமிடையே உள்ள உறவை மேற்கண்ட சமன்பாட்டினால் குறித்தால், அது அவ்விரண்டு மாறிகளுக்குமுள்ள தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிடும் ஒரு கருத்தியலான குறியீடாகும் (abstract index).

ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல் எடுத்துக்காட்டின் உதவியால் இந்தச் சூத்திரங்களின் பயனை விளக்குவோம். இதற்கு, அட்டவணை 17-1-ல் உள்ள விவரங்களைக்கொண்டு, இணைப்பு முறையில் கிடைத்தவைகளான கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் தேவைப்படும் :

$$a = 3.539 \qquad \Sigma(X^2Y) = 407{,}564.64$$
$$b = .252652 \qquad c_y^2 = 55.9197$$
$$c = -.002827 \qquad \Sigma(Y^2) = 2{,}688.2268$$
$$\Sigma(Y) = 329.03 \qquad N = 44$$
$$\Sigma(XY) = 10{,}271.72$$

ஈரடுக்குப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கான மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் கணக்கிட,

[3] மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் கணக்கிட, ஒரு பொதுப்படையான சூத்திரத்தின் விளக்கங்களைப் பின் இணைப்பு C-ல் காண்க. இந்தப் பொதுப்படையான $s_{y.x}$-ன் சூத்திரத்தைக்கொண்டுதான் (17.4) என்பது நிறுவப்பட்டது.

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) - c\Sigma(X^2Y)}{N} \qquad (17.6)$$

என்ற சூத்திரத்தில் இவைகளைப் பொருத்தினால்

$$s^2_{y.x} = \frac{2{,}688.2268 - (3.539 \times 329.03) - (.252652 \times 10{,}271.72) - (-.002827 \times 407{,}654.64)}{44}$$

$$= \frac{80.8043}{44}$$

$$= 1.8365$$

ஆகவே, $s_{y \cdot x} = 1.36$ என்று விடை வரும்.

தொடர்புக் குறியீட்டைக் கணக்கிடக் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$i^2_{yx} = \frac{a\Sigma(Y) + b\Sigma(XY) + c\Sigma(X^2Y) - Nc^2_y}{\Sigma(Y)^2 - Nc^2_y} \qquad (17.7)$$

தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்,

$$i^2_{yx} = \frac{146.9557}{2{,}688.2268 - (44 \times 55.9197)}$$

$$= 0.6152$$

$$i_{yx} = 0{\cdot}80$$

தொடர்புக் குறியீட்டின் மதிப்பானது, சமன்பாட்டிலிருக்கும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையையும், கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கையையும் பொறுத்து இருக்கும். இவ்விரு எண்ணிக்கைகளும் சமமாக விருப்பின், அதன் மதிப்பு 1 ஆகும். தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகள் குறைவதால், இணைப்பு முறையில் சற்று மாறுபாடு ஏற்படுகிறதல்லவா? இதனால் உண்மையான தொடர்புக் குறியீட்டைவிடக் கண்டறிந்த குறியீடு எப்பொழுதும் சற்றுக் கூடுதலாகவே இருக்கும். மாதிரியிலுள்ள எண்ணிக்கைகள் குறைவாகவிருந்தால், இதுபோன்ற ஒருபுறச் சார்பிற்கு (bias) திருத்தம் அமைத்தல் நல்லது. $\bar{i}$ என்பது திருத்தப்பட்டதையும், m என்பது சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையையும் குறித்தால், திருத்தமான அளவைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால்[4] பெறலாம் :

$$\bar{i}^2_{yx} = 1 - \left\{(1 - i^2_{yx})\left(\frac{N-1}{N-m}\right)\right\} \qquad (17.8)$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் விவரங்களைப் பொருத்த

$$\bar{i}^2_{yx} = 1 - \left\{(1 - 0.6152)\left(\frac{44-1}{44-3}\right)\right\}$$

$$= 0.6279$$

$i_{yx} = 0.79$ என்று வருகிறது.

4 எசெகீல் (Ezekiel) என்பவரின் நூலிலிருந்து (து.நா.ப. 37).

இந்தச் சமன்பாட்டைப் (17.8) பயன்படுத்தும்பொழுது, பிராக்கெட்டுகளிலுள்ள (brackets) {} கோவையின் மதிப்பு 1ஐ விட அதிகமானால், $\bar{i}$ என்பதனைச் சுழி (0) என்று கொள்வோம்.[5]

இதே முறைகளைப் பின்பற்றி, குறித்த நிலைகளில் சமன்பாடுகளின் அமைப்பைப்பொறுத்து வேண்டிய மாறுதல்களைச் செய்து, $s_{y \cdot x}$, மற்றும் i என்பனவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

தொடர்புக் குறியீட்டின் மாதிரிப் பிழை : தொடர்புக் குறியீட்டின் மாதிரிப் பரவல் ஒன்றே ஒன்று இருக்குமென்று எண்ண முடியாது. இணைக்கப்பட்ட சார்பலன்களின் 'அடுக்கு'களைப் பொறுத்துப் பரவலும் வெவ்வேருக அமையும் என்பது வெளிப்படை. மற்றும், முழுமைத் தொகுதிகள் மாறுவதாலும், மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை மாறுவதாலுங்கூட மாதிரிப் பரவல் வித்தியாசப்படும். இவ்வாருன பரவல்களெல்லாவற்றையும்பற்றி முழுவதும், திட்பமானதுமான தகவல்கள் இல்லை. ஆதலால் குறித்த ஒரு குறியீட்டின் மாதிரிப் பிழையை அல்லது தரப்பிழையைத் திருத்தமாகக் கணக்கிடுதல் இயலாது. பொதுவாக, மாதிரியிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாகவிருந்தால், கீழ்க்கண்ட தோராயம் பயனை அளிக்கும் :

$$s_i = \frac{1 - \iota^2}{\sqrt{N - m}} \tag{17.9}$$

இந்தச் சூத்திரத்தில் ι (அயோட்டா) என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பைக் குறிக்கும் (இதற்குப் பதில் நாம் மாதிரியின் மதிப்பான i என்பதை உபயோகிப்போம்). m என்பது போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளைக் குறிக்கும். சிறப்புகாண் சோதனைகளிலும் (tests of significance) நம்பிக்கை எல்லைகளை அமைக்கவும் மேற்கண்ட s_i என்ற தரப்பிழையைப் பயன்படுத்தலாம் ; ஆனால், மேற்கூறப்பட்ட விதிகளையும் வரம்புகளையும் நன்கு கவனிக்க வேண்டும்.[6] சிறப்புகாண் சோதனைகளுக்கு, திருத்தமான மற்றக்

[5] மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையிலும் இதுபோன்ற திருத்தம் ஒன்றை நிகழ்த்த வேண்டும். விவரங்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருந்தால். இத் திருத்தம், திருத்தமற்ற மதிப்பீட்டை அதிகமாக்குவதாக அமைகிறது. எஜெகில் என்பவர் கீழ்க்கண்ட சூத்திரம் தந்துள்ளார் :

$$\bar{s}^2_{y.x} = s^2_{y.x} \left(\frac{N-1}{N-m} \right)$$

இங்கு $\bar{s}^2_{y.x}$ என்பது திருந்திய தரப்பிழையைக் குறிக்கும்.

[6] தொடர்புப் போக்கு ஓரடுக்குச் சார்பலனைச் சார்ந்திருக்கும்பொழுது, அதன் தன்மையும் உடன்தொடர்பும் நன்கு ஆராயப்பட்டுத் திட்டப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஆனல், போக்கு இரு, அல்லது பல அடுக்குகளைக் கொண்ட கோவைகளாக அமையும் நிலைகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சிகள் அவ்வளவாக நடைபெற்றதில்லை என்பதை நான் இங்கு வலியுறுத்தவேண்டும். ஆதலால், ஓரடுக்கைச் சாராத போக்குச் சார்பலன்களைப் பயன்படுத்தி விளக்கமாகக் கூறலாமென்ருலும், இவைகளிலிருந்து முடிவுகளைப் பொதுப்படையாக்குதல் திட்பமற்றதாகவே அமையும்.

கருவிகளும் உள்ளன. அவை மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையில் அமைந்தவை. இவைகளைப் பயன்படுத்தி, தொடர்புப் போக்கையும் உடன் தொடர்பையும் ஆராய்வதே அடுத்த பகுதியின் வேலை.

தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிடுவதில் மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையின் பயன்

ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (R. A. Fisher) என்பவரால் துவக்கப்பெற்ற மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகளைக்கொண்டு, இரு மாறிகளின் உடன் தொடர்பையும், தொடர்புப் போக்கையும் படிப்படியாக (systematic) ஆராய முடியும். பிரச்சினையைப் பகுத்தறிவு முறையில் கூர்ந்து நோக்குங்கால், கீழ்க்கண்ட கேள்விகள் எழுவது இயற்கையே.

(1) கண்டறிந்த விவரங்களில், குறித்த இரு மாறிகளிடையே (வாய்ப்பு விதிகளினுல் ஏற்படுவதைத் தவிர) தொடர்பு உள்ளது என்பதற்குச் சான்றுகள் உள்ளனவா ?

(2) உண்மையாகவே தொடர்பு இருக்கிறது என்று கருதினுல், மிக எளிதான சார்பலன்—ஓரடுக்குச் சார்பலன், நேர் கோட்டை ஒட்டியது—அம் மாறிகளிடையே உள்ள போக்கினை நன்கு அளவிடுமா ?

(3) உண்மைத் தொடர்பிலிருந்து நேர்கோட்டு முறையில் போக்கு அமையாதுபோனுல், ஈரடுக்குச் சார்பலன் ஏற்கக்கூடிய தோராயமாக அமையுமா ? அதுவும் இல்லையென்ருல், அதே எண்ணிக்கை மாறிலிகளுள்ள வேறொரு சார்பலன், அல்லது அதிக அடுக்குகளுடைய சார்பலன், ஏற்கக்கூடிய இணைப்பைத் தருமா ?

முதல் கேள்விக்கே 'இல்லை' என்ற விடை வருமானுல், ஆய்வாளர் மற்ற இரண்டு கேள்விகளைப்பற்றிச் சிந்திக்கமாட்டார். பதில் 'ஆமாம்' என்ருல், அவர் மற்றப் போக்குச் சார்பலன்களை ஒவ்வொன்ருகச் சோதித்து, ஏற்கக்கூடிய சார்பலன் கிடைக்குமளவும் ஆராய்வார். அப்பொழுதும் அவர், ஆக்கமின் கத்தியை (Occam's razor) நினைவில் வைத்து, (பாகம் I, பக்கம் 431, அடிக்குறிப்பைப் பார்க்க) கிடைத்த பல சார்பலன்களில், எளிதானதும் கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு ஒத்ததுமான ஒன்றைப் பகுத்தறிகிற முறையில் ஏற்கக்கூடியதாகத் தேர்ந்தெடுப்பார். இப்படியாக, ஆராய்ச்சியாளர் படிப்படியாக எடுகோள்களைக் கருதி, அவற்றை ஒவ்வொன்ருகச் சோதித்துப்பார்க்க உதவுகிற இத் தன்மை, மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையின் ஒரு தனிச் சிறப்பாகும்.

முன்பே எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல் உதாரணத்தைக் கையாண்டு (அட்டவணை 17-1), மாறுபாடுகளின் ஒப்பிடுதலைச் செய்து, எப்படி ஒரு தொடர்புப் பிரச்சினையை ஆராய்வது

என்பதனை விளக்குவோம். 44 தனிச் செய்முறைகளில் கிடைத்த ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சல்களுக்கான சராசரி ஏக்கருக்கு 7.48 டன்களாகும். ஆனால், விவரங்களில் சிதறல் வெகு அதிகமாக இருந்தது. சராசரியிலிருந்து 44 விவரங்களின் விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 228.33 என்பது. இதனை Q என்று குறிப்போம் (அட்டவணை 16–5ஐப் பார்க்க). இந்தத் தொகையால் குறிப்பிடப்படும் மாறுபாட்டை ஆராய்வதே நமது பிரச்சினை.

உடன்தொடர்பு உள்ளதா என்பதைச் சோதித்தல்

அட்டவணை 17-1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் எடுகோள்களைச் சோதிக்க உதவுமாறு நன்கு அமைக்கப்பெற்றுள்ளன. ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலுக்கும் பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்பின் தன்மையை ஆராய்வதே நமது நோக்கம். பாய்ச்சப்பட்ட நீர் 0 அங்குலங்களிலிருந்து 60 அங்குல ஆழம் வரையில் இருந்தது; விவரங்கள் நீரின் அளவைக்கொண்டு எட்டுப் பத்திகளாக அமைந்துள்ளது. விளைச்சல்களிலுள்ள வேறுபாடானது, பாய்ச்சப்பட்ட நீரின் அளவைகளைப் பொறுத்துள்ளது எனலாம். ஆகவே, முதலாவதாக நாம் கருதும் எடுகோள் 'அவைகளுக்கு ஒருவிதத் தொடர்பும் இல்லை' என்பதுதான். இந்த எடுகோளைச் சோதிப்பதற்காக, நாம் மொத்த மாறுபாட்டைப் பத்திகளிடையே உள்ளது, பத்திகளுக்குள்ளே இருப்பது என்று இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறோம்.

பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கும் மொத்த மாறுபாட்டைக் கணக்கிட, ஒவ்வொரு பத்தியிலும் உள்ள ஒவ்வொரு விவரமும் அந்தப் பத்திச் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு வித்தியாசப்படுகிறது என்று கண்டு, அவைகளை வர்க்கமாக்கி, மொத்தத்தைக் கண்டுபிடிப்போம். அதாவது, அட்டவணை 17-1-ல் முதல் விவரம் 2·35, அந்தப் பத்தியின் சராசரி 3·88; எனவே, விலக்கம் $= -1.53$, அதனை வர்க்கமாக்க, 2·3409 வரும். இரண்டாம் விவரம் 2.75 ; அதன் விலக்கம் $-1{\cdot}13$; வர்க்கம் 1·2769. இப்படியே மற்ற நான்கு விவரங்களுக்கும் உள்ளவற்றைக் கணக்கிட்டால், முதல் பத்தியின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 11·5320 என்றாகிறது. இதே முறையைப் பின்பற்றி மற்ற ஏழு பத்திகளுக்கும் கணக்கிட்டு, எல்லாவற்றையும் கூட்டினால், எட்டுப் பத்திகளுக்குமான மொத்தக் கூட்டுத்தொகை 76·39 என்று வரும். இதுதான் பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கும் மொத்த வேறுபாடு. இதனை Q_2 பகுதியென்று குறிப்பிடுவோம் (அட்டவணை 16–5ஐப் பார்க்க). ஒரு குறித்த விவரத்திற்கும், அந்தப் பத்தியின் (அல்லது Y-வரிசையின்) சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கத்தை d_{ya} என்று குறிப்பிட்டு, Σ' என்ற குறியை, அந்தப் பத்தியில் மொத்தம் காணுதலுக்கு உபயோகித்து, Σ என்பதைப்

பத்திகளிடையே மொத்தமாக்குதலுக்குப் பயன்படுத்தினல், Q_2 என்பது $\Sigma\Sigma' d_{ya}^2$ என்பதற்குச் சமமாகும்.

இப்பொழுது பத்திகளிடையே உள்ள மாறுபாட்டைக் கணக்கிடுவோம். மொத்தச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு பத்தியினது சராசரியின் விலக்கத்தைக் கண்டு, அதனை வர்க்கமாக்கி, அவ் வர்க்கங்களின் நிறையிட்ட கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிட்டால், வருவது Q_1 என்ற, பத்திகளிடையே உள்ள மாறுபாடாகும். அதாவது, மொத்தச் சராசரி 7·48 ; முதல் பத்தியினது 3·88 ; ஆக, விலக்கம் —3.60; அதனை வர்க்கமாக்க, 12.9600; இதனை நிறையிடுவதற்காக 6-ஞல் (அந்தப் பத்தியிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை) பெருக்கினல், 77·7600 என்று விடை வருகிறது. இதேபோல் மற்ற ஏழு பத்திகளுக்கும் செய்து, எட்டையும் கூட்டினல் வரும் Q_1 மதிப்பு 151.94 என்பது. 16-5 அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள தரமிட்ட (standard) குறியீட்டுமுறையைப் பின்பற்றி $Q_1 = \Sigma n_i \ (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$ என்று எழுதலாம். $(\bar{Y}_i - \bar{Y})$ என்ற விலக்கத்தை d_{my} என்று குறிப்பது வசதியான முறையாகும். அப்பொழுது $Q_1 = \Sigma d_{my}^2$— இங்கு விலக்கங்களை நிறையிட்டபிறகே (n_i-களால்) மொத்தம் காணவேண்டும் என்பதை அறிய வேண்டும்.

வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையான 228·33 என்பதனை, 76·39, மற்றும் 151·94 என்ற மதிப்புகளுள்ள இரு பகுதிகளாகப் பிரித்துள்ளோம். இவைகளில் ஒன்று (முதலாவது) நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்பற்றதான வேறுபாடுகளைமட்டுமே குறிக்கும்; மற்றது குறிக்கும் வேறுபாடுகள், நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்புள்ளவைகளும் மற்றவைகளும் ஆகும்.[7] இப்பொழுது முதல் பத்தியை எடுத்துக்கொண்டால், அந்த ஆறு நிலப்பகுதிகளுக்கும் நீர்ப்பாசனமே இல்லையாயினும், விளைச்சல்கள் ஏக்கருக்கு 2.35 டன்களிலிருந்து 5·94 டன்கள்வரை வித்தியாசமாக உள்ளன. இந்தப் பத்தியின் மொத்த மாறுபாடு (பத்தியின் சராசரியிலிருந்து வரும் விலக்கங்களை வர்க்கங்களாக்கி, அவைகளைக் கூட்டிய தொகை) 11·5320. இந்தப் பத்திக்கு நீர்ப்பாசன அளவு ஒரு மாறிலி ஆனதால், இக் கூட்டுத் தொகை அளக்கும் மாறுபாட்டிற்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்கும் தொடர்பில்லை. இதேபோன்றதுதான், இந்த எட்டுப் பத்திகளது மொத்தமான 76·39 என்பதும். இது 17-1ஆம் அட்டவணையிலுள்ள 8 பத்திகளிடையே இருக்கும் மொத்த மாறுபாடாகும். மண்ணின் வித்தியாசங்களினலும், ஏனைய சிறுசிறு காரணங்களாலும் ஏற்பட்ட வேறுபாடுகள் இவை. விளக்கமுடியாத இவை

[7] அட்டவணை 16-4-ல் விளக்கப்பட்ட முறையையொட்டியதுதான் இதுவும்; அதன் விவரங்கள் அட்டவணை 16-5-ல் உள்ளன.

போன்ற பல காரணங்களே, மொத்தமாக நாம் 'வாய்ப்புக் காரணங்கள்' என்று கூறுவோம். ஆகவே, 76·39 என்பது வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்பட்டது. இந்த மதிப்பில் இடம்பெருத ஒரு காரணம் நீர்ப்பாசன அளவுதான். எனவே, நீர்ப்பாசன அளவு புகாத ஒரு பகுதியை மொத்தக் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து பிரித்துள்ளோம்.

பத்திகளின் (அல்லது Y வரிசைகளின்) சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்கள் நீர்ப்பாசன அளவினுலும் ஏற்பட்டவைகளாக இருக்கலாம்; நீர்ப்பாசன அளவே ஒரு முக்கியக் காரணமாகவும் இருக்கலாம். ஆனுல், இந்த விஷயத்தில் நாம் உறுதியாகக் கூறமுடியாது. ஏனெனில், இந்த எட்டுப் பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகள், நீர்ப்பாசன அளவு வித்தியாசங்களாலும், நாம் முன்பு 'வாய்ப்பு விதிகள்' என்று பொதுவாகக் குறிப்பிட்ட பலப்பல சிறிய காரணங்களாலும் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடும். வாய்ப்பு விதிகள் ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளேச்சலேப் பாதிக்கும் ; எனவே, அவை பத்திகளுக்குள்ளே உள்ளதுபோலவே பத்திகளின் சராசரிகளினிடையேயும் இருக்கும். ஆகவே, இந்தச் செய்ம்முறை அமைப்பில், வாய்ப்புக் காரணங்கள் Q_1, Q_2 என்ற இரு பகுதிகளிலும் உள்ளன ; நீர்ப்பாசனக் காரணங்கள் பத்திகளிடையே மட்டும் (Q_1-ல்) உள்ளன.

இந்த ஓர் உண்மையில்தான், நம் பிரச்சினேயின் விளக்கம் உள்ளது. வாய்ப்புக் காரணங்கள்மட்டுமே நிகழ்ந்திருக்குமாயின், பத்திகளிடையே உள்ள மாறுபாடும் பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கும் மாறுபாடும் ஒரே அளவை ஒத்திருக்கவேண்டும். இங்குக் கண்டு பிடிக்கப்பட்ட விவர முடிவுகள், பத்திகளிடையே உள்ள மாறுபாடு, பத்திகளுக்குள் இருக்கும் மாறுபாட்டைவிட அதிகமாக இருக்கின்றது என்று காண்பிக்கின்றன. ஆனுல், இது தற்செயலாக நிகழ்ந்த ஒன்ருகவும் இருக்கலாம். நீர்ப்பாசனத்தால் நேர்ந்துள்ள அதிக விளேச்சலும், ஒரு வாய்ப்புக் காரணத்தினுலேயே ஏற்பட்டிருக்கக்கூடும்—ஒரு நாணயத்தைப் பல தடவை சுண்டிப்பார்க்கும் பொழுது தலேகளாகவே வருவதைப்போல்—இதனே நாம் சோதித்துப் பார்க்கவேண்டும். பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளே உண்டாக்கிய காரணங்களும் பத்திகளுக்குள் வேறுபாடுகளே உண்டாக்கிய காரணங்களும் ஒரே மாதிரியானவையா என்பதைச் சோதித்துக் காணவேண்டும்.

நாம் இப்பொழுது ஓர் எடுகோளே ஏற்படுத்துவோம்; 'பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகள் நிகழக் காரணமாயிருந்தவைகளே பத்திகளுக்குள்ளிருக்கும் வேறுபாடுகள் நிகழவும் காரணமாயிருந்தன' என்பதுதான் அது (இது பொய் என்று பின்பு முடிவாகலாம்).

அதாவது, ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்கும் தொடர்பில்லை. இந்த நிலையில் சோதிக்கவேண்டிய முறைகளை 16ஆம் அதிகாரத்தில் படித்தோம். இரண்டு வேறுபாடுகளின் அளவைகளை ஒப்பிட்டு, அவைகள் ஒரே அளவானவைகளா என்று சோதிப்போம்.

அட்டவணை 17-1-ன் பத்திகளிடையே 7 வரையற்ற டிகிரிகள் உள்ளன என்பது தெளிவு (அட்டவணை 16-5-ஐப் பார்க்க); அதுபோல் பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கும் வேறுபாட்டிற்கான வரையற்ற டிகிரிகள் 36. பிறகு வரும் முறைகளை அட்டவணை 17-3-ல் காணலாம். பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாடுதான்

அட்டவணை 17-3

உடன்தொடர்பு இருக்கிறதா என்பதற்குச் சோதனை; ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலும் நீர்ப்பாசன அளவும்

மாறுபாட்டின் மூலம் (1)	வரையற்ற டிகிரிகள் (2) (n)	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (3)	மாறுபாடு s^2 (4)	F (5)	$F_{.99}$ (6)
பத்திகளிடையே (பகுதி Q_1)	7	151.94	21.71		
பத்திகளுக்குள்ளே (பகுதி Q_2)	36	76.39	2.12	10.24	3.18
	43	228.33			

—பகுதி Q_2—நமக்குப் பிழைமாறுபாட்டைக் கணக்கிட ஒரு கருவியாக அமைகிறது என்பது வெளிப்படை. பத்திகளிடையே உள்ள மாறுபாடு 21.71; இது பத்திகளுக்குள்ளிருப்பதான 2·12 என்ற மாறுபாட்டைவிட வெகு அதிகம். எனினும், நமக்குத் தற்சார்பற்ற (objective) சோதனை தேவை. F-என்னும் மாறுபாட்டு விகிதத்தைக் கணக்கிட, $F=21{\cdot}71/2{\cdot}12$ அல்லது 10·24 என்று வருகிறது. F-ன் 99 நூற்றுமான மதிப்பு—$n_1=7$, $n_2=36$ என்றிருக்கும்பொழுது—3·18 (பின் இணைப்பு, அட்டவணை VIIஐப் பார்க்க). இதைவிட, கிடைத்துள்ள மதிப்பு வெகு அதிகம். எனவே, 1 சதவீத அளவில் நாம் சிக்னிஃபிக்கன்ட் சோதனையைச் செயல்படுத்தினால், எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படும். வாய்ப்புக் காரணங்களினாலேயே F-ன் மதிப்பு 1ஐவிட இவ்வளவு தொலைவாக அமைந்திராது. ஆதலால் பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளை உண்டாக்கிய காரணங்கள் வேறு; பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாடுகளை உண்டாக்கிய காரணங்கள் வேறு என்று கூறவேண்டும். நம் முடிவு—ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலும் நீர்ப்பாசன அளவும் தொடர்புடையவை என்பதே.

மேற்கூறப்பட்ட முறையில், தொடர்பின் தன்மை எத்தகையது —அது நேர்கோட்டு முறையிலுள்ளதா, ஈரடுக்குச் சார்பலனைப் போன்றதா, அல்லது மற்ற ஏதாவதொன்றைப்போன்றதா என்ற கருத்துகள் ஒன்றும் கொள்ளவில்லை என்பதனைக் கவனிக்க வேண்டும். தொடர்பின் போக்கு நிச்சயமாகத் தெரியாதிருக்கும் சமயம், தொடர்பு ஏதேனும் உள்ளதா என்றுமட்டும் ஆராய்ந்தோம்; உள்ளது என்ற விடையைக் கண்டோம்.

நேர்கோட்டுமுறைத் தொடர்பைச் சோதித்தல்

ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் பாசனநீர் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்பை, அளவின முறையில் எந்தப் போக்குச் சார்பலனைக் கொண்டு (regression function) விளக்கலாம் என்பதனை இப்பொழுது ஆராய்வது சரியாகும். பற்பல வகைச் சார்பலன்களைப் பற்றிய எடுகோள்களை ஒவ்வொன்றாக அமைத்து, முறையே சோதித்தால், அளவினங்களுடன் பொருத்தமான ஓர் எடுகோள் கிடைக்கும். முதலாவதாக, ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்புப் போக்கு நேர்கோட்டு முறையில் இருக்கும் என்ற எடுகோளை பாவனை செய்வோம்.[8]

முதலாவதாக, இரு மாறிகளுக்கும் ஒரு நேர்கோட்டை இணைத்துப் பார்க்கவேண்டும். இதற்கு அட்டவணை 17-1-ல் உள்ள 8 பத்திகளின் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தவேண்டும். இவைகளினிடையே உள்ள வேறுபாட்டை Q_1 என்பது (மொத்த வேறுபாட்டின் பகுதி) குறிக்கிறது —இது ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காட்டும். சராசரி விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்குமுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையை ஒத்திருப்பின், இந்த எட்டுப் பிரிவுச் (பத்தி) சராசரிகளும் ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் அமையும். பத்திகளிடையே இருக்கும் வேறுபாடு முழுவதும் இந்த எடுகோளினாலேயே ஏற்பட்டிருக்கும் எனலாம்.[9] போக்கானது, முழுவதும் நேர்கோட்டு முறையிலில்லாமல், சுமாராக நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்திருப்பின் நேர்கோட்டுப் போக்கால் ஏற்பட்ட

[8] பகுத்தறிவுக்கேற்றவையும் நியாயமானவையுமான எடுகோள்களைத்தாம் சோதிக்கவேண்டும். ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்பை எடுத்துக்கொள்வோம்: நீரை எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் பாய்ச்சலாம் என்று கொள்வோம். அப்பொழுது தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடாக இருக்கும் என்று பாவிப்பது சரியில்லை. ஏனென்றால், நீர் அதிகமாக ஆக விளைச்சலும் எல்லையின்றி அதிகமாகிக்கொண்டே போகும் என்று சொல்வதற்கில்லை. கண்டறிந்த விவரங்களின் வீச்சிலுங்கூட, இந்த நேர்கோட்டுப் போக்கு பகுத்தறிவிற்குகந்ததாக இல்லை. எனினும், செய்முறையைப் படிப்படியாக விளக்கிக் காட்டுதற்காக, நாம் முதற்கண் நேர்கோட்டுப் போக்கை எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம்.

[9] இப்படிக் கூறுவதால் r என்பது ஒன்று என்று சொல்வதாகாது. பிரிவுகளுக்குள்ளே வித்தியாசங்கள் இருக்கும்; இவைகள் நீர் அளவைப் பொறுத்திராது.

வேறுபாட்டைவிட Q_1 என்பது அதிகமாகும்; ஆனால், அந்த அதிகம் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு (சிக்னிஃபிக்கென்டாக) இராது. அப்படியின்றி, போக்கு நேர்கோட்டுமுறையிலில்லாமல் போனால், மீதியான வேறுபாடு (Q_1-க்கும், நேர்கோட்டுமுறையால் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடியதற்கும் உள்ள வித்தியாசம்—நேர்கோட்டைவிட பத்திச் சராசரிகள் எவ்வளவு சிதறலுற்றுள்ளன என்பது என்றும் சொல்லலாம்) சிக்னிஃபிக்கென்டாக இருக்கும். எனவே, எடுகோளை மாற்றி அமைக்கவேண்டியதாகும்.

17.1ஆம் படத்தில் சராசரி விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்கோடு பொருத்தப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். குறைந்த வர்க்க முறையில் அமைக்கப்பட்ட அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $Y = 5.038 + 0{\cdot}0886X$ என்பதையும் முன்பே கண்டோம் இங்கு X என்பது நீர்ப்பாசன அளவையும், Y என்பது ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சலையும் குறிக்கும். பத்திகளின் சராசரிகளும், மேற்கூறிய நேர்கோட்டின்படி கணக்கிடப்பட்ட Y மதிப்புகளும், அட்டவணை 17-4-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 17-4

நீர் அளவின் விவரமும் ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலும்

(பிரிவுச் சராசரிகளும், $Y = 5.038 + .0886X$ என்ற நேர்கோட்டின்படி கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளும்)

பிரிவில் நீரின் அளவு (அங்குலங்களில்)	பிரிவிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை	பிரிவின் சராசரி விளைச்சல்	(நேர்கோட்டுப் போக்கு) கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்கள் (டன்களில்)	சராசரி விளைச்சலுக்கும் கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சலுக்குமுள்ள வித்தியாசம்		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
				$(\bar{Y}_p - y_c)$		
	f	$\bar{Y}_p$	y_c	d	d^2	fd^2
0	6	3.88	5.04	—1.16	1.3456	8.0736
12	6	5.63	6.10	— .47	.2209	1.3254
18	4	6.80	6.63	+ .17	.0289	.1156
24	6	7.92	7.16	+ .76	.5776	3.4656
30	6	8.98	7.70	+1.28	1.6384	9.8304
36	6	9.27	8.23	+1.04	1.0816	6.4896
48	6	9.02	9.29	— .27	.0729	.4374
60	4	8.42	10.36	—1.94	3.7636	15.0544
						44.7920

வரைபடத்தின்படி பார்த்தாலும், அல்லது இந்த அட்டவணையின்படி பார்த்தாலும், நேர்கோடு நல்ல இணைப்பைத் தருவதில்லை

என்பது தெளிவாகிறது. இணைப்பின் போதாத் தன்மையைக் கணக்கிட B_1 என்ற கூட்டுத்தொகையை — இங்கு 44·7920 என்பது—கண்டு பிடிப்போம். ஒவ்வொரு பிரிவின் சராசரிக்கும் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விளைச்சலுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கமாக்கி, அந்தப் பிரிவின் அளவு எண்ணிக்கைகளால் நிறைபடுத்திய மொத்தம் இந்தத் தொகை. இது Q_1-ன் ஒரு பகுதியாகும்; விளைச்சலுக்கும் பாசன நீர் அளவிற்குமுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டுத் தொடர்பானுல், அந்தத் தொடர்பினுல் பிரிவுகளிடையே ஏற்பட்டிருக்கமுடியாத வேறுபாட்டை இது குறிப்பிடும்.

Q_1-ன் மற்ருெரு பகுதியைக் கணக்கிடும் வழி அட்டவணை 17-5-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. இதை A_1 என்று குறித்தால், அது இந்த எடுத்துக்காட்டில் 107.15 என்று வருகிறது. இது நேர்கோட்டுத் தொடர்பினுல் ஏற்படக்கூடிய வேறுபாட்டைக் காட்டும். அட்டவணை 17-5-ன் மூன்ரும் பத்தியிலுள்ளவைகள், மொத்தச் சராசரியான 7·48-லிருந்து வித்தியாசமாக உள்ளன. இதற்குக் காரணம் கருதப்பட்ட எடுகோள்தான்; நாம் $Y = 5·038 + 0·0886X$ என்ற சமன்பாடு, இரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை நன்கு காட்டுகிறது என்று எண்ணியிருப்பதால், இரண்டும் வேருக இருக்கின்றன. எனவே, பாசன நீர் அளவுகளால், ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சல் இந்த எடுகோளிற்கேற்ப எப்படிப் பாதிக்கப்படுகிறது என்பதை, மொத்த மாறுபாடான 107·15 என்பது குறிக்கிறது.

அட்டவணை 17-5

விளைச்சலுக்கும் பாசன நீர் அளவிற்குமுள்ள தொடர்பு, நேர் கோடானுல், அதனுல் ஏற்படக்கூடிய மாறுபாட்டைக் கணக்கிடல்.

நீர் அளவு (அங்குலம்)	கண்டறிந்த விவரங்கள்	நேர்கோட்டுத் தொடர்பு, மதிப்பிடப்பட்ட விளைச்சல் (டன்களில்)	எல்லா விவரங்களின் சராசரி	இவ்விரண்டிற்குமுள்ள வித்தியாசம்		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
				$(y_c - \bar{Y})$		
	f	y_c	$\bar{Y}$	d	d^2	fd^2
0	6	5.04	7.48	—2.44	5.9536	35.7216
12	6	6.10	7.48	—1.38	1.9044	11.4264
18	4	6.63	7.48	— .85	.7225	2.8900
24	6	7.16	7.48	— .32	.1024	.6144
30	6	7.70	7.48	+ .22	.0484	.2904
36	6	8.23	7.48	+ .75	.5625	3.3750
48	6	9.29	7.48	+1.81	3.2761	19 6566
60	4	10.36	7.48	+2.88	8.2944	33.1776
						107.1520

இவைகளின் மொத்தம் 151·94 என்பது; எனவே, $A_1 + B_1 = Q_1$. நேர்கோட்டுத் தொடர்பு என்ற எடுகோளிற்கிணங்க, நாம் Q_1 என்ற பகுதியை இரு பிரிவுகளாக்கிவிட்டோம். A_1 என்ற பிரிவு நேர் கோடு என்ற எடுகோளினுல் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடியதையும், B_1 என்ற பிரிவு அந்த எடுகோளினுல் ஏற்படாத வேறுபாடுகளையும் குறிக்கும். முழுமைத் தொகுதியில் தொடர்பு ஒழுங்காக நேர் கோட்டு முறையில் அமைந்திருந்தாலும், நாம் இந்த மாதிரியில் சிறு வித்தியாசங்களை எதிர்பார்ப்போம். ஆனுல், அப்படி மாதிரி ஏற்ற விறக்கங்களால் ஏற்படக்கூடிய வேறுபாட்டிற்கு எல்லைகள் உண்டு. இங்கு B_1 என்பதனை ராண்டம் காரணங்களால் நிகழக்கூடியதாகக் கருதமுடியுமா என்பதே கேள்வி; இல்லையெனில் நாம் கருதிய எடுகோள் தவருனதாகும்.

நீர் அளவால் இல்லாமல், ஏனைய ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்ட வேறுபாடுகளை அளப்பதற்காக Q_2 என்ற மொத்த வேறு பாட்டின் ஒரு பகுதியை முன்பே கணக்கிட்டுள்ளோம். எனவே, Q_2 என்பது ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்படக்கூடியவைகளுக்கு ஒரு குறியீடாக அமையும். நாமும் அதனைப் பயன்படுத்தி, Q_1-ல் இவைகள் நிகழக்கூடியதற்கான மாதிரி எல்லைகளை அமைக்கலாம். பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கக்கூடிய வேறுபாடுகளை அளக்கும் Q_2 என்பதனை அளவுகோலாக வைத்து, B_1 என்பது ராண்டம் காரணங்களால் நிகழ்ந்திருக்கக்கூடுமா, கூடாதா என்பதனைச் சோதிப்போம்.

இவ்விரண்டிற்கும் பொருத்தமான வரையற்ற டிகிரிகளைக் கவனித்தே, Q_1-ஐயும், B_1-ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டும். Q_2-க்கான டிகிரிகளை முன்பே கண்டுபிடித்தாயிற்று. அடியில் காணும் அட்டவணைமுறைச் சுருக்கம் தேவைப்பட்ட கணக்குப் படிகளை விளக்கும்.

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற டிகிரிகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	மாறுபாடு
பத்திகளிடையே (ரெக்ரஷனினுல் ஏற்பட்ட A_1-பிரிவு) ...	1	107.15	
நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கம் (பிரிவு B_1) ...	6	44.79	7.47
பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த மாறுபாடு (பகுதி Q_1) ...	7	151.94	

Q_1-லுள்ள 7 வரையற்ற டிகிரிகள், A_1 பிரிவிற்கு 1 ஆகவும் B_1 பிரிவிற்கு 6 ஆகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. ஓரடுக்குச் சமன் பாடான $y = a + bx$ என்பதனை A_1-பிரிவுக்கு ஒன்றே ஒன்று வரையற்ற டிகிரி என்று வைத்தது புலனுகும். y-ன் மதிப்புகள்

மாறுவதற்கு b என்ற கெழு இருப்பதுதான் காரணம்; b என்பது சுழியாகிவிட்டால், $y=a$ என்று வரும்; அப்பொழுது y-ன் மதிப்புகளெல்லாம் மாறிலிகளாகிவிடும். எனவே, b என்ற சரிவுதான், (slope) ஒரு நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்த புள்ளிகளிடையே இருக்கக்கூடிய வரையற்ற டிகிரி. B_1 என்பதற்கு நாம் 8 புள்ளிகளைக்கொண்டு இணைக்கப்பெற்ற ஒரு நேர்கோட்டைக் காண்கிறோம். இரண்டே இரண்டு புள்ளிகள் இருப்பின், அவைகள் நேர்கோட்டின் மேலேயே அமையும்; மூன்று புள்ளிகள் இருப்பின், வித்தியாசப் படக்கூடிய புள்ளி 1 தான்; அதே முறையில் 8 புள்ளிகளுக்கு, வித்தியாசப்படக்கூடியவை 6 தான். ஆக, குறித்த ஓர் இணைப்புக் கோட்டிலிருந்து மாறுபடுவதற்கான வரையற்ற டிகிரிகள் = கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை — சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை.

44·79 என்பதை 6ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது Q_2 என்ற பகுதியுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கக்கூடிய மாறுபாட்டின் (சராசரி வர்க்கம்—mean square) அளவாகும். நம் எடுகோளிற்கான சோதனை இவ்விரண்டு மாறுபாடுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதாகும். விவரங்களை அட்டவணை 17-6-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 17-6

நேர்கோட்டுப் போக்கு என்ற எடுகோளின் சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம்		வரையற்ற டிகிரிகள் n	மாறுபாடு s^2	F	$F_{.99}$
ரெக்ரஷன் நேர்கோட்டிலிருந்து விலக்கம் (பிரிவு B)	...	6	7.47		
பத்திகளுக்குள்ளே (பிரிவு Q_2)	...	36	2.12	3.52	3.35

ராண்டம் காரணங்களால் உண்டாகும் மாறுபாட்டைப் 'பத்திகளுக்குள்ளே' மாறுபாடு அளக்கும்; இவைகளின் மாறுபாடு 2·12 என்பது, போக்கு நேர்கோட்டிலிருந்து எட்டுச் சராசரிகளுடைய விலக்கங்களுக்கும் இவைபோன்ற ராண்டம் காரணங்களே பொறுப்பாக இருந்தால், அவற்றின் மதிப்பும் இதே அளவைப்போன்றிருக்க வேண்டும். உண்மையில், அந்த அளவானது, மிக்க பெரிதாக—7·46 ஆக—உள்ளது. ஆனாலும், சாதாரணமாகப் பார்வையிட்டு மாத்திரம், இவ்விரண்டும் வெவ்வேறு மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்களுக்கு அப்பாற்பட்ட வித்தியாசமுடையவை என்று கூறலாகாது. திருத்தமான ஒரு சோதனையை உபயோகிக்கவேண்டும். மேற்கண்ட

அட்டவணையின் (4), (5)ஆம் பத்திகளிலுள்ள விவரங்கள் இச் சோதனைக்கான அடிப்படையைக் கொண்டவை. நிகழ்ந்துள்ளது போன்றதோ, அதைவிட அதிகமானதோ வித்தியாசம், வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டும் ஏற்பட ஊக அளவை 100-ல் 1-க்கும் குறைவு. எனவே, பத்திகளுக்குள் ஏற்பட்டிருக்கும் வேறுபாடுகளுக்குக் காரணமான ராண்டம் காரணங்கள், இந்த எட்டுச் சராசரிகளும் நேர்கோட்டிலிருந்து வேறுபட்டிருப்பதற்கும் காரணமானவைகளல்ல என்று முடிவு கூறுவோம். ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்கும் தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்திருந்தால் ஏற்பட்டிருக்கும் வித்தியாசத்தைவிடக் காணப்பட்ட வித்தியாசம் அதிகமாகும். ஆகவே, நேர்கோடு, பத்திகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களுக்குச் சரிவரக் காரணங்கள் கூறி விளக்குவதாக இல்லை.

வளைகோட்டுத் தொடர்புச் சோதனை

இப்பொழுது, தொடர்பு ஈரடுக்குப் பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்குமா என்பதைச் சோதிப்போம். ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்கும் உள்ள தொடர்பு இதுபோன்றதா என்பதனைச் சோதிக்க, மேற்கூறப்பட்ட நேர்கோட்டுச் சோதனை முறையையே

அட்டவணை 17-7

ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலும் நீர்ப்பாசன அளவும்
(பிரிவுச் சராசரிகளும் ஈரடுக்குக் கோவையை இணைத்ததனால் கிடைத்த மதிப்புகளும்)

நீர் அளவு (அங்குலம்)	விவரங்களின் எண்ணிக்கை	பிரிவின் சராசரி விளைச்சல் (டன்களில்)	வளைகோட்டிலிருந்து மதிப்பிட்ட விளைச்சல் (டன்களில்)	பிரிவின் சராசரிக்கும் மதிப்பிட்ட விளைச்சல்களுக்குமுள்ள வித்தியாசம்		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	f	$\bar{Y}_p$	y_c	$\bar{Y}_p - y_c$ d	d^2	fd^2
0	6	3·88	3·54	+ ·34	·1156	·6936
12	6	5·63	6·16	— ·53	·2809	1·6854
18	4	6·80	7·17	— ·37	·1369	·5476
24	6	7·92	7·98	— ·06	·0036	.0216
30	6	8·98	8·58	+ ·40	·1600	.9600
36	6	9·27	8·97	+ ·30	0900	.5400
48	6	9·02	9·16	— ·14	·0196	.1176
60	4	8·42	8·52	— ·10	·0100	.0400
						4.6058

பின்பற்றலாம். தொடர்புச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளை மதிப்பிடக் குறைந்த வர்க்க முறையையே கையாளுவோம். எட்டு பத்திச் சராசரிகளையும், அப் பிரிவிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கைகளினால் நிறையாக்கி, இந்த வளைகோட்டை இணைப்போம். இதே அதிகாரத்தின் முதலில் $Y = 3{\cdot}539 + 0{\cdot}2527X - 0{\cdot}002827X^2$ என்ற சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்தோம். இதன் வடிவம் படம் 17.1-ல் உள்ளது. அட்டவணை 17-7-ல் இந்த வளைகோட்டிலிருந்து வித்தியாசங்களைக் கணக்கிட்டு, அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது.

இணைப்பின் போதாத தன்மையை இப்பொழுது 4·61 என்னும் ஈரடுக்கு வளைகோட்டிலிருந்து கிடைத்த வித்தியாசத்தின்—வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை அளக்கிறது. இதனை B_2 என்போம்—இதுவும் Q_1-ன் ஒரு பிரிவே ஆகும். ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்குமுள்ள தொடர்பை ஈரடுக்குக் கோவையினால் விளக்கினால், அந்த விளக்கத்திற்கு அப்பாற்பட்ட வித்தியாசங்களை இந்த எண் குறிக்கும். Q_1-ன் மற்றொரு பிரிவைக் கண்டுபிடிக்க முறைகளை அட்டவணை 17-8 விவரிக்கிறது.

அட்டவணை 17-8

ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலில் நீர்ப்பாசனத்தால் ஏற்பட்ட வித்தியாசங்கள்

வளைகோட்டுமுறை ரெக்ரஷன் என்ற எடுகோளுக்கேற்ப

நீர் அளவு (அங்குலங்கள்)	விவரங்களின் எண்ணிக்கை	ஈரடுக்குக் கோவையிலிருந்து மதிப்பிட்ட விளைச்சல்கள்	எல்லா விவரங்களின் மொத்தச் சராசரி விளைச்சல்			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	f	y_c	$\bar{Y}$	$y_c - \bar{Y}$ d	d^2	fd^2
0	6	3·54	7·48	—3·94	15·5236	93·1416
12	6	6·16	7·48	—1·32	1·7424	10·4544
18	4	7·17	7·48	— ·31	·0961	·3844
24	6	7·98	7·48	+ ·50	·2500	1·5000
30	6	8·58	7·48	+1·10	1·2100	7·2600
36	6	8·97	7·48	+1·49	2·2201	13·3206
48	6	9·16	7·48	+1·68	2·8224	16·9344
60	4	8·52	7·48	+1·04	1·0816	4·3264
						147·3218

தொடர்பு ஈரடுக்குக் கோவை என்ற எடுகோளிற்கு ஏற்ப உண்டாகக்கூடிய வித்தியாசங்களின் கூட்டுத்தொகையான 147·32 என்பதை நாம் A_2 என்போம். (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள மதிப்புகள்,

எல்லா விவரங்களின் சராசரி விளைச்சலான 7·48-லிருந்து வித்தியாசமாகவுள்ளன. ஏனென்றால், நமது எடுகோள் ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலானது நீர் அளவு மாற மாற,

$$Y \quad 3{\cdot}539 + 0{\cdot}2527X - 0{\cdot}002827X^2$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கேற்ப மாறுகிறது என்பது.

அதாவது, இப்பொழுதும் முன்போலவே Q_1 என்ற பகுதியை இரு பிரிவுகளாகப் பிரித்துவிட்டோம். A_2 என்பது நீர்ப்பாசனத்தினால் ஏற்படும் மேற்கண்ட விதிக்குட்பட்ட வேறுபாடுகளைக் குறிக்கும்; B_2 என்பது ராண்டம் காரணங்களாலும் நீர்ப்பாசனத்தினாலும் ஏற்பட்ட வேறுபாடுகளைக் குறிக்கிறது. (குறித்த எடுகோளானது, ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்குமுள்ள தொடர்பைச் சரியாகக் குறிப்பிடவில்லை என்ற அளவில், நீர்ப்பாசனமும் B_2-விற்கு ஒரு காரணமாக அமையும்.) நேர்கோடு எடுகோளிற்கிணங்க பிரிக்கப்பட்டதிலிருந்து, இந்தப் பிரிவு வேறானது என்று சொல்லவேண்டியதில்லை. இப்போதைய பிரிவைக் கீழ்க்கண்டவாறு சுருக்கமாக அமைக்கலாம் :

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற டிகிரிகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	மாறுபாடு
பத்திகளிடையே ஈரடுக்கு ரெக்ரஷனினால் ஏற்பட்டது (A_2 என்ற பிரிவு) ...	2	147·32	
ஈரடுக்கு ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டிலிருந்து ஏற்பட்டது (B_2 என்ற பிரிவு) ...	5	4·61	·92
பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த மாறுபாடு (Q_1 பகுதி) ...	7	151·93	

Q_1 பகுதிக்கான 7 வரையற்ற டிகிரிகளை இப்பொழுது B_2 பிரிவிற்கு ஐந்தாகவும், A_2 பிரிவிற்கு இரண்டாகவும் பிரித்துள்ளோம். இதுபோன்ற பங்கீட டிற்குக் காரணங்கள் முன் கூறப்பட்டவைகளைப் போன்றவைகளே. B_2 என்பதுதான் நமக்குத் தேவையானது; மூன்று மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு வளைகோட்டை எட்டுப் புள்ளிகளுக்கு இணைத்துள்ளதால், இதற்கான வரையற்ற டிகிரிகள்: $8-3=5$.

4·61 என்பதை 5ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் 0·92 என்பது Q_2வுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டிய மாறுபாடாகும். முன்போலவேதான் இப்பொழுதும் ஏற்பட்டுள்ள மாறுபாடு, ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்டுள்ளதைவிட வித்தியாசப்பட்டுள்ளதா என்று சோதிக்க வேண்டும். மாறுபாடுகளை ஒப்பிடுவதற்காக அட்டவணை 17-9-க்கு வருவோம்.

அட்டவணை 17-9

வளைகோட்டுத் தொடர்புக்கான சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற டிகிரிகள் n	மாறுபாடு s^2	F
(1)	(2)	(3)	(4)
இருபடி வளைகோட்டிலிருந்து விலக்கம் (பிரிவு B_2) ...	5	·92	
பத்திகளுக்குள்ளே (பகுதி Q_2) ...	36	2·12	0·43

இங்கு முதல் வரிசை விலக்கம், இரண்டாம் வரிசையினதைக் காட்டிலும் குறைவாகவே உள்ளது; இரண்டாம் வரிசையிலிருக்கும் பத்திகளுக்குள் இருக்கும் மாறுபாடுதான் நமக்கு அளக்கும் கருவி. எனவே, F-ன் மதிப்பு 1-க்கும் குறைவாகிறது. சோதனையை இத்துடன் நிறுத்திவிட்டு, கண்ட முடிவுகள் எடுகோளிற்கு—ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்குமுள்ள தொடர்பை, மேலே கூறப்பட்ட ஈரடுக்கு வளைகோட்டுக் கோவை சரிவரக் காட்டுகிறது என்பதற்கு—முரண்பாடாக இல்லை என்று கூறிவிடுவோம். ரெக்ரஷன் கோட்டிலிருந்து ஏற்பட்டுள்ள விலக்கங்கள், வாய்ப்புக் காரணங்களால் ஏற்பட்டவைகள் என்று கூறலாம்.

இந்த நிலை வரையில்தான் வெவ்வேறு எடுகோள்களை (அதாவது, வெவ்வேறு சார்பலன்களை) சோதனை செய்யவேண்டும்; அதாவது, ரெக்ரஷன் கோட்டிலிருந்து கண்டறிந்த விவரங்களுக்குள்ள மாறுபாடு, Q_2 என்ற பகுதியின் மாறுபாட்டைவிட வித்தியாசப்பட்டிருப்பதை, வாய்ப்புக் காரணங்களாலேயே விளக்கிவிடலாம் என்ற நிலை வரும்வரை சோதனை செய்துகொண்டே போகலாம். P என்பது ·05 என்று கருதுவோம்—அப்பொழுது $F_{.95}$ என்பது, பின் இணைப்பு அட்டவணை VII-லிருந்து 2·48 என்று வரும்; எனவே, எடுகோள் நிராகரிக்கப்படமாட்டாது. P என்பது ·01 என்றால், $F_{.99}$ மதிப்பு 3·59 என்பதாகும். ஈரடுக்கு வளைகோடு, விவரங்களுக்கு மிகவும் இணைந்தவாறு அமைந்துவிட்டதால், நமக்கு F-ன் மதிப்பு 1-க்கும் குறைவாகக் கிடைத்துள்ளது.

ஆகவே, ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்குமுள்ள தொடர்பைக் குறிப்பிட ஓர் எடுகோளைப் பெற்றுவிட்டோம்—கண்டறிந்த விவரங்கள் இந்த எடுகோளை மறுப்பதாக இல்லை. எடுகோளை ஏற்பதாக முடிவு அமையவில்லை என்பதும் கவனிக்கத் தக்கதாகும். வேறு பல வகையான எடுகோள்களும், இதே

விவரங்களை மறுப்பதாக அமையாமல் போகலாம்; அல்லது இதனைவிட இன்னமும் நெருங்கிய இணைப்பையும் தரலாம்.[10] ஆதலால், கண்டறிந்த விவரங்கள் எடுகோளை மறுப்பதில்லை என்று மட்டுமே இப்பொழுது கூறமுடியும். பகுத்தறிவு முறையில் இந்த எடுகோள் ஏற்கக்கூடியதாகத் தோன்றின், தற்சமயத்திற்கேனும் நாம் சோதனையை நிறுத்திக்கொள்ளலாம்.

தொடர்பு அளவைகளைப்பற்றிய சுருக்கமான சில கருத்துகள்

இரு மாறிகளிடையே இருக்கக்கூடிய தொடர்பை மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கலாமென்று, இந்த அதிகாரத்தின் முன் பகுதியில் விளக்கினேம். இந்தப் பிரச்சினை, 44 தனி நிலப் பகுதிகளில் பயிராக்கப்பட்ட ஆல்ஃபால்ஃபாவின் விளைச்சல்களினுல் ஏற்பட்டது. இவைகளினிடையே உள்ள மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்க, ஒவ்வொரு விளைச்சலும், மொத்தச் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு விலகியுள்ளது என்று கண்டு, அவ் விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கி, அவைகளைக் கூட்டாக்கி, $\Sigma(X-\bar{X})^2$ அல்லது Σd^2 என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினேம். அதன் மதிப்பு 228·33 என்பதாகும்.

சோதனை முறைகளில் இந்த மொத்த வேறுபாட்டைப் பல வகைகளில் பிரித்துள்ளோம். இம் முறைகளையே இப்பொழுது வேறு வகையில் ஒழுங்குபடுத்தித் திரும்பக் கூறுவோம். அதுகால், முன்பே விளக்கப்பட்ட உடன்தொடர்பு முறைகளுக்கும் இப்பொழுது கூறப்பட்ட மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகளுக்குமுள்ள தொடர்பைப்பற்றியும் கூறி, அதே வகையைச் சார்ந்த மற்றுமோர் அளவையையும் விரிப்போம்.[11]

ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சலுக்கும் நீர்ப்பாசன அளவிற்குமுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டுத் தொடர்பு என்று முதலில் எடுத்துக் கொண்டோம்; அதனையொட்டி வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை, Q_2, A_1, B_1 என்ற பிரிவுகளாக்கினேம். இவைகளைப் பாகுபாட்டு முறை I என்று கூறுவோம் (அட்டவணை 17-10).

[10] மூன்று மாறிலிகளைக்கொண்ட இந்த வளைகோட்டைவிட்டு, நான்கு அல்லது அதிக மாறிலிகளைக் கொண்ட பல அடுக்குக் கோவைகளையும் இணைத்துப் பார்க்கலாம். அதிக அடுக்குடைய (higher degree) வளைகோடு, இதைவிடக் குறைவான விலக்கங்களைத் தரலாம்; F-ன் மதிப்பும் அதேபோன்று குறையும். விஞ்ஞானமுறையில், எப்பொழுதும் குறித்த பல சார்பலன்களில் எளிதானதையே தேர்ந்தெடுப்பதென்பதொரு பழக்கமுள்ளது. அவசியமற்ற குழப்பங்கள், தேவையில்லாத எண்ணங்கள் அல்லது தேவையில்லாத மாறிலிகளைக் கொண்ட வளைகோட்டுத் தொடர்புகள் முதலியவற்றைக் கண்டிப்பாகத் தவிர்க்கவேண்டும்.

[11] இங்குப் பயன்படுத்தப்படும் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட விவரங்களுக்கும் ரெக்ரஷன் சார்பலன்களுக்கும், அட்டவணை 17-1-ம், படம் 17.1-ம் பார்க்க.

அட்டவணை 17-10

பாகுபாட்டு முறை I: ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல்கள்; நேர்கோட்டு எடுகோள்; வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையின் பிரிவுகள்.

பிரிவு	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	உடன்தொடர்பின் அளவு
Q_2: நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்பற்ற காரணங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் (பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாடு) ...	76·39	$r^2_{yx}=\frac{s^2_{y_c}}{s^2_y}=\frac{\Sigma d^2_{y_c}/N}{\Sigma d^2_y/N}=\frac{\Sigma d^2_{y_c}}{\Sigma d^2_y}=\frac{107\cdot15}{228\cdot33}=0\cdot4693$
A_1: நேர்கோட்டு முறையில் தொடர்பிருந்தால், நீர்ப்பாசன அளவிற்குத்தொடர் புள்ள—வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களுக்கும் மொத்தச் சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கம்) ...	107·15	$r_{yx}=+0.69$
B_1: பத்திகள் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களின் விலக்கம் (நேர்கோட்டுத் தொடர்பால் விளக்கப்படாத, பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடு) ...	44·79	
Q: வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை ...	228·33	

இந்த I பாகுபாட்டில் நாம் Q என்னும் வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரித்துள்ளோம்: (1) Q_2 என்னும் பிரிவுப் பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாட்டைக் (நீர் அளவிற்குத் தொடர்பற்றது) குறிப்பதாகும். (2) A_1 என்ற பிரிவு கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களிடையே உள்ள மாறுபாட்டைக் குறிப்பதாகும் (நேர்கோட்டுத் தொடர்பு என்ற அடிப்படையில் கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்கள்). (3) நேர்கோட்டுத் தொடர்பால் விளக்கப்படாததும் பத்திகளிடையே உள்ளதுமான வேறுபாட்டை B_1 என்னும் பிரிவு குறிப்பதாகும். A_1-ம், B_1-ம் சேர்ந்தால் Q_1 என்ற பகுதி வரும் என்பது நமக்குத் தெரியும். இது பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டை அளக்கிறது. இந்தக் கணக்குகளிலிருந்து—வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைப் பிரிப்பதிலிருந்து—எவ்வாறு உடன்தொடர்புக் கெழுவைக் கண்டுபிடிக்கலாமென்பதை, அட்டவணை 17-10-ன் இறுதிப் பத்தியில் விளக்கியுள்ளோம். r^2 என்பதற்குக் கொடுக்கப்பட்ட முதல் கோவையானது (9·9) என்ற சூத்திரமே. வர்க்கமாக்கப்பட்ட

இந்தக் கெழு—கணக்கிடப்பட்ட Y மதிப்புகளின் மாறுபாட்டிற்கும் கண்டறிந்த Y மதிப்புகளின் மாறுபாட்டிற்கும் உள்ள விகிதமாகும். X, Y இரண்டும் காரணத் தொடர்பு கொண்டிருந்து, (N என்பது ஒருபுறச் சார்புடையதாகவிருந்தால்) r^2 என்பது X மாறியிலுள்ள வேறுபாடுகளினுல் Y மாறியின் மதிப்புகளில் ஏற்படும் பகுதி யாவதும், Y மாறியின் மாறுபாட்டின் ஒரு பகுதியும் ஆகும் எனக் கருதலாம் என்று முன்பே கூறியுள்ளோம். இந்த விகிதத்தின் பகுதியையும் விகுதியையும் (numerator and denominator) N என்பதனுல் பெருக்கினுல், r^2 என்பது Σd_{yc}^2 என்பதற்கும் (Y-ன் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளுக்கும் $\bar{Y}$-க்கும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை) Σd_y^2 என்பதற்கும் (கண்டறிந்த Y மதிப்புகளுக்கும், $\bar{Y}$-க்கும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை) உள்ள விகிதமாக அமையும். ஆனுல், இது A_1 என்பதற்கும் Q என்பதற்குமுள்ள விகிதமே.

வேறுமுறையில், Q_2, A_2, B_2 என்று பிரிப்பதற்கான விவரங்களை அட்டவணை 17-11 பாகுபாட்டு முறை II-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 17-11

பாகுபாட்டு முறை II: வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையின் பிரிவுகள், ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல்கள் (ஈரடுக்குக் கோவை எடுகோள்)

பிரிவு	வர்க்கங்களின கூட்டுத் தொகை	தொடாபின் அளவு
Q_2: நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்பற்ற காரணங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் (பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாடு)	76·39	
A_2: ஈரடுக்கு வளைகோட்டு முறையில் தொடர்பிருந்தால் நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்புள்ள வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களுக்கும் மொத்தச் சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கம்)	147·32	$i_{yx}^2 = \frac{s_{y_c}^2}{s_y^2} = \frac{\Sigma d_{y_c}^2}{\Sigma d_y^2} = \frac{147·32}{228·33} = 0·6452$; $i_{yx} = 0·80$
B_2: பத்திகள் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விளைச்சல்களின் விலக்கம் (ஈரடுக்கு வளைகோட்டுமுறைத் தொடர்பால் விளக்கப்படாத, பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடு)	4·61	
?: வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை	228·33*	

* மொத்தக் கூட்டுத்தொகையும், மூன்று பிரிவுகளின் மொத்தமும் 0·01 அளவில் மாறியுள்ளன. இதற்குக் காரணம், கணக்கிடும்பொழுது தசமஸ்தானங்களை முழுதாகத் தோராயமாக்குவதே (rounding off).

வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகையினைப் பாகுபடுத்திய இந்தப் புதுமுறையான முன்னிலைப்படுத்தலிலிருந்து பக்க-விளைவாக (by-product) நமக்குக் கிடைப்பது தொடர்புக் குறியீடுதான். s_{yc}^2 என்பது முன்போலவே கணக்கிடப்பட்ட Y-மதிப்புகளின் மாறுபாடாகும்—ஆனால், இப்பொழுது கணக்கிடுவதற்கான அடிப்படை $Y = 3{\cdot}539 + 0{\cdot}2527X - 0.002827X^2$ என்ற ஈரடுக்குக் கோவைதான். (d_{yc} என்பது இதுபோல் கணக்கிடப்பட்ட ஒரு Y மதிப்பிலிருந்து, $\bar{Y}$ என்பதற்குள்ள விலக்கம் என்பது தெளிவு). ஈரடுக்குச் சார்பலன், இரு மாறிகளுக்குமுள்ள தொடர்பை விளக்குகிறது என்று எண்ணினால், இது அதுபோல் 'விளக்கப்பட்ட' மாறுபாட்டைக் குறிக்கும். தொடர்புக் குறியீட்டை s_{yc}^2-க்கும், s_y^2-க்கும் உள்ள விகிதமாகவும் கணக்கிடலாம்; அல்லது அதற்குச் சமமான Σd_{yc}^2-க்கும், Σd_y^2-க்கு முள்ள விகிதமாகவும் கணக்கிடலாம். A_2 என்பதற்கும் Q என்ற மொத்தக் கூட்டுத் தொகைக்கும் உள்ள விகிதமே இது.

இப்பொழுது B_1 என்று பாகுபாடு I-லும், B_2 என்று பாகுபாடு II-லும் குறிக்கப்பட்டுள்ளவைகளைக் கவனிப்போம். பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடானது, ($Q_1 = 151{\cdot}94$) நீர்ப்பாசன அளவு வித்தியாசங்களினால், ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல்களில் ஏற்பட்ட விளைவுகளின் பயனாகவோ, அல்லது வாய்ப்புக் காரணங்களின் பயனாகவோ இருக்கலாம் என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். பாகுபாடு I-ல், இதனை A_1, B_1 என்ற இரு பிரிவுகளாக்கினோம். முதலாவது, தொடர்புப் போக்கு நேர்கோட்டு முறையில் இருக்கும் என்ற அடிப்படையில் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய நீர்ப்பாசன விளைவுகளைக் குறிப்பதாகும்; இரண்டாவது, பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த வேறுபாட்டையும், இந்த நேர்கோடு எடுகோள் விளக்குவதில்லை என்பதன் ஓர் அளவாகும். இதுபோல் விளக்காததற்குக் காரணம், பத்திகளிடையே உள்ள வாய்ப்பு வழி மாறுதல்களாகவேனும் இருக்கலாம்; அல்லது குறைபாடுடைய எடுகோளை நாம் தேர்ந்தெடுத்திருப்பதாலும் இருக்கலாம். அட்டவணை 17-6-ல் நிகழ்த்திய சோதனையின் பயனாக, B_1 என்பது வாய்ப்பு வழி மாறுதல்களைவிட மிக அதிகமாக விருப்பதைக் கண்டதால் நேர்கோட்டு முறை எடுகோளை நிராகரித்தோம்.

அதே போலவே, பாகுபாடு II-ல், B_2 என்ற மீதி வேறுபாடு, பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த வேறுபாட்டையும், ஈரடுக்குக் கோவை எடுகோள் விளக்குவதில்லை என்பதன் ஓர் அளவுதான். இங்கும், இது விளைச்சல்களின்மேல் நீர்ப்பாசன அளவின் விளைவுகளையும் குறிப்பிடலாம்; அல்லது வாய்ப்புக் காரணங்களின் விளைவுகளையும் குறிப்பிடலாம். அட்டவணை 17-9-ல் நிகழ்த்திய

சோதனை, மீதி வேறுபாடு B_2 என்ற அளவில் ராண்டம் காரணங்களினால்மட்டும் ஏற்பட்டிருக்கலாம் என்பதனைக் காட்டிற்று. எனவே, கண்டறிந்த விவரங்கள், ஈரடுக்குக் கோவை முறையில் விளைச்சலுக்கும் நீர் அளவிற்கும் தொடர்புள்ளது என்ற எடுகோளுக்குப் பொருந்தாததாக இல்லை என்று முடிவு கூறினோம்.

தொடர்பு விகிதம் (Correlation Ratio)

பாகுபாடு I, பாகுபாடு II முறைகளில் விளக்கியுள்ள ஆய்வு முறைகள்வழியே சென்று, பல அடுக்குப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை (higher degree polynomials) இணைக்கலாம். அப்படி அதிகமாக மாறிலிகளைப் பயன்படுத்துவதால், மீதி வேறுபாட்டின் அளவையும் குறைக்கலாம். எவ்வளவு பத்திகளுள்ளனவோ, அவ்வளவு மாறிலிகளைக் கொண்ட கோவைவரை இம் முறையில் செல்லலாம். (17-1 ஆம் அட்டவணையில் 8 பத்திகள் உள்ளன.) கடைசியான இந்தத் தொடர்புப் போக்குச் சார்பலன், கண்டறிந்த எல்லாப் பத்திச் சராசரிகளுக்கும் பொருத்தமாக அமையும். அப்பொழுது பாகுபாடு III என்று (அட்டவணை 17-12) குறிப்பிட்டுள்ள கீழ்க்கண்ட பிரிவுகள்

அட்டவணை 17-12

பாகுபாடு III: வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையின் பிரிவுகள்—ஆல்ஃபால்ஃபா விளைச்சல்கள்; தொடர்பு விகிதம் கணக்கிடுதலை விவரிக்கிறது.

பிரிவு	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	தொடர்பு அளவை
Q_2: நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்பற்ற காரணங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் (பத்திகளுக்குள் இருக்கும் வேறுபாடு)	76·39	$\eta^2_{y_x} = \frac{s^2_{my}}{s^2_y} = \frac{\Sigma d^2_{my}/N}{\Sigma d^2_y/N}$ (17·10)
Q_1: நீர்ப்பாசன அளவிற்குத் தொடர்புள்ள, வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை (பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த வேறுபாடு) ...	151·94	$= \frac{\Sigma d^2_{my}}{\Sigma d^2_y} = \frac{151{\cdot}94}{228{\cdot}33} = 0{\cdot}6654$ $\eta_{y_x} = 0{\cdot}82$
Q: வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகை ...	228·33	

நிகழும். s^2_{my} என்பது பத்திகளின் சராசரிகளுக்கும் பொதுவான சராசரிக்குமுள்ள மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. ஒவ்வொரு பத்திச் சராசரிக்கும் பொருத்தமான ஒரு தொடர்புப் போக்குச் சார்பலன் இருக்குமென்றால், ஒவ்வொரு பத்தியின் சராசரியும் ஒரு கணக்கிடப்

பட்ட மதிப்பாகிவிடும் (இதை நாம் Y_c என்று, முன்பு குறித்துள்ளோம்). அதாவது s_{my}^2 என்பது, முன் பாகுபாடுகளில் (I, II) s_{yc}^2 என்று குறித்துள்ளவைகளைப் போன்றது. s_{my}^2-க்கும் s_y^2-க்கும் உள்ள விகிதம் (Q_1-க்கும், Q-க்கும் உள்ள விகிதம்) r^2, i^2-களைப் போன்ற ஓர் அளவையாகும். அதனைத் தொடர்பு விகிதம் என்றழைத்து, η (eta—யீட்டா) என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடுவோம். (கார்ல் பியர்ஸன் என்பவர்தான் முதன்முதலில் இந்தக் குறியைப் பயன்படுத்தினர். அப்பொழுது, இப்பொழுதுள்ளதுபோல், கிரேக்க எழுத்துகளை முழுமைத் தொகுதி அளவைகளுக்கு மாத்திரம் பயன்படுத்தும் வழக்கம் இருக்கவில்லை. இங்கு இதே குறியை மாதிரி அளவிற்கும், முறையான முழுமைத் தொகுதியின் அளவிற்கும் பயன்படுத்துவோம்.)

பாகுபாடு III-ல், வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை இரு பிரிவுகளாகத்தான் பிரிவாக்கப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும்—Q_2 என்ற பகுதி பத்திகளுக்குள்ளே இருக்கும் வேறுபாட்டையும், Q_1 என்ற பகுதி பத்திகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டையும் கணக்கிடுகின்றன. B_1, B_2 போன்ற பிரிவுகள் ஒன்றும் இல்லை. பத்திகளின் சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களுக்கு வாய்ப்பு வழி காரணங்கள் இருப்பதற்கு இடமே இல்லை. அதாவது, சார்புடைய மாறியின் (இங்கு விளைச்சல் அளவுகள்) பத்திகளிடையே உள்ள மொத்த வேறுபாடுகளும் தனித்தமாறியினுலேயே (இங்கு நீர்ப்பாசன அளவு) ஏற்பட்டிருக்கவேண்டும் என்று எண்ணினுற்போல் ஆகிறது. எனவே, இந்த நிலையில் யீட்டா (eta) என்பதனைத் தொடர்பை அளவிடுவதாகக் கருதினுல், அது இரு மாறிகளிடை உள்ள தொடர்பின் உச்ச வரம்பைக் காட்டும். r என்ற கெழு தொடர்பின் அளவைக் குறைவாகக் காட்டும்—ஏனென்ருல், தொடர்புப் போக்கு நேர்கோட்டு முறையில் இல்லாதிருக்கலாம்; தொடர்புக் குறியீடும் இதுபோலவே, உண்மையாக உள்ள தொடர்பைக் குறைவாகக் காட்டக்கூடும். ஆனுல், உண்மையான தொடர்பின் அளவு, யீட்டாவைவிட அதிகமாக இருக்கமுடியாது.

தொடர்பு விகிதத்தின் சில தன்மைகள்: $\eta_{yx} = \frac{s_{my}}{s_y}$ என்ற சூத்திரத்தினுல், η_{yx} என்பது சுழியாக அமையும்நிலை, பத்திச் சராசரிகளிடையே வித்தியாசமில்லாதபோதுதான் என்பது தெளிவாகிறது. எல்லாச் சராசரிகளும் ஒரே வரிசையான (horizontal) நேர்கோட்டில் அமையும்; இந்நிலையில் இரு மாறிகளுக்கும் தொடர்பு இருக்க முடியாது என்பது வெளிப்படை. யீட்டா ஒன்ருக வேண்டுமானுல், Q_2-என்ற பிரிவு சுழியாக யிருக்கவேண்டும். அதாவது பத்திகளுக்குள்ளே வேறுபாடே இருக்கக்கூடாது. இந் நிலையில்

பத்திகளினிடையே உள்ள வேறுபாடுதான், Y-மதிப்புகளினிடையே உள்ள மொத்த வேறுபாடாகும். எனவே, யீட்டாவின் எல்லைகள் சுழியும், ஒன்றும் (0, 1).

தொடர்பு விகிதம் சுழிக்கும் குறைவாக இருக்கவே இருக்காது. தொடர்புப் பட்டியலை நன்கு நோக்குவதால், இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு நேரிடையானதா, எதிரிடையானதா அல்லது மாறும் தன்மையுடையதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

சாதாரணமாக, ஒரு தொடர்புப் பட்டியலில் (அட்டவணை 9-7-ஐப் போன்றது) விவரங்களைப் பத்தி வழியிலும், வரிசை வழியிலும், பாகுபாடு செய்திருப்பார்கள். அதாவது, அங்கு X வரிசைகளுமிருக்கும்; Y வரிசைகளுமிருக்கும். எனவே, அந்தப் பட்டியலுக்கு இரண்டு தொடர்பு விகிதங்களைக் கணக்கிடலாம்— η_{yx} என்பதை முன்பே கூறினோம் ; η_{xy} என்பது மற்றொன்று. அதனைக் கணக்கிடச் சூத்திரம் ;

$$\eta_{xy} = \frac{s_{mx}}{s_x} \tag{17·11}$$

இங்கு s_{mx} என்பது X வரிசைச் சராசரிகளுக்கும், மொத்த X சராசரிக்கும் உள்ள தரவிலக்கம் (standard deviation). η_{xy}-ம், η_{yx}-ம் சமமாக விருக்கவேண்டு மென்பதில்லை ; சாதாரணமாக, சமமாகவும் இருக்காது.

தொடர்பு விகிதத்தின் திருத்தம் : கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்து, அவைகளைத் தொடர்புப் பட்டியல் முறையில் அமைக்க முடிந்தால்தான், η-வைப் பயன்படுத்தலாம். சிலவே விவரங்கள் இருப்பினும், அவைகளைப் பட்டியலில் அமைத்தால் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஒவ்வொரு விவரமே வந்தாலும், s_{my} என்பது s_y-க்கு சமமாகிவிடும் ; ஆதலால் η-வுக்கான மதிப்பு 1. சில விவரங்களைக்கொண்டு பல பிரிவுகளை (வரிசைகளாகவோ, பத்திகளாகவோ) அமைத்துக் கணக்கிடப்படும் தொடர்பு விகிதத்தால் பயனில்லை.

முன்பு, தொடர்புக் குறியீட்டிற்குத் திருத்தம் அமைத்ததைப் போல், தொடர்பு விகிதத்திற்கும் அமைக்கலாம். m என்பது வரிசைகளையோ (η_{xy}-க்கு), பத்திகளையோ (η_{yx}-க்கு) குறிப்பிட்டால், திருத்தப்பெற்ற யீட்டாவானது, கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தால் கண்டு பிடிக்கப்படும் :

$$\bar{\eta}^2 = 1 - \left\{(1 - \eta^2)\left(\frac{N-1}{N-m}\right)\right\} \tag{17·12}$$

எடுத்துகாட்டில்

$$\bar{\eta}^2 = 1 - \left\{(1 - 0.6654)\left(\frac{44 - 1}{44 - 8}\right)\right\}$$
$$= 0.6004$$
$$\bar{\eta} = 0.775$$

என்று வருகிறது. 0.82-லிருந்து 0·775 குறைந்துள்ளது கவனிக்கத் தக்கது. N என்பது சிறியதானாலும், m என்பது பெரியதானாலும், திருத்தம் கணிசமானதாகும்.

தொடர்பு விகிதத்திற்கும் மற்றத் தொடர்பு அளவைகளுக்கும் உள்ள உறவு : இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு, திருத்தமான நேர்கோட்டு முறையிலேயே அமைந்திருப்பின், பத்திச் சராசரிகளிடையே உள்ள நேர்கோடும் போக்கு நேர்கோடும் ஒன்றாகவே இருக்கும். இந் நிலையில் η, r இரண்டும் சமமாக இருக்கும். தொடர்பானது நேர்கோட்டுமுறையிலிருந்து விலக விலக, η-வுக்கும், r-க்கும் இடையே வித்தியாசம் அதிகமாகும். η எப்பொழுதும் r-ஐவிட அதிகமாகவே இருக்கும். அதேபோல், ஆல்ஃபால்ஃபா எடுத்துக்காட்டில் பயன்படுத்தியதைப் போன்ற ஈரடுக்குச் சமன்பாட்டுத் தொடர்பைத் திருத்தமாகக் காட்டுமாயின், η-வும், i-யும் சமமாகிவிடும். உண்மையான தொடர்பு, ஈரடுக்குக் கோவைத் தொடர்பிலிருந்து விலகிச் செல்லச்செல்ல, η-வுக்கும், i-க்கும் இடையே வித்தியாசம் அதிகமாகும். η-வேதான் எப்பொழுதும் i-விட அதிகமாயிருக்கும். இவைகளுக்கான காரணங்களை, I, II, III ஆம் பாகுபாடுகளில் அமைக்கப்பெற்ற விவரங்களிலிருந்து அறியலாம். யீட்டா என்பது தொடர்பு அளவையின் உச்ச வரம்பைக் குறிக்கிறதல்லவா ? ஆகவேதான், மற்றக் குறிப்பிட்ட சார்பலன்களையொட்டி அமைந்த தொடர்பு அளவைகளுக்கு இது எல்லையாகிறது. இத் துறையில், முன்பு $(\eta^2 - r^2)$ என்ற கோவையை தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் உள்ளதா என்று சோதிப்பதற்குப் பயன்படுத்தினர்கள். தொடர்பு திருத்தமாக நேர்கோட்டு முறையிலிருந்தால் இதன் மதிப்பு சூழியாகும் ; நேர்கோட்டு முறையிலிருந்து தொடர்பு விலக விலக இதன் மதிப்பும் பெரிதாகும். ஆனல், இந்தக் கோவையின் மாதிரிப் பரவல் சிக்னிஃபிக்கென்ஸ் சோதனைகளுக்குப் பொருத்தமாக அமைவதில்லை. நேர்கோட்டு எடுகோள்களைச் சோதிக்க மாறுபாட்டுச் சோதனையே (அட்டவணை 17-6) திருத்தமானது.

இன்று, தொடர்பு விகிதம் வரலாற்றுச் சிறப்புப் பெற்றுள்ளதே தவிர நடைமுறைச் சிறப்பு உடையதாக இல்லை. தொடர்பின் அளவைகளின் உச்ச எல்லையாக அமைந்துள்ளதால், கருத்து வழியில் இது தொடர்பின் தன்மையையும், போக்கின் தன்மையையும் அறிய உதவும். இதன் தரப்பிழை மதிப்பீடுகள் திருத்த

மானவையல்ல ; அவைகளைச் சோதனைகளில் உய்த்துணர்வதற்கு (inference) பயன்படுத்துவதும் தவறாகும். யீட்டாவின் பரவல் மிகுந்த சிக்கல்களை யுடையது ; சில குறிப்பிட்ட நிலைகளைத் தவிர மற்ற நிலைகளில் அது நார்மல் பரவலைத் தோராயமாக நெருங்குவதில்லை. சிக்னிஃபிக்கென்ஸ் சோதனைகளில் பயன்பட, தொடர்பு விகிதத்தைவிட திருத்தமான, சிறப்பான முறைகள்—மாறுபாட்டு ஆய்வு முறைகள்—இன்று கிடைத்துள்ளன.

காலவரிசைகளின் தொடர்பைப்பற்றிய குறிப்பு : 9ஆம் அதிகாரத்திலும் இந்த அதிகாரத்திலும் மாறிகளின் தொடர்பை அளவிடப் பல கெழுக்கள், குறியீடுகள், விகிதங்கள் குறிப்பிடப்பட்டு உள்ளன. ஆராய்ச்சியிலும் நிர்வாகத்திலும் ஏற்படும் பல பிரச்சினைகளுக்கு முடிவு காணப் புள்ளியியல் வல்லுநர்கள் வகுத்துள்ள முறைகள் இன்னமும் பல உள்ளன. காலவாரியில் ஒழுங்காக அமைக்கப்பெற்ற வரிசை விவரங்களை ஆராயுங்கால் ஏற்படும் தொடர்புப் பிரச்சினைகளைப்பற்றி இங்குச் சிறிது விவரித்துவிட்டுத் தற்போதைய வாதத்தை முடிப்போம்.

இரண்டு காலவரிசையிலமைந்த விவரங்களுக்கு நேராகத் தொடர்பைக் கண்டுபிடித்தால், அது போலித் (spurious) தொடர்பாகிவிடலாம் என்ற இடர்ப்பாடு உள்ளது. குறிப்பிட்ட ஒரு கால அளவில், பன்றி இறைச்சி விலைகளும், மோட்டார் வண்டி விலைகளும், பன்னெடுங்காலப் போக்கில் (secular trend) ஏறும் வகையில் அமைந்துள்ளன என்று எண்ணுவோம் ; அப்பொழுது, அவ்வரிசையில் அமைந்த மாதாந்திர அல்லது வருடாந்திர விவரங்களிடையே அதிகமான தொடர்பு இருக்கும். ஆனால், அந்தத் தொடர்புக் கெழு பொருளில்லாததாகிவிடும். எனினும், காலவரிசை இயக்கங்களை (movements) ஆராயும்பொழுது தொடர்பளவைகளைப் பயனாக்கி, நல்ல பலனைக் காணலாம். இரு வரிசைகளிலுள்ள சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களை (cyclical fluctuations) ஆராய்வது, வியாபாரச் சுழல்களைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியாளர்களுக்குப் பயன் அளிக்கும். பருவகாலங்களுக்கான திருத்தங்களை அமைத்தபிறகு, போக்குக் கோடுகளிலிருந்து வரும் விலக்கங்களிடையே இருக்கும் தொடர்பை அவர்கள் கணக்கிடக்கூடும். (இரு காலவரிசைகளுக்கும் ஒரேவகையான பன்னெடுங்காலப் போக்கு இருக்க வேண்டியது முக்கியம்—இரண்டும் நேர்கோடாகவோ, ஒரே அடுக்கு அளவைகளுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகவோ இருந்தால் தான், இவைகளினின்று நிகழும் விலக்கங்களுக்குத் தொடர்பு அளவைக் கணக்கிடலாம்.)

பன்னெடுங்காலப் போக்கிலிருந்து வரும் விலக்கங்களை ஆராய்வது, இரு வரிசைகளிலும் ஒரேமாதிரியான அளவைகளின் தொடர்பைக் கண்டுபிடிப்பதுடன் முடிவடைந்துவிடாது. இரு

வரிசைகளிலுமுள்ள சுழல் ஏற்றவிறக்கங்கள் காலவழியில் ஒரே சமயம் நிகழ்கின்றனவா என்று காணவேண்டி இருக்கலாம்; அல்லது ஒரு வரிசையிலுள்ள விவரங்கள் மற்றொன்றிலுள்ளவை களுக்கு எப்பொழுதும் பின்னடங்கி யிருக்கலாம்; அல்லது முன்னோடியாக யிருக்கலாம். அதுபோன்ற நிலைகளில், ஆராய்ச்சி யாளர் முதலில் உடன் நிகழ்கின்ற (concurrent) விவரங்களிடையே உள்ள r-ஐக் கணக்கிடுவார்; பிறகு ஒரு மாதப் பின்னடைவில் அமையும் விவரங்களுக்கு r-ஐக் கண்டுபிடிப்பார். (அதாவது A வரிசையிலுள்ள 1954, ஜனவரி மாத விவரத்தை, B வரிசையில் பிப்ரவரி 1954-ல் உள்ள விவரத்துடனும், A வரிசையின் பிப்ரவரி விவரத்தை, B வரிசை மார்ச்சு விவரத்துடனும் பொருத்துவார்.) இதன்படியே, பின்னடைவைக் கூட்டியும் குறைத்தும், பல r மதிப்பு களைக் கணக்கிடுவார். இவைகளிலெல்லாம் மிக அதிகமானது, A வரிசை, B வரிசையைவிட ஆறுமாதகாலம் பின்தங்கும்பொழுது தான் என்போம்; அப்பொழுது A வரிசையிலுள்ள சுழற்சி களுக்கும், B வரிசையிலுள்ள சுழற்சிகளுக்கும் ஆறுமாத வித்தி யாசம் உள்ளது என்று அவர் முடிவு கூறுவார். சாதாரணமாக, தொடர்புக் கெழு இரு மாறிகளிடையே உள்ள செயற்படு தொடர்பை (functional relationship) அமைப்பதற்கு உதவுமல்லவா? ஆனால், இங்கு அது, மாறிகளிடையே உள்ள நிலையற்ற தொடர் பைக் (temporal relationship) காட்டுகிறது.[12] தொடர்புக் கெழுவை இதுபோன்று பயன்படுத்தலில் பலவகை இடையூறுகள் உள்ளன என்பது உண்மையே; முக்கியமாக, இரு வரிசைச் சுழல் ஏற்றவிறக்கங்களிடையே உள்ள தொடர்புக் காலம் மாறும்பொழுது மாறலாம்; இதைவிட இயல்பாக வியாபாரச் சுழலில் பல தோற்றங் களில் (phases) தொடர்பும் மாறும். வியாபார முன்னேற்றங்களில் (business revivals) A வரிசை, B வரிசையை முந்துவதாக அமைந் திருக்கலாம்; ஆனால், வியாபாரப் பின்னிறக்கக் காலங்களில் A வரிசை, B வரிசையைவிடப் பின்தங்கியிருக்கலாம். இதுபோல் தோற்றத் தொடர்புகள் மாறியிருப்பின் இவ்விரு வரிசைகளிடையே உள்ள சராசரித் தொடர்பு சரியான தொடர்பைக் காட்டுகிறதாகக் கருதமுடியாது.

நாளுக்குநாள் அல்லது மாதத்திற்கு மாதம், அல்லது வருடத் திற்கு வருடம் ஏற்படும் மொத்தமான (அல்லது தொடர்புடைய— relative) ஏற்றவிறக்கங்களிடையே உள்ள தொடர்பை ஆராய்வது மற்றொரு வழியாகும். இந்த வழியில் போக்குக் கோடுகள் ஒன்றும்

[12] வியாபாரச் சுழல்களை ஆராயும்பொழுது முதன்முதலில் இந்த முறை யைப் பயன்படுத்தியவர் ஹென்றி எல். மூர் (Henry L. Moore) என்பவர். வார்ரன் பர்ஸன்ஸ் (Warren Persons) என்பவர் தம் நூலில் (துணை நூல் 127) இதனை விரி வாகக் கையாண்டுள்ளார். மில்ஸின் (Mills) நூல் 'Statistical Methods' 1938ஆம் பதிப்பு, 11ஆம் அதிகாரத்தையும் பார்க்க.

பொருத்தப்படமாட்டா. அடுக்கடுக்கான (successive) வித்தியாசங்களை (+ அல்லது —) வைத்துக்கொண்டுதான்—இவை நாளுக்கு நாளாகவோ, அல்லது மாதாமாதமாகவோ, அல்லது ஆண்டுக்கு ஆண்டாகவோ இருக்கலாம்—இரு வரிசைகளிடையே உள்ள தொடர்பைக் கணக்கிடுவோம். இந்த முறையில் எழும் கேள்விகள் முன்முறையில்—அதாவது போக்குக் கோடுகளிலிருந்து விலக்கங்களைக் கணக்கிடுதல்—எழுந்தவைகளே அல்லவென்பது தெளிவு. எனவே, இம்முறை முடிவுகளும் வெவ்வேறு வழிகளில் விளக்கப்பெறுபவை.

காலவரிசைகளில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட விவரங்களினிடையே உள்ள தொடர்புகளை ஆராய்வதற்கும் தொடர்புக் கெழு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதுபோது, அந்த வரிசையில் அமைந்துள்ள அலைவு இயக்கங்களின் தன்மையை ஆராய்வதே நமது நோக்கம். காலவரிசையிலுள்ள விவரங்களிடையே உள்ள தொடர்பைத் 'தொடர்தற்போக்கு' (auto-regression) என்ற சொல் குறிக்கிறது. காலவரிசையில் அமைந்த விவரங்களினிடையேயுள்ள தொடர்பின் அளவை 'வரிசைத் தொடர்புக் கெழு' (serial correlation coefficient) மதிப்பிடும். விவரங்கள், பின்னிறக்கங்கள் வெவ்வேருகக் கொண்டு அமைக்கப்பெற்ற மற்ற விவரங்களுடன், தொடர்பு செய்யப்பட்டுப் பல வரிசைத் தொடர்புக் கெழுக்கள் கணக்கிடப்படும். ஒவ்வொரு விவரமும் அதன் அடுத்த விவரத்துடன் பிணைக்கப்பட்டபொழுது, முதற்படி வரிசைத் தொடர்புக் கெழு வரும் என்போம். (அதாவது வார்ப்பு இரும்பு உற்பத்தியில் 1955ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாத உற்பத்தி, 1955ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி மாத உற்பத்தியுடனும், பிப்ரவரி உற்பத்தி, மார்ச்சு உற்பத்தியுடனும்—இதுபோன்று அமையவேண்டும்.)ஒவ்வொரு விவரமும் அதன் இரண்டாம் (ஒன்றை அடுத்த) விவரத்துடன் இணைக்கப்பட்டு, தொடர்பு கணக்கிடப்பட்டால், நமக்குக் கிடைப்பது இரண்டாம் படி வரிசைத் தொடர்புக் கெழுதான். இதுபோன்று பற்பல கெழுக்கள் கணக்கிடப்படும்; இவைகளின் பின்னடைவு 0-விலிருந்து (r என்பது 1 ஆகும் இந்நிலையில்) k வரை அமையலாம். இவைகளையெல்லாம் ஒரு வரைபடமாக வரைந்தால் 'கார்ரிலோக்ராம்' (correlogram—தொடர்புக் கெழுக்களின் படம்) என்ற படம் நிகழும். இந்தப் படத்தில் X-வரிசையில் k-ன் மதிப்புகளையும், Y-வரிசையில் r-ன் மதிப்புகளையும் அமைப்போம். அந்தப் படத்தின் தோரணியைக்(pattern) கொண்டு, காலவரிசையிலுள்ள அலைவு இயக்கங்களின் தன்மைகளை ஆராய்ந்து, உண்மையாகவே ஒரு தோரணி உள்ளதா, அல்லது காணப்படும் வேறுபாடுகள் ராண்டம் காரணங்களால் ஏற்பட்டிருப்பவைகளா என்று முடிவு கூறுவர்.[13]

[13] கால வரிசைகளிலுள்ள அலைவுகளை (oscillations) ஆராய்வதற்கான வரிசைத் தொடர்புக் கெழுவின் உபயோகங்கள்பற்றிய முழு விளக்கங்களை, கெண்டாலின் (Kendall) நூல்களில் காணலாம் (அ.நூ.ப. 78, 79).

துணை நூல்கள்

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' Chap. 21.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics', Chap. 23.

Dean, J., 'Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill'.

Ezekiel, M., 'Methods of Correlation Analysis,' 2nd ed., Chaps. 6, 7.

Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Statistical Methods for Research Workers,' 11th ed., Chap. 8.

Goulden, C. H., 'Methods of Statistical Analysis,' 2nd ed., Chap. 10.

Kendall, M. G., 'The Advanced Theory of Statistics', 3rd ed., Vol. I, pp. 351-362, Vol. II, pp. 402-423.

Schultz, H., 'The Theory and Measurement of Demand.'

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics,' 4th ed., Chap. 11.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும், நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

18. தொடர்பை அளவிடுதல் : பல்தரத் தொடர்பும் ஒருசிறைத் தொடர்பும்

சென்ற அதிகாரங்களில் தொடர்பைப்பற்றி விளக்கும்பொழுது ஒரே ஒரு தனித்த மாறியும், ஒரு சார்புடை மாறியும் உள்ள பிரச்சினைகளையே ஆராய்ந்தோம். சில சமயங்களில், இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவு அதிகமாக இருப்பதையும் கண்டோம். சற்றுக் கூர்ந்து நோக்கின், ஒரு மாறியில் வெளிப்படும் ஏற்றவிறக்கங்களுக்கு ஒரு கூறுமட்டும் அடிப்படையாக இருக்கமுடியாது. பல்வேறு ஆற்றல்களின் குறுக்கீடுகளால்தான் அவை ஏற்பட்டிருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாகும்; முக்கியமாக, பொருளாதாரத் துறைகளில் பல மாறிகள் ஒன்றாகச் சேர்ந்துள்ள நிலைகளே அதிகம். சென்ற ஆல்ஃபால்ஃபா உதாரணத்தில் நாம் நீர்ப்பாசன அளவு ஒன்றுதான் விளைச்சலைப் பாதிக்கிறது என்று கொண்டோம். குறித்த பல ஆண்டுகளில் தட்பவெப்ப நிலைகளும், மழை அளவு முதலியவைகளும் விளைச்சல் அளவைப் பாதித்துதான் இருக்கவேண்டும். பொதுவாக, பொருளாதார ஆய்வு முறைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் வேறுபாடுகளுக்குப் பற்பல பொருள்கள் காரணமாக இருப்பதைக் காணலாம்.[1] எனவே, நமது முறைகள் முழுமையானவைகளாக இருக்கவேண்டுமாயின், இரண்டிற்குமேல் எண்ணிக்கைகளுடைய மாறிகளைக் கையாளுகிறவாறு, முறைகளை அமைக்க வேண்டும். ஒரு நிலையில் பல மாறிகளின் விளைவுகள் ஒன்று சேர்ந்து ஒரு மாறியைப் பாதிக்கின்றன என்றால், அவைகளுக்கும் இந்தச் சார்புடை மாறிக்குமுள்ள தனித்தனித் தொடர்பையும், அவையெல்லாம் மொத்தமாகக் கருதப்பட்டு, அம் மொத்தத்திற்கும் இந்த மாறிக்குமுள்ள தொடர்பையும் அளவிடுவதற்கான கருவிகள் தேவைப்படும். இதுகாறும் பழக்கப்பட்ட முறைகளையே விரிவாக்கி, அத்தகைய முறைகளை வகுக்கலாம்.

[1] இதனால் உடன்தொடர்புக் கெழுவானது காரணத் தொடர்பிருப்பதைக் குறிக்கிறது என்றோ, அக் காரண உறவுகளை அளக்கிறதென்றோ எண்ணிவிடலாகாது.

குறியீடுகள்: இரண்டு மாறிகளுக்கான குறியீடுகளையே எளிதான சில மாற்றங்கள் செய்து பல மாறிகளுக்கும் பயன்படுகிறவாறு அடையாளங்களை அமைப்போம். மாறிகளைக் குறிக்க ஒட்டுக் குறிகளாக **1, 2, 3,** முதலியவைகளை அமைப்பது ஒரு மாற்றமாகும். இவ் வழியிலேயே மாறுபாடுகளுக்கும், உடன்தொடர்புக் கெழுக்களுக்கும், ரெக்ரஷன் (தொடர்புப் போக்கு) அளவைகளுக்கும் ஒட்டுக் குறிகள் அமைப்போம்.

b_{12}: X_1 என்பது சார்புடை மாறியாயும், X_2 என்பது தனித்த மாறியாயும் அமைந்த போக்கு நிலையில், இது ரெக்ரஷன் கெழுவைக் குறிக்கும்.

$b_{12\cdot34\cdots n}$: ஒருசிறைத் தொடர்பு ரெக்ரஷன் கெழு; X_1 என்பது சார்புடை மாறியாகவும், $X_2, X_3, X_4 \ldots X_n$ என்பவைகள் தனித்த மாறிகளாகவும் அமைந்த போக்கு நிலையில், ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டில் X_2 என்பதன் கெழு (coefficient).

$s_{1\cdot2}$: X_2 என்பதனைக் கொண்டு X_1-ன் மதிப்பீட்டிற்கான தரப்பிழை; X_2–விற்கு X_1-ன்பால் இருக்கும் இயக்கத்தைக் கணக்கிட்ட பிறகு மீதியாக வரும் மாறுபாடு.

$s_{1\cdot234\cdots n}$: X_2, X_3, $\ldots X_n$ என்ற மாறிகளைக் கொண்டு X_1-ன் மதிப்பீடுகளுக்கான தரப் பிழை; X_1-ன்பால் X_2, X_3, $\ldots X_n$களுக்குள் இயக்கங்களைக் கணக்கிட்ட பிறகு மீதமாகும் மாறுபாடு.

$\bar{s}_{1\cdot234\cdots n}$: $s_{1\cdot234\cdots n}$ என்பதனைக் கணக்கிடுங்கால் நஷ்டமான வரையற்ற டிகிரிகளுக்காகத் திருத்தப்பெற்ற $s_{1\cdot23\cdots n}$ன் மதிப்பு.

p_{12}: X_1, X_2 மாறிகளின் சராசரி உடன்மாற்றம்.

r_{12}: X_1, X_2 களிடையே உள்ள சாதாரண அல்லது சுழிப் படி (zero-order) தொடர்புக் கெழு.

$r_{12\cdot34\cdots n}$: X_1, X_2 களிடையே உள்ள கழிவான (net) அல்லது ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழு (partial correlation coefficient); எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட மற்ற மாறிகள் X_3, $X_4 \ldots X_n$ என்பவை.

$R_{1\cdot234\cdots n}$: X_1-ற்கும், X_2, $X_3 \ldots X_n$ என்ற மாறிகளின் மொத்தமான இயக்கங்களுக்குமுள்ள பல்தரத் தொடர்பு (multiple correlation).

k: பல்தரத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள தனித்த மாறிகளின் எண்ணிக்கை; சார்புடை மாறியின்

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கான மாறுபாடுகளிலுள்ள வரையற்ற டிகிரிகள்.

$\bar{R}_{1\cdot 23\cdots n}$: கணக்கிடுங்கால் நஷ்டமான வரையற்ற டிகிரிகளுக்காகத் திருத்தப்பெற்ற $R_{1\cdot 23\ldots n}$ என்பதின் மதிப்பு.

$\sigma r_{12\cdot 34\cdots n}$: $r_{12\cdot 34\cdots n}$ என்பதின் தரப் பிழை (இதனையே மாதிரி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்டால் அதற்கு $s_{r12\cdot 34\cdots n}$ என்ற அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துவோம்).

$\sigma R_{1\cdot 234\cdots n}$: $R_{1\cdot 234\cdots n}$ என்பதின் தரப் பிழை (மாதிரி விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்டால் இதற்கு $s_{R1\cdot 234\cdots n}$ என்ற அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துவோம்).

$d_{1\cdot 234\cdots n}$: பல்தரத் தீர்மானக் கெழு; $R_{1\cdot 23\cdots n}$ என்பதன் வர்க்கம்.

$d_{12\cdot 34\cdots n}$: தனியான (ஒருசிறையான) தீர்மானக் கெழு; X_3, X_4 ...X_n என்ற மாறிகளினல் X_1-ன்பால் ஏற்பட்ட இயக்கங்களையும் கணக்கிட்ட நிலையில் X_1-ன்பால் X_2 என்பதன் இயக்கத்திற்குத் தோராயம்.

$_{34\cdots n}d_{12}$: இன்க்ரிமென்டல் (incremental) தீர்மானக் கெழு; X_3, $X_4\ldots X_n$ என்பனவற்றால் X_1-ன்பால் ஏற்பட்ட இயக்கங்களையும் கணக்கிட்ட நிலையில், X_1-ன் மாறுபாட்டை விளக்குவதில் X_2-ன் பங்கை அளவிடும்.

β_{12}: பீட்டாக் (beta) கெழு, X_1, X_2 இரண்டும் அவைகளின் தரவிலக்கங்களை அளவாக வைத்துள்ள நிலையில், X_1 சார்புடையதாகவும், X_2 தனித்தும் இருக்குங்கால் ஏற்படும் ரெக்ரஷன் கெழு.

$\beta_{12\cdot 34\cdots n}$: பீட்டாக் கெழு; எல்லா மாறிகளும் அவைகளின் தரவிலக்கங்களை அளவாக வைத்துள்ள நிலையில், X_1 சார்புடை மாறியாகவும், X_2, $X_3\ldots\ldots X_n$ என்பவை தனித்த மாறிகளாகவும் இருக்கும் ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டில் X_2வுக்கான கெழு.

பல்தரத் தொடர்புநிலைப் பிரச்சினை: கூல விளைச்சலும் தட்டவெப்ப வேறுபாடுகளும்

கான்ஸாஸ் (Kansas) நாட்டில் 1890-லிருந்து 1946 வரையில், ஏக்கருக்கு டன் கணக்கில் கூல விளைச்சல்களை, அட்டவணை 18-1-ல் காணலாம்; அத்துடன் ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மாதங்களுக்கான சராசரி வெப்ப விவரங்களும் உள்ளன.

அட்டவணை 18-1

1890-1946-ல்* கான்சாஸில் கூலவிளைச்சலும் வெப்ப அளவைகளும்

ஆண்டு	சராசரியாக ஏக்கருக்கு விளைச்சல் (புஷல்களில்) X_1	ஜூன் மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_2	ஜூலை மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_3	ஆகஸ்டு மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_4
1890	15.6	77.6	83.1	76.1
1891	26.7	70.7	74.0	75.1
1892	24.5	73.4	77.5	76.5
1893	21.3	74.7	79.5	73.8
1894	11.2	74.2	77.8	78.0
1895	24.3	71.7	74.9	76.0
1896	28.0	74.1	78.1	78.7
1897	18.0	76.6	80.2	76.0
1898	16.0	75.0	77.7	78.2
1899	27.0	73.9	76.2	80.6
1900	19.0	74.9	77.9	81.0
1901	7.8	77.3	85.0	79.1
1902	29.9	70.9	76.8	78.2
1903	25.6	67.2	78.3	75.3
1904	20.9	70.4	75.6	74.6
1905	27.7	75.5	74.5	78.7
1906	28.9	71.8	73.8	76.3
1907	22.1	72.0	78.4	78.1
1908	22.0	72.1	75.8	76.2
1909	19.9	73.1	78.1	80.1
1910	19.0	72.2	79.5	75.7
1911	14.5	80.5	78.6	76.4
1912	23.0	69.3	79.9	77.4
1913	3.2	74.2	82.1	84.2
1914	18.5	78.2	79.9	78.2
1915	31.0	69.2	74.0	70.1
1916	10.0	70.3	81.2	79.6
1917	13.0	72.8	80.8	73.4
1918	7.1	78.4	78.3	82.3
1919	15.2	72.3	80.2	78.3

அட்டவணை 18-1—(தொடர்ச்சி)

ஆண்டு	சராசரியாக ஏக்கருக்கு விளைச்சல் (புஷல்களில்) X_1	ஜூன் மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_2	ஜூலை மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_3	ஆகஸ்டு மாதத்திய சராசரி வெப்பம் X_4
1920	26.5	72.8	77.6	72.9
1921	22.2	74.4	79.2	78.6
1922	19.3	75.2	77.0	80.1
1923	21.7	73.3	79.4	78.3
1924	21.7	74.3	75.1	79.0
1925	16.6	77.7	79.7	77.4
1926	11.0	72.5	78.4	79.1
1927	30.0	70.9	76.9	73.1
1928	27.0	67.7	78.1	77.1
1929	17.5	72.2	78.8	78.9
1930	12.0	73.1	81.7	80.3
1931	17.5	78.1	80.6	76.1
1932	18.5	74.3	81.8	79.2
1933	11.5	80.5	81.4	76.8
1934	2.8	80.4	87.2	83.3
1935	9.0	70.9	84.1	80.0
1936	4.0	77.5	86.3	85.9
1937	12.0	74.7	81.9	83.9
1938	20.0	73.6	81.4	83.3
1939	13.5	75.8	83.9	78.6
1940	16.0	74.3	82.1	76.1
1941	23.0	72.3	79.5	79.1
1942	28.5	73.0	81.0	76.8
1943	23.0	75.4	80.8	83.4
1944	31.0	76.1	78.0	78.3
1945	24.0	67.8	77.7	78.6
1946	20.0	76.1	81.9	77.6

* U.S.D.A. *Bulletin 515* என்ற நூலிலிருந்தும் பிற்பாடு வெளியிட்டப்பட்ட U.S.D.A. ஆண்டறிக்கைகளிலிருந்தும் விளைச்சல் விவரங்கள் தொகுக்கப்பட்டன. 1936-க்கு முன்பு வெப்ப அளவுகள் டாட்ஜ் நகரம், கான்கார்டியா மற்றும் ஐயோலா (Dodge City, Concordia, and Iola) விற்கான 'U. S. Weather Reports' களிலிருந்தும், 1936-க்குப் பிறகு, டாட்ஜ் நரம், கான்கார்டியா மற்றும் விசிட்டா (Wichita) விற்கான 'Weather Reports' களிலிருந்தும் தொகுக்கப்பட்டன.

பயிர் விளையும் காலத்தில் உள்ள வெப்ப அளவால் கூலத்தின் விளைச்சல் பாதிக்கப்படுகிறது என்பது தெரிந்ததே. குறித்த மூன்று மாதங்களிலுள்ள வெப்ப அளவைகளுக்கும் விளைச்சலுக்குமுள்ள தொடர்பைத் திட்பமான முறையில் கண்டுபிடிப்பதே இவ் வாராய்ச்சியின் நோக்கம்; அப்படிக் கண்டுபிடித்துவிட்டால் குறித்த மாதங்

களில் நிகழும் வெப்ப அளவுகளைக் கொண்டு, ஏற்படக்கூடும் விளைச்சலை மதிப்பிடலாம். சில மாதங்கள் மற்றவைகளைவிட முக்கிய மாக இருக்குமாதலால், முதலில் ஒவ்வொரு மாத வெப்பத்திற்கும் விளைச்சலுக்குமுள்ள தொடர்பைத் தனித்தனியே கண்டுபிடிப்போம்.

இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு, நேர்கோட்டுத் தொடர்பு என்ற கருத்திற்கிணங்க, ஜூன் வெப்பத்திற்கும் விளைச்சலுக்கும் (1 ஏக்கருக்கு) உள்ள சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

$$X_1 = a + b_{12}X_2 \qquad (18.1)$$

ஓர் ஏக்கருக்கு விளைச்சலும், ஜூலை மாத வெப்பமும்

$$X_1 = a + b_{13}X_3 \qquad (18.2)$$

என்ற சமன்பாட்டின்படி தொடர்புற்றிருக்கும். [இரண்டு சமன்பாடு களிலும், X_1 என்பது அந்த நாட்டின் சராசரி ஏக்கர் விளைச்சலையும், X_2, X_3 என்பன வெப்ப நிலையை ஃபாரன்ஹீட் (Fahrenheit) டிகிரி களிலும் குறிக்கின்றன.] முன்பு நாம் Y, X என்பவைகளை மாறிகளைக் குறிக்கும் அடையாளங்களாக வைத்தோம்; இப்பொழுது X_1 என்பதைச் சார்புடை மாறியாகவும், X_2, X_3 என்பவைகளைத் தனித்த மாறிகளாகவும் அடையாளமிடுகிறோம். மேலே உள்ள முதல் சமன் பாட்டில் b_{12} என்பது ரெக்ரஷன் கெழு; இங்கு 1, 2 என்ற ஒட்டுக் குறிகள், சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளைக் குறிப்பிடும். முதல் ஒட்டுக் குறி எப்பொழுதும் சார்புடை மாறியையும் (இங்கு X_1), இரண்டாம் ஒட்டுக்குறி தனித்த மாறியையும் (இங்கு X_2) காட்டும். பல மாறிகள் இந்தப் பிரச்சினையில் எழுவதால், இவ்வாறு ஒட்டுக்குறிகளைப் பயன்படுத்தவேண்டியதாகிறது. முன்பு கூறப்பட்ட எடுத்துக் காட்டுகளில் ஒட்டுக் குறிகளில்லாமல் இருக்கும்பொழுது இருந்த பொருளேதான் இப்பொழுதும் இந்தக் கெழுக்களுக்கு; ஏனென்றால், முன்போலவே இரண்டு மாறிகளே வழக்கிலுள்ளன.

சூத்திரம் (18.1)-க்கான மதிப்புகளை அட்டவணை 18-1-லுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு கண்டுபிடிக்கலாம். அப்படிக் கண்டுபிடித்தால், கீழ்வரும் சமன்பாடு நிகழும்.

$$X_1 = 103.76 - 1.146X_2$$

$s_{1\cdot 2}$ என்பதனை

$$s_{1\cdot 2} = \frac{\Sigma(X_1^2) - a\Sigma(X_1) - b_{12}\Sigma(X_1X_2)}{N} \qquad (18.3)$$

என்ற சூத்திரத்தினால் கணக்கிட, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழை,

$s_{1\cdot 2} = 6.29$ என்று வரும்.

தொடர்புச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பீடுகளின் ஏற்புடைமையை (reliability) அளவிட, தரப்பிழையான $s_{1\cdot 2}$ என்பது எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பது முன்பே விரிவாக விளக்கப்பட் டுள்ளது. சமன்பாட்டின் பயனை அளவிடுங்கால், $s_{1\cdot 2}$ என்பதை

s_1-உடன் (X_1-ன் தரவிலக்கம்) ஒப்பிடவேண்டும். இங்கு s_1-ஐ, X_1 கூட்டுச் சராசரியின் அடிப்படையில் கணக்கிட்ட மதிப்பீடுகளின் ஏற்புடைமையை அளவிடுவதாகக் கருதலாம்.

இங்கு $s_1 = 7.20$ என்ருகிறது.

சராசரியின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பீடுகளைவிட, சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் ஏற்புடையனவாக உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது. தொடர்புக் கெழுவான r என்பது இந்தத் தொடர்பை மொத்த அளவில் (absolute terms) குறிப்பிடுகிறது. அதன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

$$r_{12}^2 = \frac{a\Sigma(X_1) + b_{12}\Sigma(X_1X_2) - Nc_1^2}{\Sigma(X_1^2) - Nc_1^2} \qquad (18.4)$$

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து r-ஐக் கணக்கிட்டு,[2] அதற்கு b_{12}-ன் குறியினை (sign) அமைக்க :

$$r_{12} = -0.4861$$

இந்த முடிவுகளினுல் விளைச்சலும் ஜூன் மாத வெப்பமும் எதிரிடைத் தொடர்புடையனவென்று அறிகிறோம். தொடர்பின் அளவு அவ்வளவு அதிகமாயில்லைதான். ஜூன் மாத வெப்பத்திற்குப் பதில் ஜுலைமாத வெப்பத்தைப் பொருத்திஞல், மதிப்பீடுகள் செம்மையாகின்றனவா என்று பார்ப்போம். (18.2) சூத்திரத்திலுள்ள மாறிலிகளைக் கணக்கிட

$$X_1 = 156.71 - 1.735X_3$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

தரப்பிழை $s_{1\cdot3} = 5.06$ என்றும்

உடன்தொடர்புக் கெழு

$$r_{13} = -0.7108$$

என்றும் வருகின்றன.

இங்குள்ள சமன்பாடு, முன்னிருந்ததைவிட நெருக்கமாக அமைந்தது; எனவே, இந்த அடிப்படையில் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் ஜூன் வெப்பத்தின் அடிப்படையில் கிடைப்பவைகளைவிடச் செம்மையானவை.

இதுபோலவே, ஆகஸ்டு வெப்பத்திற்கும் சமன்பாடு அமைத்தால்

$$X_1 = 117.35 - 1.257X_3$$
$$s_{1\cdot4} = 6.15$$
$$r_{14} = -0.5202$$

என்ற முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

[2] இந்தக் கணக்கிடுதலில், a, b-ன் மதிப்புகள், முறை பொருத்தத்திற்காக (formal consistency) மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தசம ஸ்தானங்களுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

எனவே, ஆகஸ்டு வெப்பம்கூட கான்ஸாஸில் கூலத்தின் விளைச்சலைப் பாதிக்கிறது என்று தெரிகிறது. குறைவான வெப்பம் சராசரி விளைச்சலைவிட அதிகமான விளைச்சலைத் தருகிறது. ஜுலை வெப்பத்திற்கான தொடர்பைவிட இது குறைவாகவிருந்தாலும், இதுவும் சிக்னிஃபிக்கன்டாகவே இருக்கிறது. இப்பொழுது, இம் மூன்று வெப்ப அளவுகளையும் ஏதாவதொரு முறையில் மொத்தமாக்கி, அவைகள் மொத்தமாக விளைச்சலை எப்படிஇயக்குகின்றன என்பதை ஆராய்ந்து, அந்த அடிப்படையில் மதிப்பீடுகளைப் பெறவேண்டும். மூன்று வெப்ப அளவுகளையும் நேர் முறையில் (directly) கூட்டுதலோ, அல்லது சராசரியாக்குதலோ பயனளிக்காது; ஏனென்ருல், மற்ற இரண்டு மாதங்களைவிட ஜுலை மாத வெப்பம் அதிகத் தொடர்புள்ளது. எனவே, மாறிகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களையும் உள்ள தொடர்புகளையும் கருத்தில் கொண்டு, மதிப்பீடுகளைப் பெறுவதற்காக, மாறிகளை மொத்தமாக்கும் ஒரு முறைதான் இப்பொழுது நமக்குத் தேவை.

மூன்று தனித்த மாறிகளிலிருந்து கூல விளைச்சலை மதிப்பிடுதல்

இப்பொழுதுள்ள ரெக்ரஷன் அல்லது மதிப்பீட்டுக்கான சமன்பாட்டில் 3 தனித்த மாறிகளும், ஒரு சார்புடை மாறியும் (கூல விளைச்சல்) இருக்கின்றன. அதன் அமைப்பு

$$X_1 = a + b_{12\cdot34}X_2 + b_{13\cdot24}X_3 + b_{14\cdot23}X_4 \qquad (18.5)$$

இந்தச் சமன்பாட்டிலுள்ள நான்கு மாறிலிகளின் மதிப்புகளும் தெரிந்தால், காணப்பட்ட X_2, X_3, X_4-ன் மதிப்புகளைப் பொருத்தி X_1 என்பதனை மதிப்பிடலாம். இதே முறைதான் இரு மாறிகளுள்ள பொழுதும் பயன்படுத்தப்பட்டது என்பதனை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளலாம். (மாறிகளை இரண்டிரண்டாகக் கொண்டு ஒப்பிட்டால், அவைகளிடையே உள்ள தொடர்புகள் நேர்கோட்டு அமைப்பிலே இருக்கும் என்ற கருத்து இங்கு—சார்புடை மாறியின் மதிப்பீட்டைக் கணக்கிடும்பொழுது—பாவனை செய்யப்பட்டுள்ளது. இதனைப்பற்றிய குறிப்பு கீழே உள்ளது.) மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயனுக்கிக் கணக்கிடலாம்.

குறி அடையாளங்களைப்பற்றி ஒரு வார்த்தை. இங்கு எளிதான ஒரு சமன்பாட்டிற்கு, பல ஒட்டுக் குறிகளைக்கொண்டு கடினமான அமைப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. b_{12} என்பது X_1-ஐ X_2-ன் ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டு முறையில் அமைக்கும்பொழுது கிடைக்கும் ரெக்ரஷன் கெழுவென்று முன்பே விளக்கப்பட்டது [அதாவது, X_1 என்பது சார்புடை மாறியானுல், நேர்கோட்டின் சரிவை (slope) இது குறிக்கிறது]. இங்கு X_1, X_2 என்ற இரண்டு மாறிகளையேதான் கருதுகிறோம். $b_{12\cdot34}$ என்பது X_1, X_2களிடையே உள்ள கழிவு

ரெக்ரஷன் கெழுவாகும் (net regression coefficient). 12 என்பதற்கப்பால் ஒரு புள்ளி வைத்து அதற்கப்பால் 3, 4 என்றுள்ள ஒட்டுக் குறிகள், X_3, X_4 என்ற மற்ற இரண்டு மாறிகளையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டுள்ளோம் என்பதனை மட்டுமே குறிக்கின்றன. அதுகாலே, இந்த ஒரு மாறிலியைப் பொறுத்தவரை, X_3, X_4-ன் இயக்கங்களினால் ஏற்படும் வேறுபாடுகள் விலக்கப்பட்டுள்ளன. X_2, X_3, X_4 என்ற மூன்று மாறிகளாலும் பாதிக்கப்படுகிற X_1-ன் மதிப்பீடுகளைப் பெறுவதற்கு, X_2 மாறிக்குக் கொடுக்கப்படவேண்டிய நிறையை, இந்த மாறிலி ($b_{12\cdot34}$) அளவிடுகிறது. b_{12} என்பது, X_1 மாறி, X_2 மாறியுடன் மாத்திரம் தொடர்புகொண்டநிலைக்கான கெழுவானதால், இது அதனின்று வேறுபட்டிருக்கும். முறையே $b_{13\cdot24}$ என்பது X_1, X_3 இடையே உள்ள கழிவு ரெக்ரஷன் கெழுவாகும். X_2, X_4 என்ற மாறிகளும் இருக்கும்பொழுது X_1-ஐ மதிப்பிட X_3-க்கு கொடுக்கவேண்டிய நிறையை இந்த மாறிலி குறிக்கும். இவை ஒவ்வொன்றும், தெளிவான, தனியான மாறிலிதான்; ஒட்டுக்குறிகள் இவைகளின் தன்மையை நன்கு அறிந்துகொள்ள உதவுகின்றன. புள்ளிக்கு இடப்பக்கத்திலுள்ளவைகளை முதன்மை (primary) ஒட்டுக் குறிகளென்றும் வலப்பக்கத்திலுள்ளவைகளை இரண்டாம்படி (secondary) ஒட்டுக்குறிகளென்றும் கூறுவோம்.

நார்மல் சமன்பாடுகளை அமைத்தலும் தீர்வு காணுதலும் (Formation and solution of normal equations): மேலே கொடுக்கப்பட்ட (18.5) மதிப்பீடுகளுக்கான சமன்பாட்டிற்கேற்ப நார்மல் சமன்பாடுகளைப் பெறுதலே முதல் காரியமாகும். சாதாரணமாகக் கீழ்க் கண்ட முறை[3] உள்ளது:

$$\text{I}\quad \Sigma(X_1) = Na + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_4) \qquad (18.6)$$

$$\text{II}\quad \Sigma(X_1X_2) = a\Sigma(X_2) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2^2) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_2X_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_2X_4) \qquad (18.7)$$

$$\text{III}\quad \Sigma(X_1X_3) = a\Sigma(X_3) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_3) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3^2) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_3X_4) \qquad (18.8)$$

$$\text{IV}\quad \Sigma(X_1X_4) = a\Sigma(X_4) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_4) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3X_4) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_4^2) \qquad (18.9)$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளை இந்த நான்கு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளில் (simultaneous equations) பொருத்தி, நேர்வழியில், நான்கு மாறிலிகளின் மதிப்புகளையும் பெற்றுவிடலாம். நான்கில் ஒரு சமன்பாட்டைக் குறைக்க வழியுண்டு; அதற்குப் பிறகு மற்ற

[3] இந்த முறையைப்பற்றிய விளக்கங்களையும், நார்மல் சமன்பாடுகளை எளிதாகக் குறிக்கிற முறைகளையும், பின் இணைப்பு C-ல் காண்க.

மூன்று தீர்வுகளைக் கண்டுபிடித்தலுக்கான சிரமம் குறையும். ஒவ்வொரு மாறிக்குப் பதில், அம்மாறியின் சராசரியிலிருந்து வரும் விலக்கத்தைப் பயன்படுத்துவதால், மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் a என்ற மாறிலியை நீக்கிவிடலாம்.

A_1, A_2, A_3, A_4 என்பவைகள் முறையே X_1, X_2, X_3, X_4 என்ற மாறிகளின் சராசரிகள் என்றும், x_1, x_2, x_3, x_4 என்பவைகள், சராசரிகளிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது X_1, X_2, X_3க்கு பதிலாக $x_1 + A_1$, $x_2 + A_2$, x_3+A_3 என்பவைகளைப் பொருத்தினுல், மேற்கண்ட சமன்பாடுகள், சில இயற்கணக்கு முறைகளால் எளிதாக்கப்பட்டு, கீழ் வருமாறு அமைந்துவிடும் :

$$\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N} = \frac{\Sigma(x_2^2)}{N}b_{12\cdot34} + \frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}b_{13\cdot24} + \frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}b_{14\cdot23}$$

$$\frac{\Sigma(x_1x_3)}{N} = \frac{\Sigma(x_2x_3)}{N}b_{12\cdot34} + \frac{\Sigma(x_3^2)}{N}b_{13\cdot24} + \frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}b_{14\cdot23}$$

$$\frac{\Sigma(x_1x_4)}{N} = \frac{\Sigma(x_2x_4)}{N}b_{12\cdot34} + \frac{\Sigma(x_3x_4)}{N}b_{13\cdot24} + \frac{\Sigma(x_4^2)}{N}b_{14\cdot23}$$

இந்தச் சமன்பாடுகளிலுள்ள எல்லா மாறிகளும் அந்தந்தச் சராசரியிலிருந்தான விலக்கங்கள். எனவே $\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N}$ என்பது x_1, x_2 மாறிகளின் உடன்மாற்றத்தையும் (co-variance, or average product) $\frac{\Sigma(x_2^2)}{N}$ என்பது s_2^2-ஐயும் (மற்றவைகளுக்கும் இதுபோலவே அமைக்கலாம்) குறிக்கும். உடன்மாற்றங்களை p_{12}, p_{13} முதலானவைகளால் குறித்து, தரவிலக்கங்களின் வர்க்கங்களையும் பொருத்தினுல், கீழ்க் காணும் மூன்று நார்மல் சமன்பாடுகள் நிலைக்கும் :

$$p_{12} = s_2^2b_{12\cdot34} + p_{23}b_{13\cdot24} + p_{24}b_{14\cdot23} \qquad (18.10)$$

$$p_{13} = p_{23}b_{12\cdot34} + s_3^2b_{13\cdot24} + p_{34}b_{14\cdot23} \qquad (18.11)$$

$$p_{14} = p_{24}b_{12\cdot34} + p_{34}b_{13\cdot24} + s_4^2b_{14\cdot23} \qquad (18.12)$$

நார்மல் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் காண இந்த அமைப்பே மிக எளிதானது.

அட்டவணை 18-1-ல் அமைந்துள்ள விவரங்களைக்கொண்டு, கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் வருவிக்கப்பட்டன :

$\Sigma(X_1) = 1,090.7$ $\qquad \Sigma(X_1^2) = 23,822.51$
$\Sigma(X_2) = 4,209.4$ $\qquad \Sigma(X_2^2) = 311,390.68$
$\Sigma(X_3) = 4,519.2$ $\qquad \Sigma(X_3^2) = 358,794.24$
$\Sigma(X_4) = 4,454.0$ $\qquad \Sigma(X_4^2) = 348,539.38$

$$\Sigma(X_1X_2) = 79,938.04$$
$$\Sigma(X_1X_3) = 85,614.99$$
$$\Sigma(X_1X_4) = 84,591.18$$
$$\Sigma(X_2X_3) = 333,965.04$$
$$\Sigma(X_2X_4) = 329,090.19$$
$$\Sigma(X_3X_4) = 353,366.95$$

$$c_1 = \frac{\Sigma(X_1)}{N}$$

$$= 19.135 \qquad c_1^2 = 366.15$$
$$c_2 = 73.849 \qquad c_2^2 = 5,453.67$$
$$c_3 = 79.284 \qquad c_3^2 = 6,285.95$$
$$c_4 = 78.140 \qquad c_4^2 = 6,105.86$$

இவைகளிலிருந்து, நார்மல் சமன்பாடுகளில் பொருத்தவேண்டிய கோவைகளை எளிதில் கணக்கிடலாம். அப்படிக் கணக்கிடப்பட்டவைகள் இங்கு ஒருங்கே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

$$s_1^2 = \frac{\Sigma(X_1^2)}{N} - c_1^2$$

$$\frac{23,822.51}{57} - 366.15 = 51.79$$

$$s_2^2 = \frac{311,390.68}{57} - 5,453.67 = 9.32$$

$$s_3^2 = \frac{358,794.24}{57} - 6,285.95 = 8.69$$

$$s_4^2 = \frac{348,539.38}{57} - 6,105.86 = 8.87$$

$$p_{12} = \frac{\Sigma(X_1X_2)}{N} - c_1c_2$$

$$= \frac{79,938.04}{57} - 1,413.10 = -10.68$$

$$p_{13} = \frac{85,614.99}{57} - 1,517.10 = -15.08$$

$$p_{14} = \frac{84,591.18}{57} - 1,495.21 = -11.15$$

$$p_{23} = \frac{333,965.04}{57} - 5,855.04 = 4.00$$

$$p_{24} = \frac{329,090.19}{57} - 5,770.56 = 2.95$$

$$p_{34} = \frac{353,366.95}{57} - 6,195.25 = 4.17$$

இவைகளைச் சமன்பாடுகளில் பொருத்தினால்:

$$-10.68 = 9.32b_{12\cdot34} + 4.00b_{13\cdot24} + 2.95b_{14\cdot23}$$
$$-15.08 = 4.00b_{12\cdot34} + 8.69b_{13\cdot24} + 4.17b_{14\cdot23}$$
$$-11.15 = 2.95b_{12\cdot34} + 4.17b_{13\cdot24} + 8.87b_{14\cdot23}$$

என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் வரும். இவைகளின் தீர்வுகள்[4]

$$b_{12\cdot34} = -0.430 \quad b_{13\cdot24} = -1.295 \quad b_{14\cdot23} = -0.505$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு:

$x_1 = -0\cdot430x_2 - 1\cdot295x_3 - 0\cdot505x_4$ என்பதாம்.

x_2, x_3, x_4 என்ற மாறிகளுக்கும் x_1-க்கும் உள்ள ரெக்ரஷன் சமன்பாடு இதுதான். கொடுக்கப்பட்ட எந்த மதிப்புகளையும் இம் மாறிகளுக்கு(ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மாதங்களின் வெப்ப அளவுகள்) பொருத்தினால், சார்புடை மாறியின் (இங்குக் கூலத்தின் விளைச்சல், ஏக்கருக்கு எவ்வளவு புஷல்கள் என்ற அளவில்) பெரும்பாலாக நிகழக் கூடிய மதிப்பை மேல்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டுபிடிக்கலாம். இங்கு, எல்லா மாறிகளும், அவைகளின் சராசரியிலிருந்த விலக்கங் களாகக் கருதப்பட்டவை என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். நடை முறைக்கு, மாறிகளைத் தொடக்கத்திலுள்ள நிலைகளிலேயே அமைப்பது நல்லது. அதாவது மூலத்தை (origin) சராசரிகளிலிருந்து மாற்றி முதலிலிருந்த அளவைகளில் எழுதவேண்டும். இதற்கு முன்பு நீக்கப் பட்ட a-ஐ மறுபடியும் புகுத்தவேண்டும். அதன் மதிப்பைக் கீழ்க் கண்ட சூத்திரத்தால் காணலாம்:

$$A_1 = a + A_2b_{12\cdot34} + A_3b_{13\cdot24} + A_4b_{14\cdot23} \qquad (18\cdot13)$$

இங்கு A-க்கள் மாறிகளின் சராசரிகளைக் குறிக்கின்றன.[5]

[4] தீர்வுகளை எந்த முறையிலேனும் கண்டுபிடிக்கலாம். பின் இணைப்பு C-யில் ஒழுங்கான ஒரு முறை—டூலிட்டில் முறை (Doolittle Method)—விளக்கப் பட்டுள்ளது.

[5] இந்தச் சமன்பாடு, முன்பே கொடுக்கப்பட்ட முதல் நார்மல் சமன்பாட்டி லிருந்து (18.6) வருவிக்கப்பட்டது, அதாவது

$$\Sigma(X_1) = Na + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_4)$$

X_1, X_2 களுக்குப் பதிலாக முறையே $A_1 + x_1$, $A_2 + x_2$, ...என்பவை களைப் பொருத்தினால் நமக்கு

$$\Sigma(x_1) + NA_1 = Na + b_{12\cdot34}[\Sigma(x_2) + NA_2] + b_{13\cdot24}[\Sigma(x_3) + NA_3] + b_{14\cdot23}[\Sigma(x_4) + NA_4]$$

என்பது கிடைக்கும். $\Sigma(x_1) = 0$, $\Sigma(x_2) = 0$,...என்பது தெரிந்ததே; சமன் பாட்டை, மொத்தமாக Nஆல் வகுத்தால், மேற்கூறப்பட்ட (18·12) சமன்பாடு வரும்.

தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்த,[6]

$$19{\cdot}135 = a + 73{\cdot}849\,(-0{\cdot}4303) + 79.284\,(-1{\cdot}2948) + 78{\cdot}140\,(-0.5053)$$ என்று வருகிறது.

எனவே $a = 193.05$.

ஆகவே, தொடக்கத்திலுள்ள அளவைகளின்படி, போக்குச் (அல்லது ரெக்ரஷன்) சமன்பாடு

$$X_1 = 193.05 - 0.430X_2 - 1.295X_3 - 0{\cdot}505X_4$$

என்று வரும்.

மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் கணக்கிடுதல்

முன்பு, ஒவ்வொரு மாறியையும் தனித்ததாக எண்ணி, X_1-ன் மதிப்பீடுகளைப் பெற்றோம். இப்பொழுது மேற்கண்ட சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, மூன்று மாறிகளையும் ஒருங்கே தனித்தவைகளாக எண்ணி, X_1-ன் மதிப்பீடுகளைப் பெறுவோம். ஆனால், இப்பொழுது பெறப்படும் மதிப்பீடுகள், முன்பு கிடைத்தவைகளைக்காட்டிலும் அதிக ஏற்புடைமையுள்ளனவா என்ற கேள்வி எழுகிறது. இதற்குப் பதிலளிக்குமுன் தரப்பிழையைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இந்த நிலையில் அதனை $s_{1\cdot234}$ என்று குறிப்பிடுவோம். இங்குள்ள ஒட்டுக் குறிகளில் முதலாவது சார்புடைமை மாறி X-ஐயும், புள்ளிக்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள ஒட்டுக் குறிகள் மூன்று தனித்த மாறிகளையும் குறிக்கும். தரப்பிழையின் மதிப்பைக் கீழ்வரும் சூத்திரத்தினால்[7] கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$s^2_{1\cdot234} = s^2_1 - b_{12\cdot34}\,p_{12} - b_{13\cdot24}\,p_{13} - b_{14\cdot23}\,p_{14} \qquad (18{\cdot}14)$$

[6] யதேச்சையான மூலம் (arbitrary origin), எல்லா அளவைகளிலும், தொடக்கத்தில் சுழியிலேயே (zero) உள்ளதால், $A_1 = c_1$, $A_2 = c_2$, $A_3 = c_3$, $A_4 = c_4$. a-ஐ மிகவும் திருத்தமாகக் கண்டுபிடிப்பதற்காகவே, $b_{12\cdot34}$ என்பனவற்றின் மதிப்புகள், சமன்பாட்டிலிருப்பதைவிட அதிக தசமஸ்தானங்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

[7] இந்தச் சூத்திரத்தைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :

$$x_1 = b_{12\cdot34}x_2 + b_{13\cdot24}x_3 + b_{14\cdot23}x_4$$

என்பதுதான் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு. (இங்கு மாறிகளை அவைகளின் சராசரிகளின் விலக்கங்களாகக் கருதுகிறோம்) அப்பொழுது, ஒவ்வொரு மீதியையும் (residual)

$$d = b_{12\cdot34}x_2 + b_{13\cdot24}x_3 + b_{14\cdot23}x_4 - x_1 \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டினால் கணக்கிடலாம். இதனை முழுவதும் d-யினால் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\Sigma(d^2) = b_{12\cdot34}\Sigma(dx_2) + b_{13\cdot24}\Sigma(dx_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(dx_4) - \Sigma(dx_1)$$

என்பது வரும். ஆனால், இணைப்பு முறையினால்

$$\Sigma(dx_2) = 0$$
$$\Sigma(dx_3) = 0$$
$$\Sigma(dx_4) = 0$$

ஆதலால், $\Sigma(d^2) = -\Sigma(dx_1)$, (2)

என்று வருகிறது.

தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்தினால் :

$$s^2_{1\cdot234} = 51{\cdot}79 - 4\,5924 - 19{\cdot}5156 - 5{\cdot}6307$$

$$\therefore\quad s^2_1 = 22{\cdot}0513$$

அதாவது $s_{1\cdot234} = 4{\cdot}70$*

இதனையும், முன்பு கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பீட்டுப் பிழைகளைப் போலவே பயன்படுத்தவேண்டும். X_1-ன் சராசரிகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட மதிப்பீடுகளின் ஏற்புடைமை s_1-என்பதால் அளவிடப்படுகிறது. இது 7.20 என்பதனைக் கண்டோம். கழிவுப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து (net regression equation) கிடைத்த விளைச்சல் மதிப்பீடுகளுக்கான ஏற்புடைமையை $s_{1\cdot234}$ என்பது அளவிடும். அது, இங்கு 4·70 ஆக உள்ளது. எனவே, X_1-சராசரிகளிலிருந்து மட்டும் கிடைத்த மதிப்பீடுகளைவிட, போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து

*மாதிரியின் எண்ணிக்கை சிறியதாக இருப்பின், sஐக் கண்டுபிடிக்கும்பொழுது, போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு திருத்தம் அமைத்தால்தான் திட்பமான அளவைகள் வரும். இங்கு 57 விவரங்கள் உள்ளன; போக்குச் சமன்பாட்டில் 4 மாறிலிகளுள்ளன; ஆதலால், விவரங்களுக்கான வரையற்ற டிகிரிகள் 53தான் என்பது புலனாகிறது, திருத்தப்பட்ட மதிப்பை $\bar{s}$ என்று குறித்து, m என்பதனால் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால், அதனைக் கணக்கிடச் சூத்திரம் (*Ezekiel*— து.நூ.ப. 37) கீழ்வருமாறு :

$$\bar{s}^2 = s^2\left(\frac{N}{N-m}\right)$$

இந்த உதாரணத்தில்

$$\bar{s}^2_{1\cdot234} = 22.0513\left(\frac{57}{57-4}\right)$$

$$= 23.7155$$

முடிவாக $\bar{s}_{1\cdot234} = 4.87$ என்பதாகும்.

---

(1)-ல் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் x_1ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\Sigma(dx_1) = b_{12\cdot34}\Sigma(x_1x_2) + b_{13\cdot24}\Sigma(x_1x_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(x_1x_4) - \Sigma(x_1^2)$$

என்று வரும் ; இங்கு $\Sigma(dx_1)$-க்கான மதிப்பை (2)-லிருந்து பொருத்த :

$$\Sigma(d^2) = \Sigma(x_1^2) - b_{12\cdot34}\Sigma(x_1x_2) - b_{13\cdot24}\Sigma(x_1x_3) - b_{14\cdot23}\Sigma(x_1x_4)$$

என்பதும் $s^2_{1\cdot234} = \frac{\Sigma(d^2)}{N}$ என்பதால்

$$s^2_{1\cdot234} = \frac{\Sigma(x_1^2)}{N} - b_{12\cdot34}\frac{\Sigma(x_1x_2)}{N} - b_{13\cdot24}\frac{\Sigma(x_1x_3)}{N} - b_{14\cdot23}\frac{\Sigma(x_1x_4)}{N}$$

என்பதும், மாறிகளைத் தங்கள் சராசரிகளிலிருந்து அளந்திருப்பதால்

$$s^2_{1\cdot234} = s_1^2 - b_{12\cdot34}p_{12} - b_{13\cdot24}p_{13} - b_{14\cdot23}p_{14}$$

வரும்.

இதுபோன்ற தொடர்புகளை நிறுவுவதற்கான பொது முறைகளைப் பின் இணைப்பு C-யில் காண்க.

கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் அதிக ஏற்புடைமை உள்ளவை என்பது தெளிவாகிறது. கூல விளைச்சலிலுள்ள எல்லா வேறுபாடுகளுக்கும் நாம் காரணங்கள் கூறிவிடவில்லை என்பதென்னவோ உண்மை தான்; ஆனால், இந்த மூன்று காரணங்களால்—ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு வெப்ப அளவுகளால்—ஏற்படும் விளைவுகளால் கான்ஸாஸ் நாட்டில் விளைச்சல்களிலுண்டாகும் வேறுபாடுகளைத் திட்பமாக அளந்துவிட்டோம்.

இப்படிக் கூறுவதால், பல்தர ரெக்ரஷன் சமன்பாடு, இம் மூன்று காரணங்களால் ஏற்படும் விளைவுகளை எல்லாம் அளவிட்டுவிடுகிறது என்று கொள்ளலாகாது. ஓரடுக்குச் சமன்பாடு (linear equation) தனித்த, மற்றும் சார்புடை மாறிகளிடையே நிலவக்கூடிய தொடர்பை —இதுபோன்ற விவசாய-உயிரியல் துறை (agrc-biology) உதாரணத்தில்—தோராயமாகவே காட்டலாம்; ஒரு பயிரின் விளைச்சலில் ஏற்படும் விளைவுகளைக் காண, வரிசையாக உள்ள காலெண்டர் மாதங்கள் அவ்வளவு பொருத்தமானவைகளாக இல்லாமலிருக்கலாம்; விளைச்சல் காலங்களை நன்கு கண்டுபிடித்திருந்தாலும், வருடத்திற்கு வருடம் அந்தக் காலங்களிலுள்ள வெப்பநிலை மாறிக்கொண்டே போகலாம்; பயிர் விளைச்சலின் பல தோற்றங்களும் காலவழியில் ஆண்டுக்கு ஆண்டு மாறலாம். இவைகளால் ஏற்படக்கூடிய பிழைகளும், கணக்கில் எடுக்கப்படாத மற்றக் காரணங்களாலான விளைவுகளும், தரப் பிழையில் இடம்பெறும். ஆய்வுமுறை எப்பொழுதும் இயந்திர வழியில் (mechanical) செல்வதில்லை. சார்பலன்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல், தகுந்த கால அளவுகளையும் விளைச்சலுக்கான தகுந்த பருவங்களையும் கண்டுபிடித்தல் முதலியவைகள் அந்தக் குறிப்பிட்ட துறையின் அடிப்படைத் தன்மைகளை நன்கு ஆராய்ந்தபின்பே விளங்கும்; புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துதலுக்கும் இவை பொருந்தும்.

பல்தரத் தொடர்புக் கெழு

கருத்தியலான (abstract) மூன்றுவதான தொடர்புக் கெழுவே நமக்கு இப்பொழுது தேவை. மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைக்கும், சார்புடை மாறியின் தரவிலக்கத்திற்குமுள்ள தொடர்பைப் பொறுத்திருக்கும் இந்தக் கெழுவின் மதிப்பு என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். இந்த எடுத்துக்காட்டில் அதைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினுல் கணக்கிடலாம் :

$$R_{1\cdot234}^2 = 1 - \frac{s_{1\cdot234}^2}{s_1^2} \qquad (18\cdot15)$$

ஒரு சார்புடை மாறியானது, பல தனித்த மாறிகளுடன் தொடர்புற்றிருக்கும்பொழுது, இதனைப் பல்தரத் தொடர்புக் கெழு என்று கூறி, அதற்கு R என்ற அடையாளக் குறியைப் பயன்படுத்துவர். புள்ளிக்கு இடப்புறமிருக்கும் ஒட்டுக்குறி சார்புடை மாறியையும்,

வலப்பக்கமிருக்கும் குறிகள் தனித்த மாறிகளையும் சுட்டிக்காட்டும். இந்தச் சூத்திரத்தில் $s^2_{1\cdot 234}$ என்பதற்கான கோவையைப் பொருத்த

$$R^2_{1\cdot 234} = 1 - \frac{s_1^2 - b_{12\cdot 34}p_{12} - b_{13\cdot 24}p_{13} - b_{14\cdot 23}p_{14}}{s_1^2} \quad (18\cdot 16)$$

என்பது வரும்; இதனைச் சுருக்க[8]

$$R^2_{1\cdot 234} = \frac{b_{12\cdot 34}\,p_{12} + b_{13\cdot 24}\,p_{13} + b_{14\cdot 23}\,p_{14}}{s_1^2} \quad (18\cdot 17)$$

என்ற சமன்பாடு நிகழும்.

தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்,

$$R^2_{1\cdot 234} = \frac{4\cdot 5924 + 19\cdot 5156 + 5\cdot 6307}{51\cdot 79}$$

$$= 0\cdot 5742$$

$$\therefore \quad R_{1\cdot 234} = 0\cdot 758$$

என்ற முடிவு கிடைக்கும்.

இக் கெழுவின் திருத்தம்: போக்கு அல்லது ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகளையொட்டித் தொடர்புக் குறியீட்டு மதிப்பீடுகள், மாதிரிகளிலிருந்து கணக்கிடப்படும்பொழுது எப்படித் திருத்தப்படவேண்டுமோ அதேபோல் R என்பதையும் திருத்தம் செய்யவேண்டும். மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையும், கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் $\bar{R}$ என்பது ஒன்று என்று வந்துவிடும். $\bar{R}$ என்பது திருத்தப்பட்ட கெழுவையும், m என்பது போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிட்டால் எஜெகீல் (Ezekiel) என்பவர் தரும் சூத்திரம் :

$$\bar{R}^2 = 1 - \left\{(1-R^2)\left(\frac{N-1}{N-m}\right)\right\} \quad (18.18)$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில்,

$$\bar{R}^2_1 = 1 - \left\{(1-0\cdot 5742)\left(\frac{57-1}{57-4}\right)\right\}$$

$$= 0\cdot 5501$$

$$\therefore \bar{R} = 0\cdot 742$$

என்ற விடை வருகிறது.

[8] தொடக்கத்திலுள்ள அளவுகளைக் கொண்டு, பொதுவான கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தினால், இந்தக் கெழுவைக் கணக்கிடலாம் :

$$R^2_{1\cdot 234\cdots n} = \frac{a\Sigma(X_1) + b_{12\cdot 34\cdots n}\Sigma(X_1X_2) + b_{13\cdot 24\cdots n}\Sigma(X_1X_3) + b_{14\cdot 23\cdots n}\Sigma(X_1X_4) + \ldots - Nc_1^2}{\Sigma(X_1^2) - Nc_1^2}$$

இந்த எடுத்துக்காட்டின் முடிவுகளைப்பற்றிப் பின்பு கூறும்பொழுது, திருத்தப்படாத கெழுவையே பயன்படுத்தினலும், திருத்தப்பட்ட கெழுதான், R-ன் உண்மை மதிப்பிற்கு நெருக்கமான தோராயத்தை அளிக்கும் என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

ஒரு சார்புடைய மாறிக்கும் பல தனித்த மாறிகளின் ஒன்று சேர்ந்த் நிலைக்குமுள்ள தொடர்பின் அளவைக் கணக்கிடும் கெழு இந்த R என்பதுதான். பல தனித்த மாறிகளின் கூட்டியக்கத்தால் ஏற்படும் விளைவுகள், சார்புடை மாறியிலுள்ள வேறுபாடுகளுடன் எந்த அளவில் தொடர்புடையன என்று R-ஆனது அளவிடும். எல்லாத் தனித்த மாறிகளையும் மொத்தமாக்கி, ஒரு தனித்த வரிசையாகக் (series) கொண்டால், இதன் சிறப்புத்தன்மை நன்கு விளங்கலாம். அப்பொழுது, இந்தத் தனித்த வரிசைக்கும் சார்புடை மாறிக்குமுள்ள தொடர்பை அளவிடுவதே பல்தரத் தொடர்புக் கெழுவின் வேலை. இதனைத்தான் இரண்டே இரண்டு மாறிகளுள்ள நிலையில் நாம் தொடர்புக் கெழுவாகக் கொண்டோமல்லவா? ஆகவே, இந்தப் பல்தரப்பட்ட நிலையில், பல மாறிகள் ஒன்று சேர்ந்து, பல்பிரிவுகளுள்ள ஒரு மாறியானலும், கெழுவின் அடிப்படைத் தன்மை முன் போலவேதான். R என்பதற்கு + குறியாவது, — குறியாவது சேர்க்கப் படவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். இந்த எடுத்துக்காட்டில், கூல விளைச்சலுடன் மூன்று மாறிகளும் எதிரிடைத் தொடர்பையே கொண்டுள்ளமையால், R என்பதற்கு — குறியை அமைக்கலாம். ஆனல், சில சமயங்களில், தொடர்பானது, சில மாறிகளுக்கு நேரிடையாகவும் சில மாறிகளுக்கு எதிரிடையாகவுங்கூட அமையலாமல்லவா? அதனல், சாதாரணமாக R-க்கு எந்தக் குறியையும் (+ அல்லது —) பொருத்துவதில்லை. போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளுடைய குறிகள் (+ அல்லது —) எந்தெந்த மாறிகள் நேரிடைத் தொடர்பையும், எவை எதிரிடைத் தொடர்பையும் பெற்றுள்ளன என்பதனை விளக்கும்.

மாதிரிப் பிழைகளும் சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனைகளும் (Sampling Errors and Tests of Significance)

தோராயமாக, கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினல், பல்தரத் தொடர்புக் கெழுவின் மாதிரிப் பிழையைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$s_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{N-m}} \qquad (18 \cdot 19)$$

இங்கு m என்பது போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடும். மாதிரிகளிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்பொழுதுகூட, R-ன் மாதிரிப்

பரவல் நார்மல் பரவலின் நிலையை எய்துவதில்லை; எனவே, மேற் கண்ட சூத்திரத்தின் பயன் முக்கியமான பல வரம்புகளுக்குட்பட்ட தாகிறது. R-ன் சிக்னிஃபிக்கன்ஸை சோதிப்பதற்கு, அதிகாரம் 16-ல் விளக்கப்பட்ட முறைகளே அதிகப் பயன் தரும். X_1-ன் உண்மையான மதிப்புகளுக்கும், (போக்குச் சமன்பாட்டினால்) மதிப்பிடப் பட்ட மதிப்புகளுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை அளவைக் கருவி யாக்கி (yard stick) X_1-ன் மாறுபாட்டில் எவ்வளவு பகுதி X_2, X_3, X_4னால் விளைந்திருக்கக்கூடும் என்று சோதனை செய்யலாம். தொடர் பைப்பற்றிய மற்றப் பிரச்சினைகளைப்போலவே இதுவும் இரு மாறுபாடுகளை ஒப்பிடுவதாக அமைந்துவிடுகிறது.

X_1-ன் சராசரியிலிருந்து, கணக்கிடப்பட்ட X_1-ன் மதிப்புகளின் விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கி, மொத்தமாக்கினால் 1695·11 வருகிறது. X_1 என்பது, கொடுக்கப்பட்ட மற்ற மாறிகளுடன் உண்மையாகவே தொடர்பற்று இருப்பின் இந்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை அதற்குத் தகுந்த வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுத்தால் வரும் மாறு பாடு, X_1-மாறியில் வாய்ப்புக் காரணங்களால் ஏற்படும் வேறுபாட்டை அளவிடுவதாகும். ஏனென்றால், இந்தத் தொடர்பற்ற நிலையில், கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளுக்கும், X_1-ன் சராசரிக்குமுள்ள விலக் கங்கள் வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டுமே நிகழ்ந்திருக்கக்கூடும்; இவ் வாய்ப்புக் காரணங்களுக்கான வரையற்ற டிகிரிகளைப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை குறிப்பிடும். அப்படி யில்லாமல், X_1-என்பது, X_1, X_2, X_3 என்ற தனித்த மாறிகளுடன், ஒரு மொத்தமான, கூட்டான தொடர்பைப் பெற்றிருக்கிறது என்று கொள்வோம்; அப்பொழுது மதிப்பிடப்பட்ட X_1-க்கும், சராசரி X_1-க்கும் உள்ள விலக்கங்கள், இந்த மொத்தமான மாறியின் இயக்கத்தைக் குறிப்பதாக அமையும். அதுகால், இதன் மதிப்பு, வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டும் ஏற்பட்டிருக்கக்கூடிய மாறு பாட்டைவிட அதிகமாக இருக்கும்.

மாறுபாட்டுப் பிழையின் (error variance) ஒரு மதிப்பீடு இப் பொழுது தேவை. இதை, X_1-ன் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும், கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளுக்குமுள்ள விலக்கங்களிலிருந்து அளவிட லாம். அவ் விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கிக் கூட்டினால் வரும் மொத்தம் 1,256·92. 57 விவரங்கள் உள்ளதாலும், போக்குச் சமன்பாட்டில் நான்கு மாறிலிகள் உள்ளதாலும், இந்தக் கூட்டுத் தொகைக்காக 53 வரையற்ற டிகிரிகள் கிடைக்கும். போக்குக் கெழுக்களான மூன்றும் (a யத் தவிர மற்ற மூன்று மாறிலிகளும்) X_1-ன் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளிடையே மூன்று டிகிரிகளைத் தருகின்றன. இங்கு நாம் சோதிக்கப்போவது ஒரு சூனிய எடுகோளை (null-hypothesis); அதாவது, ஒப்பிடப்படும் இரண்டு மாறுபாடுகளிடையே உள்ள

வித்தியாசம் சூனியம், அல்லது இரண்டும் ஒரே தொகையை மதிப்பிடுவதாகக் கருதலாம் என்பதே அதன் எடுகோள். வேறு முறையிலும் இதனைக் கூறலாம். வெப்ப நிலைகளைக் குறிக்கிற மூன்று தனித்த மாறிகளின் கூட்டியக்கத்தால் ஏற்படும் விளைவுகளுக்கும், கூல விளைச்சலுக்கும் தொடர்பு இல்லை என்பதே அது. அப்பொழுது சோதனைக்கான விவரங்கள் கீழ்வருமாறு:

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற டிகிரிகள்	விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	சராசரி வர்க்கம் s^2
கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பீடுகளுக்கிடையே	3	1,695·11	565·04
கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும் கணக்கிடப்பட்டவைகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் ...	53	1 256·92	23·72
	56	2,952·03	

மாறுபாட்டு விகிதத்திற்கான $s_1^2 = 565{\cdot}04$; $s_2^2 = 23{\cdot}72$; எனவே,

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{565{\cdot}04}{23{\cdot}72} = 23{\cdot}8$$

F-ன் பரவலுக்கான அட்டவணையிலிருந்து (பின் இணைப்பு அட்டவணை VII), $n_1 = 3$, $n_2 = 53$ என்ற நிலையில் F-ன் 1 நூற்றுமான அளவு சுமாராக 4·17 என்பதைக் காண்கிறோம். கணக்கிடப்பட்ட F-ன் மதிப்பு இதைவிட எவ்வளவோ அதிகமாக உள்ளது. எனவே, R என்பது சிக்னிஃபிக்கென்டாக இருக்கிறது என்று முடிவு கூறுவோம். வெப்ப அளவின் வேறுபாடுகளால், கூல விளைச்சலில் நிகழும் வேறுபாடுகள், வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டும் நிகழக்கூடிய மாறுபாடுகளைக்காட்டிலும் வெகு அதிகமாக உள்ளன.

சில சமயங்களில், மாறுபாடு விகிதத்தைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால் கணக்கிடுவது எளிதாகும் :

$$F = \frac{R^2(N-k-1)}{(1-R^2)k}$$

இங்கு k என்பது பல்தரப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். (R^2 என்பதனை இரு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளான விகிதமாகக் கணக்கிட்டால்—அதாவது 1,695·11/2,952·03 என்றால், இந்தக் கோவை, முன்பு கொடுக்கப்பட்ட $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ என்பதற்குச் சமம் என்பதை எளிதில் அறியலாம்).

இந்த எடுத்துக்காட்டில்

$$F=\frac{0{\cdot}5742\,(57-3-1)}{(1-0.5742)\times 3}=23{\cdot}8$$

காலவாரியில் அமைந்த வரிசைகளிலுள்ள அடுத்தடுத்த (successive) அளவு விவரங்கள் சார்பற்றிருப்பதில்லை என்பதனை முன்பே கண்டுள்ளோம்; எனவே, கால வரிசைகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட அளவைகளைக்கொண்டு சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனைகளைச் செய்வது வாதத்திற்கிடமான முறையாகும். எனினும், இங்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள வெப்பநிலை-விளைச்சல் விவரங்களில் ஆண்டுக்கு ஆண்டு ஏற்பட்டிருக்கும் ஏற்ற விறக்கங்களுக்குப் பெரும்பாலும் வாய்ப்புக் காரணங்களே பொறுப்பாக அமைந்துள்ளன; எனவே, இந்த எடுத்துக்காட்டில் சிறிது நம்பிக்கையுடனேயே சோதனைகளைச் செய்யலாம்.

தொடர்பு அளவைகளை ஒப்பிடுதல்: கூல விளைச்சலிலுள்ள வேறுபாடுகளுக்கான காரணங்களை ஆராயும்பொழுது, பல தொடர்பு முறைகளைச் சென்ற பக்கங்களில் கண்டுபிடித்துள்ளோம்; அவைகளை ஒரே பட்டியலில் அமைத்துப் பார்ப்பதால், நமக்குப் பல காரணங்களின் தனி விளைவுகளும் மொத்தமான விளைவுகளும், எப்படி விளைச்சலைப் பாதித்துள்ளன என்பதைப்பற்றி அறிய வாய்ப்பாகும் (அட்டவணை 18-2-ஐப் பார்க்க). முதற்கண் கிடைத்த s_1-ன் மதிப்பான 7·20 என்பது, கடைசியில் $s_{1\cdot234}$-ன் மதிப்பான 4·70ஆகக் குறைந்துள்ளது. மற்றக் காரணங்களையும் பயனுக்கி—பயிராகும் மாதங்களின் மழை அளவு போன்றவை—இந்த மதிப்பையும் குறைத்துவிடலாம்; அப்பொழுது நம் மதிப்பீடுகளின் ஏற்புடைமை அளவும் அதிகமாகும். இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ள முறையை

அட்டவணை 18-2

கான்ஸாஸில் கூல விளைச்சலுக்குப் பொருத்தமான சில அளவைகளை ஒப்பிடுதல்

மதிப்பீட்டின் அடிப்படை	மதிப்பீட்டின் ஏற்புடைமை அளவு	தொடர்புக் கெழு
X_1-ன் கூட்டுச் சராசரி $X_1 = 19{\cdot}13$	$s_1 = 7.20$	
$X_1 = 103{\cdot}76 - 1{\cdot}146X_2$	$s_{1\cdot2} = 6.29$	$r_{12} = -0.4861$
$X_1 = 156{\cdot}71 - 1{\cdot}735X_3$	$s_{1\cdot3} = 5.06$	$r_{13} = -0.7108$
$X = 117{\cdot}35 - 1{\cdot}257X_4$	$s_{1\cdot4} = 6.15$	$r_{14} = -0.5202$
$X_1 = 193{\cdot}05 - 0{\cdot}430X_2 - 1{\cdot}295X_3 - 0{\cdot}505X_4$	$s_{1\cdot234} = 4.70$	$R_{1\cdot234} = 0.758$

இன்னமும் விரிவாக்கி, பல தனித்த மாறிகளையும் இணைக்கலாம். இணைக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு புது மாறிக்கும், நார்மல் சமன்பாடு களின் எண்ணிக்கை ஒவ்வொன்ருக உயரும். கான்ஸாஸில் ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மாதங்களின் மழை அளவுகளையும் (X_5, X_6, X_7 என்பவைகள்) சேர்த்தால், $s_{1\cdot234567}$ என்பது 3·89ஆகக் குறை கிறது. (முன்பு $s_1=7\cdot20$, $s_{1\cdot234}=4.70$.) முன்பு $R_{1\cdot234}=0\cdot758$ஆக இருந்ததல்லவா? இப்பொழுது அது $R_{1\cdot234567}=0\cdot841$. (இம் முடிவு களுக்கான கணக்கு விவரங்கள் கொடுக்கப்படவில்லை.)

முடிவுகளைப் பயன்படுத்துதல் : மதிப்பீட்டிற்கான சமன் பாட்டின் பயனை விளக்குவோம். 1951ஆம் ஆண்டில், கான்ஸாஸில் ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மாதங்களின் சராசரி வெப்ப அளவுகள் முறையே, 68.9°F, 76.8°F, 78.2°F என்று இருந்தன. அந்த ஆண்டில் நிகழக்கூடிய கூல விளைச்சல் எவ்வளவு? X_2, X_3, X_4 என்பவைகளுக்கு,

$$X_1=193\cdot05-0\cdot430X_2-1\cdot295X_3-0\cdot505X_4$$

என்ற சமன்பாட்டில் மேற்கண்ட மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்,

$$X_1=193\cdot05-(0.430\times68\cdot9)-(1\cdot295\times76\cdot8)$$
$$-(0.505\times78.2)=24\cdot48$$

என்ற விடை வரும். அதாவது 1951-ல் ஏக்கருக்கு 24·48 புஷல்கள் கூலம் விளைந்திருக்கும். உண்மையான விளைச்சல் 24 புஷல்கள்; எனவே, நம் முடிவு உண்மைக்கு வெகு நெருக்கமாகவே உள்ளது. இவ்வளவு நெருங்கிய தோராயம் தற்செயலாக நேர்ந்ததுதான் என்ருலும், மற்ற அடிப்படைக் காரணங்களில் மாற்றம் இல்லா விட்டால், மதிப்பிடப்பட்ட விளைச்சலானது, உண்மை விளைச்சலைவிட வித்தியாசப்படக்கூடிய அளவு, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையான $s_{1\cdot234}=4\cdot70$ என்பதால் நிர்ணயிக்கப்படும் எல்லைகளுக்குள்ளேதான் இருக்கும்.

மாறிகளிடையேயுள்ள ஒருசிறை அல்லது கழிவுத் தொடர்புகளை அளவிடுதல்

ஒருசிறைத் தொடர்பின் பொருள்

முற்பகுதியில் நாம் கான்ஸாஸில் கூல விளைச்சலானது ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மாத வெப்ப அளவுகளோடு எந்த முறையில் தொடர்புகொண்டுள்ளது என்பதனை ஆராய்ந்தோம்; மூன்று தனித்த மாறிகளும் ஒருங்கே செயற்பட்டால், அதனால் விளைச்சலில் ஏற்படும் விளைவுகளையே நாம் குறிப்பாக விளக்கினேம். பல சமயங் களில், இத்துடன் தொடர்புகொண்ட மற்றுமொரு பிரச்சினையே முக்கியமானதாக இருக்கலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியில், மற்ற

மாறிகளிடையே வேறுபாடுகள் நிகழாதிருக்கும்பொழுது, ஒரு தனித்த மாறிக்கும் ஒரு சார்புடை மாறிக்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடித்தலே அந்தப் பிரச்சினை. குறிப்பாக, ஜுலை, ஆகஸ்டு மாத வெப்ப அளவுகளால் ஏற்படும் மாற்றங்களை முழுவதும் கணக்கிட்ட பிறகு, கூல விளைச்சலில், ஜுன் வெப்ப நிலையினால் மட்டும் ஏற்படும் விளைவுகள் என்ன? இதுவேதான் கழிவு, அல்லது ஒருசிறைத் தொடர்புப் பிரச்சினை.

இரண்டு மாறிகளைமட்டும் தனியே பிரித்துவிட்டு அவைகளை ஆராயமுடியும் என்று கொள்வோம்; அப்படியிருக்குமானால், சமூக விஞ்ஞானி (social scientist) மேற்கொள்ளும் பகுப்பாய்வு முறையினது ஆற்றல் அளவிடுதற்கரிய வகையில் அதிகரிப்பதற்கு ஒரு பெரும் வாய்ப்பாக இருக்கும். சாதாரணமாக, வேதியியல் விஞ்ஞானி, தனக்குத் தேவைப்படாத மற்றத் தனிமங்களை (elements) ஒதுக்கி விட்டு, குறிப்பாக தேவைப்பட்ட தனிமத்தைமாத்திரம் எடுத்துக் கொண்டு ஆராய்கிறார் அல்லவா? அதுபோன்ற ஓர் ஆற்றல், சமூக விஞ்ஞானிக்கும் கிடைத்தாற்போலாகும். ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட மாறியைத் தவிர மற்ற மாறிகளை எவ்வளவு செம்மையாக நீக்கிவிட்டு, குறித்த மாறியைத் தனியே பிரித்துவைக்க முடிகிறதோ, அவ்வளவு செம்மையாக ஆராய்ச்சியும் பயனுள்ளதாகும்.

வரிசையாக உள்ள விவரங்களிலிருக்கும் வேறுபாடுகளுக்குக் காரணமான பல மாறிகளில் ஒன்றைமாத்திரம் தனியே பிரித்து வைத்துக்கொண்டு, மற்றவைகளை ஒதுக்கிவிடுதல் பொருளாதாரத் துறையிலும் சமூகவியல் துறையிலும் முடியாத ஒன்று. குறித்த ஒரு நிகழ்ச்சிக்குப் பல நேரிடைக் காரணங்களாகவும், பல எதிரிடைக் காரணங்களாகவும் இருக்கும்; அவைகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவுமிருக்கும். எனவே, வேதியியலறிஞர் செய்வதுபோல் இரண்டே இரண்டு மாறிகளைமட்டும் வைத்துக்கொண்டு மற்றவைகளை நீக்கிவிடுவது, சமூகவியலறிஞரால் முடியும் என்று எதிர் பார்ப்பதும் இயலாது. என்றாலும், புள்ளியியலறிஞரும், ஒரு வரம் பிற்குள், பருப்பொருளறிஞரைப்போலவே (physical scientist) சில மாறிகளின் போக்கைமாத்திரம் ஆராயும்பொழுது மற்ற மாறிகளின் விளைவுகளை ஒதுக்கிவிடுவதற்கான முறைகளை வகுத்துள்ளார். பொதுவாக, சமூகவியலறிஞர்களிடமுள்ள ஆய்வு முறைகளில் மிகவும் சக்திவாய்ந்த முறைகள் இவைகளே என்று துணியலாம்.

கான்ஸாஸில் கூல விளைச்சல் எடுத்துக்காட்டை வைத்துக் கொண்டு, ஒருசிறைத் தொடர்பு முறைகளை விளக்கலாம். கூல விளைச்சலுக்கும் ஒவ்வொரு மாதச் சராசரி வெப்ப நிலைக்கும் உள்ள தொடர்பைத் தனித்தனியே, கழிவு முறையில் கண்டுபிடிப்பதே இப்பொழுது நம் நோக்கம்.

இந்தப் பிரச்சினைக்கும், சாதாரணமாக இரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை அளவிடும் முறைக்குமுள்ள வேற்றுமைகளைக் கவனித்தல் மிக அவசியமானது. எடுத்துக்காட்டாக X_1, X_3 என்ற இரண்டு மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது நமக்கு,

$$X_1 = 156{\cdot}71 - 1{\cdot}735 X_3$$
$$s_{1\cdot3} = 5{\cdot}06$$
$$r_{13} = -0{\cdot}7108$$

என்ற விவரங்கள் முன்பே கிடைத்துள்ளன. இந்த அளவைகள், மற்ற இரு மாறிகளையும் புறக்கணித்துவிட்ட நிலையில், அவ்விரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை அளவிடும். அவ்விரண்டு—X_2, X_4— மாறிகளை நாம் கவனிக்கவே இல்லை; தள்ளுபடி செய்து விட்டோம். ஒரு தனிமம் (element) மற்றொரு தனிமத்தின்மேல் என்ன விளைவுகளை ஏற்படுத்துகிறது என்பதை அறிய ஒரு வேதியியலறிஞர், பல அசுத்தங்களைக் கொண்ட ஒரு சோதனைக் குழலை (test-tube) (அசுத்தங்களை நீக்குவதற்கான முயற்சிகளைச் செய்யாமல்) பயன்படுத்தினால் எப்படியிருக்குமோ அப்படிப்பட்ட நிலையாகிறது இது. புள்ளியியலறிஞரால் இவ்வகை 'அசுத்தங்களை' நீக்குவது பொதுவாக முடியாது; ஆனாலும் தான் கையாளுகிற விவரங்களில் அவைகள் உள்ளன என்பதனை அவர் நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

மற்ற இரண்டு காரணங்களும் (ஜூன், ஆகஸ்டு மாத வெப்ப நிலைகள்) மாறாமல் இருக்கும்பொழுது விளைச்சலுக்கும் ஜூலை மாத வெப்ப அளவிற்குமுள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடித்தால், அதுதான் கழிவுத் தொடர்பு ஆகும். மற்ற இரு மாறிகளின் விளைவுகளைக் கணக்கில் வைத்துக்கொண்டுள்ளோம்; ஆனால், ஜூலை மாத வெப்ப அளவு மாத்திரம் விளைச்சலை எப்படிப் பாதிக்கிறது என்பதனை ஆராய்வோம்.

இதுபோன்ற நிலை ஏற்படுத்த ஒரு முறையைச் செயல்படுத்தலாம்; பற்பல ஆண்டுகளுக்கான விளைச்சல் விவரங்களும், வெப்ப நிலை விவரங்களும் நம்மிடையே இருந்தால், அவைகளிலிருந்து ஜூன், ஆகஸ்டு மாத வெப்பநிலை ஒரே அளவிலுள்ள ஆண்டுகளை மாத்திரம் பொறுக்கி எடுக்கலாம். சுமாராக, அத்தகைய ஆண்டுகள்—ஜூன் மாதச் சராசரி வெப்பம் 74°F, ஆகவும், ஆகஸ்டு மாதச் சராசரி வெப்பம் 78°F ஆகவும் கொண்டவை—30 நமக்குக் கிடைக்கின்றன என்று வைத்துக்கொள்வோம். இந்த 30 ஆண்டுகளில் விளைச்சலும் ஜூலை வெப்ப அளவும் மாறியிருக்கும். இந்த இரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை இப்பொழுது அளவிடுவோம். இதன் மதிப்பு, ஜூன் அல்லது ஆகஸ்டு மாதத்திய வெப்ப நிலைகளால் பாதிக்கப்படாதது. சில காரணங்களை

மட்டும் மாருமல் செய்கிற இந்த முறையைச் செயல்படுத்துவது தான் முடியாதது; பொதுவாகக் கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை அவ்வளவு பெரிதாக இருக்காது; மற்றும் மிகுந்த வேறுபாடுகள் உடையதாக இருக்குமாதலால், இதுபோன்று நமக்குத் தகுந்த விவரங்களைமட்டும் பொறுக்கி எடுத்தல் இயலாததே. ஆனாலும், அதே முடிவிற்கு வருவதற்கு மற்ற முறைகள் உள்ளன :

செய்முறையின் விளக்கம்

ஜூன், ஆகஸ்டு வெப்ப அளவைகளைத் தனித்த மாறிகளாகவும், விளைச்சலைச் சார்புடை மாறியாகவும் வைத்து, இவைகளிடையே உள்ள தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டை முதலில் நிறுவுவோம்; அதன் அமைப்பு

$$X_1 = a + b_{12\cdot4}X_2 + b_{14\cdot3}X_4$$

என்றிருக்கும். சென்ற உதாரணத்தில் செய்ததுபோலவே இப்பொழுதும் மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க:

$$X_1 = 157.37 - 0.836X_3 - 0{\cdot}979X_4$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால் கணக்கிட :

$$s^2_{1\cdot24} = s^2_1 - b_{12\cdot4}p_{12} - b_{14\cdot2}p_{14}$$

நமக்கு $s^2_{1\cdot24} = 31.9457$

அல்லது $s_{1\cdot24} = 5.65$

என்ற விடை கிடைக்கும்.

எனவே, விளைச்சலை ஜூன், ஆகஸ்டு மாத வெப்ப அளவுகளால்மட்டுமே மதிப்பிட்டால், அவைகளின் தரப்பிழை—அல்லது, மீதியான வேறுபாட்டின் தரவிலக்கம்—5·65 புஷல்களாகிறது. ஆனால், விளைச்சலை, ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு மூன்று மாத வெப்ப அளவுகளையும் கொண்டு மதிப்பிட்டோமானால், தரப்பிழை—அல்லது மீதியான வேறுபாட்டின் தரவிலக்கம்—4.70 புஷல்கள்தாம் என்பதனை நாம் முன்பே பார்த்தோம். அதாவது, ஜூன், ஆகஸ்டு வெப்ப அளவுகளின் விளைவுகளைக் கருதிய பின்பு 5.65 ஆக உள்ள மீதியான—அல்லது 'விளக்கப்படாத'— வேறுபாடு, ஜூலை மாத வெப்ப அளவையும் கணக்கிலெடுத்துக்கொண்டால் 4.70 ஆகக் குறைகிறது. இவ்விரண்டு அளவைகளிடையே உள்ள வித்தியாசத்தை X_1, X_3 களிடையே உள்ள தொடர்பை—X_2, X_4 மாறிகளால் பாதிக்கப்படாத தொடர்பை—குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம்.

X_1 என்ற சார்புடை மாறிக்கும், X_3 என்ற தனித்த மாறிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பை அளவிட (18·20) சூத்திரம் பயன்படும் என்பது நமக்கு முன்பே (சூத்திரம் 9.7) தெரியும்.

$$r^2_{13} = \frac{s^2_1 - s^2_{1\cdot3}}{s^2_1} \tag{18.20}$$

சமன்பாட்டின் வலப்புறமிருக்கும் கோவையின் விகுதி s^2_1 ஆகும்; இது X_1 மாறியின் வேறுபாட்டின் அளவான மாறுபாடாகும். இதே மதிப்பு, பகுதிக் கோவையின் முதலிலுள்ளது. இரண்டாவதாக உள்ள $s^2_{1\cdot3}$ என்பது, X_3 மாறியின் விளைவுகளை[9] நீக்கிய பிறகு X_1-ல் உள்ள வேறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. அதாவது, X_3-ல் X_1-ல் ஏற்பட்ட வேறுபாடு நீக்கப்பெற்ற பிறகு X_1-ல் உள்ள வேறு பாட்டை, பகுதிக் கோவை குறிக்கிறது. இந்தக் குறைந்த வேறு பாட்டை, முதலில் கிடைத்த மாறுபாட்டின் ஒரு பிரிவாகக் கூறும் பொழுது, அது இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை அளவிடும் தொடர்புக் கெழுவின் வர்க்கமாகும். இந்த எடுத்துக்காட்டில்

$$r^2_{13} = \frac{51.79 - 25\cdot62}{51.79} = 0.5053$$

$$r_{13} = -0.711 \quad \text{என்று வரும்.}$$

இதற்கு முறையான ரெக்ரெஷன் கெழுவின்—b_{13}—குறியையே (sign) இந்தத் தொடர்புக் கெழுவிற்கும் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

இதே முறையைச் சற்றே விரிவாக்கி, X_1, X_3களிடை உள்ள கழிவுத் தொடர்பைக் கணக்கிட—அந்தத் தொடர்பு X_2, X_4 மாறிகளால் பாதிக்கப்படாத நிலையில்—கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம்:

$$r^2_{13\cdot24} = \frac{s^2_{1\cdot24} - s^2_{1\cdot234}}{s^2_{1\cdot24}} \tag{18.21}$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் விகுதியாக இருப்பது $s^2_{1\cdot24}$; இது X_2, X_4 என்ற இரு மாறிகளின் இயக்கங்களை நீக்கிய பிறகு X_1-ல் உள்ள மாறுபாட்டைக் காட்டுகிறது. இதுவே பகுதி யின் முதலுறுப்பாக உள்ளது. இரண்டாம் உறுப்பு X_2, X_3, X_4 என்ற மூன்று மாறிகளின் இயக்கங்களும் நீங்கிய பிறகு X_1-ல் உள்ள மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. பகுதியிலுள்ள இரு உறுப்பு களிடையே வித்தியாசம் எதனால் ஏற்படுகிறதென்று பார்ப்போம். X_1 மாறிக்கும் X_2, X_4 என்ற இரு மாறிகளுக்கும் தொடர்புள்ளது; X_1 மாறிக்கும் X_3 மாறிக்கும் உள்ள தொடர்பு மேற்கண்ட தொடர்பைவிட அதிகமாக விருந்தால்தான், இவ்விரு உறுப்புகளும் வேறுபடும்.

$$X_1 = 193.05 - 0.430X_2 - 1.295X_3 - 0.505X_4$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள்

[9] இரு மாறிகளிடையே உள்ள உடன்தொடர்பு, அவைகளிடை உள்ள காரணத் தொடர்பைத் தெரிவிப்பதில்லை; என்றாலும், விளக்கத்திற்காக இது போன்று—காரணத் தொடர்பு உள்ளதைப் போன்று—கூறுவது சுலபமானது.

$$X_1 = 157.37 - 0.836X_3 - 0.979X_4$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்பீடுகளைவிட ஏற்புடையனவாக (reliable) இல்லாமலிருந்தால், (18.21)ஆம் சூத்திரத்தில், பகுதியிலுள்ள இரு உறுப்புகளும் சமமாகிவிடும்; அவைகளின் வித்தியாசம் சுழிதான்; எனவே $r^2_{13\cdot24}$ என்பதும் சுழியேதான். அப்படியில்லாமல் X_2, X_3, X_4 என்ற மாறிகளையுடைய சமன்பாடு, X_2, X_4 என்பவற்றைமட்டுமுள்ள சமன்பாட்டைவிடச் சிறப்பான மதிப்பீடுகளைத் தருவதாயின், $s^2_{1\cdot234}$ என்பது $s^2_{1\cdot24}$ என்பதைவிடக் குறைவாயிருக்கும். அப்பொழுது, இரண்டுக்குமிடையே உள்ள வித்தியாசம், X_3 மாறியினால் ஏற்பட்ட அதிகப்படியான பங்கைக் குறிப்பிடும். இதனை X_2, X_4 இயக்கங்களினால் ஏற்பட்ட வேறுபாடு போக X_1-ல் உள்ள வேறுபாட்டின் ஒரு பகுதியாக வைத்தால், X_1, X_3 மாறிகளிடையே உள்ள கழிவுத் தொடர்பளவை கிடைக்கும். எல்லா உறுப்புகளுமே வர்க்கமாக்கப்பட்டிருப்பதால், (18.21) சமன்பாட்டில் இடப்புறமிருப்பது $r^2_{13\cdot24}$ ஆகும். இதற்கான வர்க்க மூலத்தை நிறுவினால், நமக்கு $r_{13\cdot24}$ என்ற கழிவுத் தொடர்புக் கெழு கிடைக்கும்.

தகுந்த மதிப்புகளை (18.21) சமன்பாட்டில் பொருத்தி

$$r^2_{13\cdot24} = \frac{31.9457 - 22.0513}{31.9457} = 0.3097$$

$$r_{13\cdot24} = -0.557$$

என்று கணக்கிடலாம். $b_{13\cdot24}$ என்ற ரெக்ரஷன் கெழு — குறியைக் கொண்டுள்ளதால், $r_{13\cdot24}$ என்பதும் — குறியையே கொண்டது.

X_2, X_4 என்ற மாறிகள் X_1 ஐயும், X_3 ஐயும் பாதிக்காத நிலையில், X_1, X_3 களிடையே உள்ள உடன்தொடர்பை $r_{13\cdot24}$ என்ற கெழு கணக்கிடுகிறது. X_1 மாறியில் X_2, X_4 மாறிகளால் ஏற்படும் இயக்கங்களை நீக்கிய பிறகு, X_3 மாறியைப் பயன்படுத்தி X_1-ன் மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடும்பொழுது ஏற்படும் பிழைகளை இதே கெழு அளப்பதாகவும் கருதலாம்.

மேலேயுள்ள விளக்கத்தில் பயன்படுத்தப்பட்ட அடையாளங்களை, இடத்தைப்பொறுத்து அறிவது எளிது. கழிவு ரெக்ரஷன் கெழுக்களிலுள்ளவைபோலவே, இங்கும் புள்ளிக்கு இடப்புறமுள்ள ஒட்டுக் குறிகளில் முதலாவது சார்புடை மாறியையும், இரண்டாவது குறிப்பாகக் கழிவுத் தொடர்புக் கெழுவில் இடம்பெறும் தனித்த மாறியையும் குறிக்கும் (இவைகள் முதன்மையான ஒட்டுக் குறிகள்). புள்ளிக்கு வலப்பக்கம் இருப்பவை (இரண்டாம்படி ஒட்டுக் குறிகள்) ரெக்ரஷன் சமன்பாட்டிலுள்ள மற்ற ஏனைய மாறிகளைக் குறிக்கின்றன. தற்போதைய எடுத்துக்காட்டில் இவைகள் இரண்டுதான்:

இவை பலவாகவும் இருக்கலாம். பொதுவாக, X_1, X_3 களிடையே உள்ள கழிவுத் தொடர்புக் கெழுவிற்கான சூத்திரம்:

$$r^2_{13\cdot 2456\cdots n} = \frac{s^2_{1\cdot 2456\cdots n} - s^2_{1\cdot 23456\cdots n}}{s^2_{1\cdot 2456\cdots n}} \qquad (18.22)$$

பகுதிக் கோவையில் முதலுறுப்பில் இல்லாமலும், இரண்டாம் உறுப்பில் இருப்பதுமான தனித்த மாறிதான் (இங்கு 3—X_3) சார்புடை மாறியுடன் இணைக்கப்பட்டு, கழிவுத் தொடர்பைக் கணக்கிட உதவுகிறது.

நாம் இப்பொழுது நான்கு மாறிகளைக்கொண்ட ஒரு பிரச்சினையை ஆராய்கிறோம். இங்குச் சார்புடை மாறி X_1 தான்; எனவே, அத்துடன் மற்ற இரண்டு தனித்த மாறிகளையும் இணைத்துக் கழிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$r^2_{12\cdot 34} = \frac{s^2_{1\cdot 34} - s^2_{1\cdot 234}}{s^2_{1\cdot 34}} \qquad (18.23)$$

$$r^2_{14\cdot 23} = \frac{s^2_{1\cdot 23} - s^2_{1\cdot 234}}{s^2_{1\cdot 23}} \qquad (18.24)$$

என்ற சூத்திரங்கள் இதற்குப் பயன்படும்.

ஒவ்வொரு நிலையிலும், சமன்பாட்டின் வலப்புறக் கோவையின் பகுதியானது X_1-உடன் தனித்த மாறிகளில் ஒன்று இணைக்கப்பட்டபொழுது (மற்ற இரு மாறிகளின் இயக்கங்களை நீக்கிய பிறகு), X_1-ன் மாறுபாட்டில் ஏற்படும் கழிவைக் குறிக்கிறது. இந்தத் தனித்த மாறியின பங்கு ஒன்றும் இல்லாதிருந்தாலும், அல்லது தொடர்பு மிகுதியில்லாதுபோனாலும், பகுதியின் மதிப்பு சுழிதான்; கழிவுத் தொடர்புக் கெழுவும் சுழியேதான். சேர்க்கப்பட்ட மாறி, மீதியிருக்கும் எல்லா வேறுபாடுகளுக்கும் ‘பொறுப்பாக’ இருப்பின், பகுதியின் இரண்டாம் உறுப்பு சுழியாகும் ($s^2_{1\cdot 234}$); அப்பொழுது கழிவுத் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பு 1 தான். எனவே, கழிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களின் மதிப்புகளும் 0, 1-க்கிடையே அமையும். விகுதியிலுள்ள உறுப்பு, அல்லது பகுதியிலுள்ள முதலுறுப்பு, s^2_1 என்ற X_1 மாறியின் மாறுபாடுமட்டும் அன்று என்பதனைக் கவனிக்கவும் அது $s^2_{1\cdot 23}$-ஐப் போன்றதொன்று; இது முதலில் கணக்கிலெடுக்கப்பட்ட இரண்டு மாறிகளின் இயக்கங்களை நீக்கிய பிறகு X_1 மாறியிலுள்ள மாறுபாட்டையே குறிப்பதாகும். முதலில் கணக்கிடப்பட்ட மாறிகளே, கெழுவில் புள்ளிக்கு வலப்புறத்திலிருக்கும் இரண்டாம்படி ஒட்டுக் குறிகளால் குறிப்பிடப்பட்டவை.

மற்றுமொரு செய்தியையும் உறுதியாகக் கூறவேண்டும். தொடர்புக் கெழுக்கள் ‘கழிவாக’ உள்ளது, இரண்டாம்படி ஒட்டுக்

குறிகளால் குறிப்பிடப்படும் மாறிகளைப் பொறுத்தமட்டில்தான். $r_{12\cdot34}$ என்பது X_3, X_4 என்ற மாறிகளின் இயக்கங்களை நீக்கிய பிறகு X_1, X_2 என்ற மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவைக் குறிப்பிடும். X_1, X_2 என்ற மாறிகளையும் பாதிக்கிற காரணங்கள் பல இருக்கலாம். அவைகளால் ஏற்படும் குழப்பங்கள் நீக்கப்படவில்லை. அவை ஆய்வு முறையைக் குழப்பியவாறே உள்ளன.

ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கணக்கிட மற்றொரு முறை

பல மாறிகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியில் ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்கள் பலவற்றைக் கணக்கிடலாமென்பது தெளிவு. அவைகளைக் கணக்கிடுவதற்கு மேலே விவரிக்கப்பட்ட முறையைவிடச் சிறப்புடையதும் ஒழுங்காக அமைந்ததுமான முறையொன்று உள்ளது.

இரண்டே இரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள சாதாரணத் தொடர்புக் கெழுக்களை 'சுழிப்படி' கெழுக்களென்று கூறுவோம்; அவைகளைக் குறிப்பிட r_{13}, r_{24} போன்ற அடையாளங்களைப் பயன்படுத்துவோம். ஒரு கழிவுத் தொடர்புக் கெழு கூடுதலான ஒரே ஒரு மாறியைப் பெற்றிருந்தால், அதனை 'முதற்படி' கெழுவென்போம்; அதற்கான குறியீடு $r_{12\cdot3}$, $r_{24\cdot3}$ போன்றவை. இதுபோலவே, இருபடி, முப்படி, n- படிக் கெழுக்களையும் கணக்கிடலாம். எவ்வளவு 'படி' என்பது, இரு மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பை அளவிடுங்கால், மற்ற எவ்வளவு மாறிகளை மாருதவைகளாக வைத்துள்ளோம் என்பதனைப்பொறுத்தது.

ஒவ்வோர் ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுவையும், அதன் 'படி'யைவிட ஒரு படி குறைவான கெழுக்களின் உதவியால் கணக்கிடலாம். முதற்படி கெழுவிற்குச் சூத்திரம் :

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}\cdot r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{\frac{1}{2}}\,(1-r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.25)$$

இரு படி கெழுவிற்கு

$$r_{12\cdot34} = \frac{r_{12\cdot3} - r_{14\cdot3}\cdot r_{24\cdot3}}{(1-r_{14\cdot3}^2)^{\frac{1}{2}}\,(1-r_{24\cdot3}^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.26)$$

என்பது சூத்திரம்.

பொதுவாக, எந்தப் 'படி' கெழுவிற்கும் பொருத்தமான சூத்திரம்,[10]

$$r_{12\cdot345\cdots n} = \frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)} - (r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}\cdot r_{2n\cdot345\cdots(n-1)})}{(1-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}^2)^{\frac{1}{2}}\,(1-r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.27)$$

[10] ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுவொன்றைக் கண்டுபிடிக்க, இவைகளில் ஏதாவதொரு சூத்திரத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். வலப்பக்கக் கோவையின் பகுதியில்

எனவே, சுழிப்படி கெழுக்களிலிருந்து தொடங்கி, முறையே அதிகப் ‘படி’ கெழுக்களை இந்தச் சூத்திரங்களினால் கணக்கிட முடிகிறது. எண்கணித வழியில் (arithmetical) கணக்கிடுவது சிறிது சிரமமாகவிருக்கலாம்; ஆனால், தொகுக்கப்பட்டுக் கிடைக்கும் பல அட்டவணைகளின் உதவியால் கணக்கிடுதல்களிலுள்ள சிரமத்தை மிகவும் குறைத்துவிட முடியும்.[11] முன் கூறப்பட்ட எடுத்துக் காட்டைக் கொண்டே இந்த முறையை விளக்கலாம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில், நமக்குத் தேவைப்படுவது $r_{12\cdot34}$, $r_{13\cdot24}$, $r_{14\cdot23}$ என்பவை. கூல விளைச்சலுக்கும் மூன்று மாதங்களின் வெப்ப அளவிற்கும் (தனித்தனியே) உள்ள கழிவுத் தொடர்பினை இவைகள் அளவிடும். இவைகளில், முதலாவதைக் கணக்கிடச் சூத்திரம் மேலே உள்ளது; அதே வழியில் மற்ற இரண்டிற்கான சமன்பாடுகள் :

$$r_{13\cdot24} = \frac{r_{13\cdot2} - r_{14\cdot2} \cdot r_{34\cdot2}}{(1 - r^2_{14\cdot2})^{\frac{1}{2}} (1 - r^2_{34\cdot2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.28)$$

$$r_{14\cdot23} = \frac{r_{14\cdot2} - r_{13\cdot2} \cdot r_{43\cdot2}}{(1 - r^2_{13\cdot2})^{\frac{1}{2}} (1 - r^2_{43\cdot2})^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.29)$$

இம் மூன்று கெழுக்களையும் கணக்கிட, முதற்படி கெழுக்களைச் சற்று மாற்றியமைக்க, கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்கள் வரும் :

$$r_{12\cdot34} = \frac{r_{12\cdot4} - r_{13\cdot4} \cdot r_{23\cdot4}}{(1 - r^2_{13\cdot4})^{\frac{1}{2}} (1 - r^2_{23\cdot4})^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.30)$$

$$r_{13\cdot24} = \frac{r_{13\cdot4} - r_{12\cdot4} \cdot r_{32\cdot4}}{(1 - r^2_{12\cdot4})^{\frac{1}{2}} (1 - r^2_{32\cdot4})^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.31)$$

$$r_{14\cdot23} = \frac{r_{14\cdot3} - r_{12\cdot3} \cdot r_{42\cdot3}}{(1 - r^2_{12\cdot3})^{\frac{1}{2}} (1 - r^2_{42\cdot3})^{\frac{1}{2}}} \qquad (18.32)$$

இரண்டு முறைகளையும் பயன்படுத்தினால், நம் கணக்குகளுக்கு ஒரு தணிக்கை (check) அமையும்.

[11] ‘Tables of $\sqrt{1 - r^2}$ and $(1 - r^2)$ for use in Partial Correlation and in Trigonometry, என்ற ஜெ. ஆர். மைனர் (J. R. Miner) என்பவரின் நூலைப் பார்க்க. இதனை வெளியிட்டோர் ஜான்ஸ் ஹாப்கின்ஸ் பிரஸ், பால்டிமோர் (Johns Hopkins Press, Baltimore) Md., 1922.

உள்ள மூன்று கெழுக்களும் ஒரே மாதிரியான இரண்டாம்படி ஒட்டுக் குறிகளைப் பெற்றிருக்கின்றன என்பதையும், அவைகளின் எண்ணிக்கை இடப்பக்கத்திலுள்ளவைகளைவிட ஒன்று குறைவு என்பதையும் கவனிக்க. பகுதியிலுள்ள முதல் r-க்கு இடப்பக்கத்திலுள்ள r-ல் உள்ள முதன்மை ஒட்டுக் குறிகளே உள்ளன. பகுதியின் இரண்டாம் கோவையிலுள்ள கெழுக்கள்தான் விகுதியிலும் உள்ளன; இரண்டாம் கோவையில் இரண்டு கெழுக்கள் உள்ளன. இவைகளின் முதன்மை ஒட்டுக் குறிகளைக் கவனித்தால்—இடப்பக்கத்திலுள்ள முதன்மை ஒட்டுக்குறிகளிலொன்றையும், விட்டுப்போன இரண்டாம்படி ஒட்டுக் குறியையுங்கொண்டு அமைக்கப் பெற்றுள்ளவை என்பது தெரியும்.

முதற்படி கெழுக்களைக் கணக்கிடுதல்: இவைகளைக் கண்டு பிடிக்காவிட்டால் இருபடிக் கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கமுடியாது; இவைகளுக்கான சமன்பாடுகளை அமைக்க, கீழ்க்கண்டதை ஒரு மாதிரியாகக் கொள்ளலாம்.

$$r_{12\cdot 3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{(1 - r_{13}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

இவைபோன்ற பல மதிப்புகள் தேவையாகுமாதலால் இவற்றிற்கு ஒரு முறை அமைத்தலே நல்லது.

அட்டவணை 18-3

முதற்படி ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுதல் (கான்ஸாஸில் கூல விளைச்சலும் வெப்ப அளவும்)

r-சுழிப்படி ஒட்டுக் குறி	r-சுழிப்படி கெழு	$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	பகுதியிலுள்ள கோவை பெருக்கல் பலன்	மொத்தப் பகுதி	விகுதி	r-முதற்படி ஒட்டுக் குறி	r-முதற்படி கெழு
12	—·4861		—·3160	—·1701	·6301	12·3	—·2700
13	—·7108	.7034					
23	+·4445	·8958					
14	—·5202		—·3376	—·1826	·6190	14·3	—·2950
13	—·7108	·7034					
43	+·4750	·8800					
24	+.3244		+·2111	+·1133	·7883	24·3	+·1437
23	+.4445	.8958					
43	+.4750	.8800					
13	—.7108		—·2161	—·4947	.7828	13·2	— 6320
12	—.4861	.8739					
32	+.4445	.8958					
14	—,5202		—·1577	—·3625	·8266	14·2	—·4385
12	—.4861	.8739					
42	+.3244	.9459					
34	+.4750		+·1442	+·3308	·8473	34·2	+·3904
32	+.4445	.8958					
42	+.3244	.9459					
12	—.4861		—·1688	—·3173	·8078	12·4	—·3928
14	—.5202	.8540					
24	+.3244	.9459					
13	—.7108		—·2471	—·4637	·7515	13·4	—·6170
14	—.5202	.8540					
34	+.4750	·8800					
23	+.4445		+·1541	+·2904	·8324	23·4	+·3489
24	+.3244	.9459					
34	+.4750	.8800					

முதற்படி கெழுவைக் கணக்கிடுவதற்கான முறை எளிதானது. ஒவ்வொன்றிற்கும் மூன்று சுழிப்படி கெழுக்கள் தேவை; எந்தக் கெழுவை நாம் கணக்கிடப்போகிருேமோ அதற்கான சமன் பாட்டின் பகுதியில், இவைகள் எந்த ஒழுங்கில் (order) அமைந் துள்ளனவோ அதே ஒழுங்கிலேயே இவைகளை எழுதவேண்டும். முதல் கெழுவிலிருந்து, மற்ற இரண்டு கெழுக்களின் பெருக்கல் பலனைக் கழித்தால், பகுதி வரும். இந்தப் பெருக்கல் பலன்களும் ஒரு பத்தியிலுள்ளதைக் காண்க (அட்டவணை 18-3). விகுதியைக் கணக்கிட $\sqrt{1 - r^2}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள இரண்டு கோவைகளைப் பெருக்கவேண்டும்; இவைகளும் அட்டவணையில் இடம்பெற் றுள்ளன. எனவே, இந்த அட்டவணையின் உதவியால், முறை யாகக் கணக்கிடுதல் சாத்தியமாகிறது.

$r_{23\cdot4}$ என்ற கெழுவும் $r_{32\cdot4}$ என்ற கெழுவும் சமமே; அதே போல் $r_{34\cdot2}$ என்பதும் $r_{43\cdot2}$ என்பதும் சமம். எனவே, இவைகளைத் தனியாகக் கணக்கிடத் தேவையில்லை.

இருபடி கெழுக்களைக் கணக்கிடுதல் : இப்பொழுது கணக் கிடப்பட்ட முதற்படி கெழுக்களை வைத்துக்கொண்டு, முன்போலவே அட்டவணை முறையில், ஒழுங்காக இருபடி கெழுக்களையும் கண்டு பிடிக்கலாம். விவரங்கள் அட்டவணை 18-4-ல் உள்ளன. கணக்கைத் தணிக்கை பார்ப்பதற்காக, ஒவ்வொரு கெழுவும் முதற்படி கெழுக் களின் இருவிதச் சேர்க்கையினுல் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன.

$r_{13\cdot24}$ என்பதன் மதிப்பு, நாம் முன் $s_{1\cdot24}$ மற்றும் $s_{1\cdot234}$ களைக் கொண்டு கணக்கிட்டபொழுது வந்த தொகைதான் என்பதைக் கவனிக்க.

இந்தக் குழுக்களின் பொருள்களை முன்பே விளக்கியுள்ளோம். மேற்படி ஆய்வு முறையினுல், பிரச்சினையைப்பற்றிய நம் அறிவில் என்ன முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது என்பதனைக் கீழ்க்கண்ட சுருக்கமான தகவல்கள் தெரிவிக்கும்.

$$r_{12} = -0.4861 \qquad r_{12\cdot34} = -0{\cdot}2407$$
$$r_{13} = -0.7108 \qquad r_{13\cdot24} = -0.5770$$
$$r_{14} = -0.5202 \qquad r_{14\cdot23} = -0.2688$$

சாதாரணத் தொடர்புக் கெழுவினுல் குறிப்பிடப்பட்ட அளவிற்கு ஜூன் வெப்பமும் விளைச்சலும் தொடர்பு கொண்டு இல்லை என்பது தெளிவாகிறது. ஜூன் வெப்பத்திற்கும், ஜூலை, ஆகஸ்டு வெப்பத்திற்கும் நேரிடைத் தொடர்பு இருப்பதே இதற்குக் காரணம். எனவே, செப்பமுருத (crude) தொடர்புக் கெழு, இரண்டு மாறிக ளிடையே உள்ள தொடர்பை, உண்மையாக இருப்பதைவிட அதிக முக்கியமாகக் காட்டுகிறது. இதே காரணத்தினுல்தான், எல்லாக்

அட்டவணை 18-4

இருபடி ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுதல் (கான்ஸாஸில் விளைச்சலும் வெப்ப அளவும்)

r-முதற்படி		$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	பகுதியிலுள்ள கோவை பெருக்கல் பலன்	மொத்தப் பகுதி	விகுதி	r-இருபடி	
ஒட்டுக் குறி	கெழு					ஒட்டுக் குறி	கெழு
12·3	—.2700		—·0424	—·2276	.9456	12·34	—·2407
14·3	—·2950	·9555					
24·3	+·1437	·9896					
13·2	—·6320		—·1712	—·4608	·8273	13·24	—·5570
14.2	—·4385	·8987					
34·2	+·3904	·9206					
14·2	—·4385		—·2467	—·1918	·7135	14·23	—·2688
13·2	—·6320	·7750					
43.2	+·3904	·9206					
12·4	—·3928		—·2153	—·1775	.7376	12·34	—·2406
13·4	—·6170	·7870					
23·4	+·3489	·9372					
13·4	—·6170		—·1370	—·4800	·8618	13·24	—·5570
12·4	—·3928	·9196					
32·4	+·3489	·9372					
14·3	—·2950		—·0388	—·2562	·9529	14·23	—·2689
12·3	—·2700	·9629					
42·3	+·1437	·9896					

கழிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களும் சாதாரணக் கெழுக்களைவிடக் குறைவாகவே உள்ளன. என்றாலும், ஜூலை வெப்பம்தான் மற்ற இரண்டு மாதங்களின் வெப்பத்தைவிட அதிகமாக விளைச்சலைப் பாதிக்கிறது என்பது இப்பொழுதும் உண்மையே.

ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களுக்கும், சாதாரணக் கெழுக்களுக்கான முறைகளைப் பின்பற்றி, மாதிரிப் பிழைகளை அமைக்கலாம். ஆனால் $(N-1)$ என்ற கோவை, இரண்டாம்படி ஒட்டுக்குறிகளின் எண்ணிக்கையினால் குறைக்கப்படவேண்டும். உதாரணமாக $r_{12\cdot34}$ என்ற கெழுவிற்கான தரப்பிழை :

$$s_{r_{12\cdot34}} = \frac{1-r^2_{12\cdot34}}{\sqrt{N-3}} \qquad (18.33)$$

கழிப்படி தொடர்புக் கெழுக்களுக்கு எந்தெந்த வரம்புகள் கூறப்பட்டனவோ, அவைகள், ஒருசிறைக் . கெழுக்களுக்கும் பொருந்தும். தொடர்புற்ற மாறிகள் நார்மல் பரவல் நிலையைச் சார்ந்தவை என்ற

ஒரு பாவனையும் (assumption) உள்ளது. முழுமைத் தொகுதியில் தொடர்புக் கெழு பூஜ்யத்திலிருந்து வெகுவாக வித்தியாசப்பட்டாலும், மாதிரிகள் சிறியவையாக இருந்தாலும், ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்கள் மிகக் கோட்டுப் பரவல் நிலையிலேயே அமையலாம். ஆனால், சூனிய எடுகோளைச் சோதிப்பதற்கு t பரவலைப் பயன் படுத்தலாம்; சுழிப் படிக் கெழுக்களைச் சோதிப்பதற்கு ஃபிஷரின் அட்டவணையைப் (பின் இணைப்பு அட்டவணை IV) பயன்படுத்தியது போலவே, இப்பொழுதும், குறித்த ஒரு r-ன் சிக்னிஃபிக்கன்சைச் சோதிக்கலாம். அப்பொழுது, நீக்கிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு $(N—1)$- ஐக் குறைத்துவிடவேண்டும். முடிவாக, ஒரு சிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களை z' என்பதாக மாற்றிவிட்டால் (முதல் பாகம் அதிகாரம் 9-ஐக் காண்க), அந்த மாற்றலின் எல்லாப் பயன்களையும் பெறலாம். இங்கேயும் $(N-3)$ என்ற கோவை, நீக்கப்பட்ட மாறிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு குறையும்.

பொதுவான $$s_z' = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

என்ற சூத்திரத்தில், $r_{12\cdot34}$ என்பதற்கு $(N-5)$ என்பது $(N-3)$ யின் இடத்தில் அமையும்.

மாறுபாட்டின் ஓர் அளவு

ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கண்டுபிடித்த பின்னர், மீதியுள்ள மாறுபாட்டின் மதிப்பான $s_{1\cdot234\cdots n}$ என்பதை வேறொரு வழியிலும் கணக்கிடலாம். பொதுவாக இதனை n-படித் தரவிலக்கம் என்று கூறலாம்; அதற்கான சமன்பாடு :

$$s^2_{1\cdot23\cdots n} = s^2_1(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot2})(1-r^2_{14\cdot23})\dots(1-r^2_{1n\cdot23\cdots n-1}) \qquad (18.34)$$

என்பதாகும்.

கூல விளைச்சல் எடுத்துக்காட்டில் இதனைப் பயனுக்குவோம் :

$$s^2_{1\cdot234} = 51.7905\,[1-(-0.4861)^2]\;[1-(-0.6320)^2]\;[1-(-0.2688)^2]$$

$$\therefore \quad s^2_{1\cdot234} = 22\cdot0381$$

அல்லது

$s_{1\cdot234} = 4.69$ என்று வருகிறது.

(18.14) என்ற சூத்திரத்தைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட—கண்டறிந்த மற்றும் கணக்கிடப்பட்ட X_1-ன் மதிப்பு விலக்கங்களுக்கான — அளவிற்கும் இந்த அளவிற்கும் வித்தியாசம், தசம புள்ளிக்கு இரண்டாம் ஸ்தானத்தில் 1 தான். (இது ஏற்பட பின்னங்களைத் தோராயமாக்குதலே காரணம்.)

சூத்திரம் (18.34)-ஐ நன்கு நோக்குவதால், ஒவ்வொரு தனித்த மாறியையும் சேர்த்துக்கொள்வதால், மொத்த மாறுபாடு எப்படிக் குறைகிறது என்பது புலப்படும். முதற்கண் X_1-மாறியின் மாறுபாடான s_1^2-லிருந்து தொடங்குகிறோம். பிறகு அதனை X_2-மாறி பாதிக்கிறது என்று கொண்டு, மீதியான மாறுபாட்டை ($s_{1\cdot 2}^2$ஐ) $s_1^2(1-r_{12}^2)$ என்ற கோவையிலிருந்து கண்டுபிடிக்கிறோம். X_1 மாறியில் உள்ள வேறுபாட்டிற்கு X_2-என்பது பொறுப்பாக விருந்தால் r_{12}^2 என்பது + ஆகவிருக்கும்; எனவே $s_{1\cdot 2}^2$ என்பது s_1^2-ஐ விடக் குறைவாயிருக்கும். இப்பொழுது X_3-என்ற மாறியைச் சேர்க்கிறோம். X_2-விற்குப் பிறகு வரும் இந்த மாறியும் X_1-ன் வேறுபாட்டிற்குப் பொறுப்பாக விருந்தால் $r_{13\cdot 2}^2$ என்பது + ஆகவிருக்கும்; எனவே, $s_{1\cdot 23}^2$ என்பது $s_{1\cdot 2}^2$ என்பதைவிடக் குறைவாய் அமையும். பிறகு X_4- மாறி சேர்க்கப்படுகிறது. X_1-மாறியின் வேறுபாட்டில், இந்த மாறிக்கும் ஒரு பங்கு உண்டானால், $r_{14\cdot 23}^2$ என்பது + ஆகவும், $s_{1\cdot 234}^2$ என்பது $s_{1\cdot 23}^2$-ஐ விடக் குறைவாகவும் இருக்கும். (இந்த எடுத்துக்காட்டில் $s_1^2 = 51.79$; $s_{1\cdot 2}^2$ என்பதின் மதிப்பு 39.55; $s_{1\cdot 23}^2 = 23.75$; $s_{1\cdot 234}^2$ என்பது 22.04 ஆக உள்ளது.) அதாவது, வெங்காயம் அடுக்கடுக்காகத் தோலுரிக்கப்படுகிறது. n-என்ற மாறியைச் சேர்ப்பதால் ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழு ஒன்றாகிவிடுகிறதென்றால், (18.34)-ல் உள்ள ஈற்றுக் காரணி சுழியாகிவிடும்; அப்பொழுது $s_{1\cdot 234\cdots n}^2$ என்பதும் சுழிதான். X_1-ல் உள்ள வேறுபாடு முழுவதுமே 'விளக்கப்பட்டு'விட்டது. குறித்த அந்த மர்மத்தின் உட்பொருள் பறிக்கப்பட்டுவிட்டது.

(18.34) ஆம் சூத்திரத்திலிருந்தும், பல்தரத் தொடர்புக் கெழுவைக் கண்டுபிடிக்கலாம் :

$$R_{1\cdot 234\cdots n}^2 = 1 - \frac{s_{1\cdot 234\cdots n}^2}{s_1^2} \qquad (18.35)$$

(18.34)-லிருந்து கிடைத்த மதிப்பை இதில் பொருத்தினால்,

$$1 - R_{1\cdot 23\cdots n}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13\cdot 2}^2)(1 - r_{14\cdot 23}^2) \cdots (1 - r_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}^2) \qquad (18.36)$$

என்ற சூத்திரம் வரும்.

பீட்டாக் (Beta) கெழுக்கள்

பல்தரத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலுள்ள ரெக்ரஷன் கெழுக்கள், சார்புடை மாறியின் தொடர்ச்சியான மதிப்புகளைத் தனித்த மாறிகளினால் பெறுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் நிறைகள் என்றும் கொள்ளலாம். மாறிகள் வெவ்வேறு அலகுகளில் மதிப்புகள் பெற்றிருக்கலாம்; அல்லது அவைகளின் மாறுபாடுகளும் வெவ்வேறாக

இருக்கலாம்; ஆதலால், இந்தப் போக்குக் கெழுக்களை ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடமுடியாது. ஆனால், பல சமயங்களில், இவைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்படியாக மாற்றவேண்டியிருக்கலாம். ஒவ்வொரு மாறியையும்—சார்புடை மற்றும் தனித்தவை—அதன் தரவிலக்கத்திற்கான அலகுகளால் குறிப்பிடுவதால் இந்த மாற்றத்தை நிகழ்த்தலாம். அப்படியான நிலையில் போக்குக் கெழுக்களை, பீட்டாக் (Beta) கெழுக்கள் என்று குறிப்பிடுவோம்; அடையாளங்கள் $\beta_{12\cdot34}$, $\beta_{13\cdot24}$ முதலானவை. [இந்தக் குறித்த அளவைக்கு பீட்டா (β) என்ற கிரேக்க எழுத்தைப் பயன்படுத்துவது பழக்கத்தில் வெகுவாக வந்துள்ளது; எனவே, இங்கு, கிரேக்க எழுத்துகள் முழுமைத் தொகுதி அளவைகளை மட்டும் குறிக்கும் என்ற பொதுவான விதியை மீறுகிறோம்.]

எளிதான, இரு மாறிகளுள்ளபோது,

$$x_1 = b_{13}x_3$$

என்று கொள்ளுவோம். அலகுகளைத் தரவிலக்கத்தினவையாகக் கொண்டால், இரு பக்கங்களையும் s_1, s_3களால் வகுக்கவேண்டும்.

$$\frac{x_1}{s_1 s_3} = \frac{b_{13}}{s_1}\left(\frac{x_3}{s_3}\right)$$

அல்லது

$$\frac{x_1}{s_1} = \left(b_{13}\frac{s_3}{s_1}\right)\left(\frac{x_3}{s_3}\right)$$

எனவே, தேவைப்பட்ட பீட்டாக் கெழு

$$\beta_{13} = b_{13}\left(\frac{s_3}{s_1}\right)$$

என்றாகிறது.

கூலவிளைச்சல் எடுத்துக்காட்டில்

$$\beta_{13} = -1.735\left(\frac{2.95}{7.20}\right) = -0.711$$

என்று வருகிறது. அதாவது, X_3-ல் (ஜூலை வெப்ப அளவு) ஒரு தரவிலக்க அளவு ஏற்றம் ஏற்பட்டால், கூல விளைச்சலில் 0.711 தரவிலக்க அளவு இறக்கம் ஏற்படும்.

இரண்டிற்கும் அதிகமான மாறிகளை வைத்துக்கொண்டு ஆராயும்போது, இந்த அளவைகள் குறிப்பாகப் பயனளிப்பவை. இங்கும் இரு மாறிகளின் பீட்டாக் கெழுக்களைப்போலவே, ஒருசிறை பீட்டாக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுவோம்.

அதாவது :

$$\beta_{12\cdot34} = b_{12\cdot34}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

$$\beta_{13\cdot24} = b_{13\cdot24}\left(\frac{s_3}{s_1}\right)$$

$$\beta_{14\cdot23} = b_{14\cdot23}\left(\frac{s_4}{s_1}\right)$$

தகுந்த மதிப்புகளை இவைகளில் பொருத்த,

$$\beta_{12\cdot34} = -0.182$$
$$\beta_{13\cdot24} = -0\cdot531$$
$$\beta_{14\cdot23} = -0\cdot209$$

என்று விடை கிடைக்கும். இரண்டாம் கெழுவைக் கவனிப்போம். கூல விளைச்சல், ஜூன், ஆகஸ்டு மாத வெப்ப அளவுகளால் பாதிக்கப்படாதபொழுது, ஜூலை மாத வெப்பம் 1 தரவிலக்க அளவில் அதிகமானால், கூல விளைச்சல் 0·531 தரவிலக்க அளவில் குறையும். மற்ற இரண்டிற்கும் இதுபோலவே பொருள் கொள்ள வேண்டும்.

பீட்டாக் கெழுக்கள் குறிப்பிடும் காரணிகள் ஒரேவகை அலகுகளைக்கொண்டவை ; வேறுபாட்டிலும் ஒரே வகையைச் சார்ந்தவை. எனவே, X_2-ல் 1 தரவிலக்க மாற்றத்தை, நேராக X_3-ல் 1 தரவிலக்க மாற்றத்துடன் ஒப்பிடலாம். X_2, X_3-களில் இது போன்ற மாற்றங்கள் ஏற்படுவதால், X_1 மாறியில் ஏற்படும் ஏற்றவிறக்கங்களை விளக்கும் கெழுக்களுக்குச் சிறப்பு உண்டென்பது தெளிவு.

பல்தரத் 'தீர்மானமும்' அதன் பிரிவுகளும்

(Multiple 'Determination' and Its Components)

9ஆம் அதிகாரத்தின் r^2 என்பதனைத் 'தீர்மானத்'தின் ஓர் அளவாகவும் எண்ணலாம் என்று கூறினோம். நாம் அறிந்த சமன்பாடான,

$$r_{12}^2 = \frac{s_1^2 - s_{1\cdot2}^2}{s_1^2}$$

என்பதிலிருந்து இதனைக் கணக்கிடலாம். இந்த விகிதத்தின் பகுதியானது, X_1-ல் உள்ள மாறுபாடு, X_2வினால் ஏற்படும் விளைவுகளின் வேறுபாட்டினால் எவ்வளவு குறைகிறது என்பதனை அளக்கிறது ; மொத்தமாக இந்த விகிதம், குறைந்த மாறுபாட்டை, மொத்த மாறுபாட்டின் ஒரு பின்னமாகக் குறிக்கிறது (மாறுபாடு என்பது, விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியே). X_1, X_2

இரண்டிற்கும் ஒரு காரணத்தொடர்பு . இருந்து, அத் தொடர்பு X_2வினால் X_1 பாதிக்கப்படுவதாக அமைகிறது என்போம்; அப்பொழுது, X_2 மாறியில் ஏற்படும் வேறுபாடுகளினால் X_1-ல் உண்டாகும், அல்லது தீர்மானிக்கப்படும் வேறுபாட்டின் ஒரு பகுதியை இந்த விகிதம் அளக்கும். X_1-ன் மாறுபாடு 100 ஆகவும், $s^2_{1 \cdot 2}$ என்பது 36 ஆகவும் இருந்தால் r^2 என்பதன் மதிப்பு 0·64 ஆகும். அதாவது, X_2 ஆனது X_1-ஐ பாதிப்பதால், X_1 மாறியின் மாறுபாடு 64 சதவீதம் குறைக்கப்படுகிறது என்று கூறலாம். X_2 அல்லாத மற்றக் காரணங்களால் X_1-ல் ஏற்படும் மாறுபாடுகளின் அளவை $s^2_{1 \cdot 2}$ என்பதன் மதிப்பான 36தான்.

r^2 என்பதனை இதுபோல் தீர்மான அளவையாக விளக்குதல் வசதியான முறையாகும்; இதை, ஒரு சாதாரண மனிதனும் புரிந்துகொள்ள முடியும். ஆனால், இதை விளக்கும்பொழுது நாம் இரு மாறிகளிடையே காரணத் தொடர்பு இருக்கிறது என்பதனை எண்ணத்தில் வைத்துள்ளோமாதலாலும், அப்படியான எண்ணம் நியாயமற்றதாக இருக்கக்கூடுமாதலாலும், இதனைப் பயன்படுத்துதல் இடர்ப்பாடுடையதாகும். தொடர்பைப்பற்றிக் கூறும்பொழுதெல்லாம் நாம் புள்ளியியல் முறையில் வரும் தொடர்புக்கெழு, காரணத் தொடர்பு உள்ளதைக் காட்டாது என்பதனை வற்புறுத்தியே வந்துள்ளோம். இரு மாறிகளிடையே 'உடன்மாற்றம்' (co-variation) உள்ளதைப் புள்ளியியல் முறை காட்டுகிறதென்றாலும், அந்தத் தொடர்பு, காரணத் தொடர்பா இல்லையா; அப்படி இருந்தால், அது எந்த வகையில் உள்ளது என்பனவற்றைப் புள்ளியியல் முறைகளினால் கண்டுபிடிக்கமுடியாது. எனவே r^2 என்பதைத் 'தீர்மான' அளவையாகப் பயன்படுத்தும்பொழுது நாம் இந்த அளவையின் தன்மையையும், விவரமாகத் தெளிவாக்கிவிடவேண்டும்—அதாவது, தனித்த மாறியினால், சார்புடை மாறி இயக்கப்பட்டு, இரண்டு மாறிகளுக்கும் காரணத் தொடர்புள்ளது என்று பாவித்தலே இந்தத் தீர்மான அளவையின் அடிப்படை என்பதை விளக்கவிடவேண்டும். மற்றும், மொத்த வேறுபாட்டை அளவிட நாம் பயன்படுத்துவது, சார்புடை மாறியின் மாறுபாடுதான் என்பதையும் இதைப் பயன்படுத்துவோர் அறியவேண்டும். 'விளக்கப்பட்ட', மற்றும் 'விளக்கப்படாத' வேறுபாட்டுப் பகுதிகளும், மாறுபாட்டின் பிரிவுகளே அன்றித் தரவிலக்கத்தினவை அல்ல. (இரு பிரிவுகளுக்கும் இடையே உள்ள கூட்டல் விதி, மாறுபாடுகளுக்குதான் பொருந்துமேயன்றித் தரவிலக்கத்துக்கன்று.)

இதே வரம்புகளுக்குட்பட்டு, இதே முறையைப் பல தனித்த மாறிகளுள்ளபொழுதும் உபயோகிக்கலாம். பல்தரத் தொடர்புக் கெழுவின் வர்க்கத்தைப் பல்தரத் தீர்மானக் கெழுவாக விளக்கிக்

கூறலாம். இதனை $d_{1\cdot234\cdots n}$ என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடுவோம். ஆக, கூல விளைச்சல் கணக்கில்,

$$d_{1\cdot234} = R^2_{1\cdot234} = \frac{s_1^2 - s^2_{1\cdot234}}{s_1^2} \qquad (18\cdot37)$$

$$= \frac{51\cdot79 - 22\cdot05}{51\cdot79}$$

$$= 0\cdot5742$$

என்று வரும். இந்த விடையைத் தீர்மானக் கெழுவாகப் பயன்படுத்தினல் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம். ஜூன், ஜூலை, ஆகஸ்டு வெப்ப அளவுகளால் கூல விளைச்சலில் ஏற்படும் வேறுபாடுகளின் அளவை, சுமார் 57 சதவீதம். இதுதான் மாறுபாட்டின் 'விளக்கப் பட்ட' பிரிவு; மீதியான அல்லது 'விளக்கப்படாத' பிரிவு 22·05/51·79 என்பது; இது மொத்த வேறுபாட்டில்—s_1^2-ஞல் அளக்கப்பட்டது—43 சதவீதமாகும். இந்த எடுத்துக்காட்டில், காரணத் தொடர்பு இருக்கிறது என்று எண்ணுதல் பகுத்தறிவுக்கு ஒத்ததுவே. பயிர் விளையும் மாதங்களிலுள்ள வெப்ப அளவு பயிர் விளைச்சல் அளவைப் பாதிக்கும் என்பதை நம்புவது எளிதே.

தனியான தீர்மானக் கெழுக்கள் : இதுவரை, தீர்மானக் கெழுவை மொத்தமாகக் கண்டுபிடித்தோம். இதனையே பிரிவுகளாக்கி, ஒவ்வொரு தனித்த மாறிக்குமுள்ள 'தீர்மானக் கெழு'வைக் கணக்கிட ஆராய்ச்சியாளர் நினைக்கலாம். அதற்கான ஒரு முறை 'தனியான தீர்மானக் கெழுக்களை'க் கண்டுபிடித்தலாகும்.[12]

இவைகளின் நிறுவுதல் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து விளங்கும் :

$$d_{1\cdot234} = R^2_{1\cdot234} = \frac{b_{12\cdot34}\,p_{12} + b_{13\cdot24}\,p_{13} + b_{14\cdot23}\,p_{14}}{s_1^2} \qquad (18\cdot38)$$

வலப் பக்கக் கோவையின் பகுதி $s_1^2 - s^2_{1\cdot234}$ என்பதைக் குறிக்கிறது என்று அறிவோம் (சூத்திரம் 18·17) ; அதாவது X_2, X_3, X_4 களின் இயக்கங்களினல் X_1 மாறியில் எவ்வளவு வேறுபாடு குறைந்துள்ளது என்பதை இக்கோவையை மூன்று பிரிவுகளாக்கினல்,

$$d_{1\cdot234} = \frac{b_{12\cdot34}\,p_{12}}{s_1^2} + \frac{b_{13\cdot24}\,p_{13}}{s_1^2} + \frac{b_{14\cdot23}\,p_{14}}{s_1^2} \qquad (18\cdot39)$$

என்று வரும்.

[12] எஜெகீல் (Ezekiel) என்பவரின் நூலை (து.நூ.ப. 37) பார்க்க.

பொருத்தமான மதிப்புகளை வைத்தால்,

$$d_{1\cdot234} = \frac{4\cdot5924}{51\cdot79} + \frac{19\cdot5156}{51\cdot79} + \frac{5\cdot6307}{51\cdot79}$$
$$= 0\cdot0887 + 0\cdot3768 + 0\cdot1087$$
$$= 0\cdot5747$$

என்று வரும். தோராயமாக மொத்தத் தீர்மானம் :

$$d_{12\cdot34} = 0\cdot09$$
$$d_{13\cdot24} = 0\cdot37$$
$$d_{14\cdot23} = 0\cdot11$$

என்று பிரிவுபட்டது. இவைகளே தனியான தீர்மானக் கெழுக்கள் ; ஒவ்வொரு தனித்த மாறியின் பங்கை—சார்புடை மாறியின் வேறுபாட்டில் 'விளக்கப்பட்ட' மாறுபாட்டின் பங்கை—இவை குறிப்பவை. அதாவது, மூன்று மாத வெப்பங்களினால் ஏற்படுகிற இயக்கங்களைக் கணக்கில் கொண்டால், கான்ஸாஸ் கூல விளைச்சலில் ஏற்படும் மாறுபாட்டில், ஜூன் மாத வெப்பத்தின் பங்கு 9 சதவீதம்; ஜூலை மாதத்தின் பங்கு 37 சதவீதம்; ஆகஸ்டு மாதத்தின் பங்கு 11 சதவீதம். அதாவது, மூன்று மாதங்களின் மொத்தப் பங்கு 57 சதவீதம். இதைத்தான் நாம் மூன்று மாறிகளின் மொத்தத் தீர்மான அளவாக முன்பு கணக்கிட்டோம்.

தனியான தீர்மானக் கெழுக்கள், எதனை அளவிடுவதாகக் கூறுகிறோமோ, அவைகளின் தோராயங்களையே அளிக்கின்றன என்பதனைக் கூறிவிடவேண்டும். பகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு b-யும் கழிவுக் கெழு என்பதென்னவோ உண்மைதான் ; ஆனால், உடன் பெருக்கல் பலன்களைக் குறிக்கும் p-க்கள் கழிவானவையல்ல. ஆகவே, மொத்தத் தீர்மானக் கெழு பல தனித்த மாறிகளின் மொத்த இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது ; இந்த மொத்தத்தை யதேச்சையாக (arbitrarily) மூன்று தனித்த மாறிகளின் பங்குகளாகப் பிரிவாக்கியுள்ளோம் என்றுதான் கூறவேண்டும். இப்படிப் பிரித்தல் உண்மையாக உள்ள நிலையைக் குறிக்கிறது என்று நிரூபிக்க முடியாது. எனவே, தனியான தீர்மானக் கெழுக்கள் திட்டமான அளவைகளல்லாது போனாலும், பல தனித்த மாறிகளினுடைய பங்குகளை ஏறக்குறைய குறிப்பிடும் தோராயங்களாகக் கொள்ளமுடியும்.

வளர்ச்சியான தீர்மானக் கெழுக்கள் (Coefficients of incremental determination) : வளர்ச்சியான தீர்மானக் கெழுக்களைக் கொண்டு மொத்தத் தீர்மான அளவைப் பிரிவுகளாக்குவது இதைவிடச் சிறப்பான முறையாகும். மொத்தத் தீர்மான அளவைகளுக்கான வரம்புகளுக்கு இவையும் உட்பட்டவை என்றாலும், தனியான கெழுக்களுக்கான 'யதேச்சை' த் தன்மையற்றவை. சார்புடை மாறியின்

'விளக்கப்படாத' வேறுபாட்டின் படிப்படியான குறைவுகளைக் கணக்கிட்டு, இவைகளை மொத்த மாறுபாட்டின் (s^2_1) பகுதிகளாகக் கருதுவோம். அதாவது [13]

$$d_{1\cdot 234} = \frac{s^2_1 - s^2_{1\cdot 2}}{s^2_1} + \frac{s^2_{1\cdot 2} - s^2_{1\cdot 23}}{s^2_1} + \frac{s^2_{1\cdot 23} - s^2_{1\cdot 234}}{s^2_1} \quad (18\cdot 40)$$

வலப் பக்கத்திலுள்ள முதல் கோவை X_2 மாறியினுல் X_1 மாறியின் வேறுபாட்டில் உண்டான குறைவைக் (அது X_1 மாறியின் முழு மாறுபாட்டின் பகுதியாகக் கூறப்பட்டு) காட்டுகிறது. இரண்டாவது கோவையானது, X_2-மாறிக்குப் பிறகு X_3-மாறி செயற்படுத்தப் பட்டால் அதன் இயக்கத்தின் பயனுகை X_1-மாறியின் மாறுபாட்டில் உண்டாகும் 'வளர்ச்சியான' குறைவைக் காட்டும். X_3-ன் இந்த 'வளர்ச்சியான' பங்கும், X_1-மாறியின் முழு மாறுபாட்டின் பகுதியாகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதுபோலவே, முறையே X_2, X_3 இரண்டு மாறிகளுக்குப் பிறகு, X_4 மாறி செயற்படுத்தியதால், அதன் இயக்கத்தின் பயனுகை X_1-ன் மாறுபாட்டில் 'விளக்கப்பட்ட', 'வளர்ச்சியான' பங்கைக் காட்டுகிறது. இங்கும், அந்தப் பங்கு, X_1-ன் முழு மாறுபாட்டின் பகுதியாகவே கருதப்பட்டுள்ளது. [14]

கூல விளைச்சல் எடுத்துக்காட்டில், 'விளக்கப்படாத' வேறுபாட்டின் படிப்படியான பிரிவுகள்,

$$s^2_1 = 51\cdot 79$$
$$s^2_{1\cdot 2} = 39\cdot 55$$
$$s^2_{1\ 23} = 23\cdot 75$$
$$s^2_{1\cdot 234} = 22\cdot 05$$

என்பதனை முன்பே கண்டோம். விளைச்சலில் உள்ள மாறுபாடான 51·79 என்பது ஜூன் வெப்ப அளவால் இயக்கப்பட்டு 39·55 ஆகக்

[13] இந்தச் சமன்பாடு சரியாக இருப்பதற்கு s^2_1, $s^2_{1\cdot 2}$, $s^2_{1\cdot 23}$, $s^2_{1\cdot 234}$ என்பவைகளைக் கணக்கிட, வர்க்கங்களின் மொத்தங்களை N என்பதனுலேயே வகுக்கவேண்டும். எனவே, இங்குப் பயன்படுத்தப்படும் s-களை, விளக்க அளவைகளாகக் (descriptive measures) கருதலாமே தவிர, முழுமைத் தொகுதியின் அளவுகளை மதிப்பிடுவதாகக் கருத முடியாது. அவைகளை மதிப்பீடுகளாகக் கருதவேண்டுமானுல், நிகழும் பல சமயங்களில் வரையற்ற டிகிரிகள் எவ்வளவு குறைகின்றன என்பதனையும் கவனிக்கவேண்டும். k-டிகிரிகள் குறைந்தால், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளை வகுப்பதற்கு $(N-k)$-ஐ பயன்படுத்த வேண்டும். அட்டவணை 18-5-ஐயும், அதற்குப் பின்வரும் விவரங்களையும் கவனிக்க.

[14] (18.40) என்ற சூத்திரத்தைச் சுருக்கினுல், நாம் அறிந்த பல்தரத் தொடர்புக் கெழுச் சூத்திரம் நிகழ்கிறது :

$$d_{1\cdot 234} = \frac{s^2_1 - s^2_{1\cdot 234}}{s^2_1}$$

குறைந்துள்ளது ; அதாவது குறைவான மதிப்பு = 12·24; ஜூலை வெப்ப அளவின் (X_3) விளைவுகள் இதனை மற்றும் 15·80 என்ற தொகையால் 23·75-க்குக் குறைவாக்குகின்றன. இப்பொழுது ஆகஸ்டு வெப்ப அளவு (X_4) செயற்படுத்தப்பட்டதால், மீதி மாறுபாடு 1·70 என்ற தொகையால் 23·75-லிருந்து 22·05-க்குக் குறைந்துள்ளது. அடுத்தடுத்து நிகழும் இம் மூன்று குறைவுகளையும் முழு மாறுபாடான s_1^2-ன் பங்குகளாகக் கணக்கிட்டால், நமக்கு 'வளர்ச்சியான' தீர்மானக் கெழுக்கள் கிடைக்கும்.

(18.40)-ல் இந்த மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்

$$d_{1\cdot 234} = \frac{51\cdot 79 - 39\cdot 55}{51\cdot 79} + \frac{39\cdot 55 - 23\cdot 75}{51\cdot 79} + \frac{23\cdot 75 - 22\cdot 05}{51\cdot 79}$$

$$= 0\cdot 2363 + 0\cdot 3051 + 0\cdot 0328$$

$$= 0\cdot 5742$$

என்ற விவரங்கள் வரும். இம் மூன்றுக்கும் பொருத்தமான அடையாளங்களை[15] அமைத்து, மொத்தத் தீர்மானக் கெழுவின் பிரிவுகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம் :

$$d_{1\cdot 234} = d_{12} + {}_2d_{13} + {}_{23}d_{14} \qquad (18\cdot 41)$$

இங்கு,
$$d_{12} = \frac{s_1^2 - s_{1\cdot 2}^2}{s_1^2} \qquad (18\cdot 42)$$

$$_2d_{13} = \frac{s_{1\cdot 2}^2 - s_{1\cdot 23}^2}{s_1^2} \qquad (18\cdot 43)$$

$$_{23}d_{14} = \frac{s_{1\cdot 23}^2 - s_{1\cdot 234}^2}{s_1^2} \qquad (18\cdot 44)$$

சூத்திரம் (18·41)-ல் வலப் பக்கத்திலுள்ள முதலுறுப்பான d_{12} (= 0·2363) என்பது சாதாரணமான தீர்மானக் கெழுவாகும். இது X_1 மாறி, X_2 மாறியின் சார்பலனாக எழுதப்பட்டபொழுது வரும் (இதுவும் r_{12}^2-ம் சமம்தான்). இது ஜூன் வெப்ப அளவையை மட்டும் கணக்கிட்டால், கூல விளைச்சலின் மாறுபாட்டில், இந்த மாறியின் இயக்கம் 24 சதவீதம் என்பதனைக் குறிக்கிறது (X_2, X_3 களிடையே உள்ள தொடர்பும், X_2, X_4 இடையே உள்ள தொடர்பும், மற்றும் X_2 வுடன், X_3 மாறியுடன் தொடர்புற்ற வேறெந்த மாறியின் தொடர்பும் இந்தக் கெழுவில் இடம்பெற்றிருக்கும்). இரண்டாவது உறுப்பு ($_2d_{13}$ = 0·3051), X_2 மாறியின் இயக்கத்தைக் கணக்கிட்ட பிறகு,

[15] இதேபோன்ற ஒட்டுக்குறிகளை அமைத்து, எஜெகீல் (Ezekiel - து.நூ.ப. 37) என்பவர் பிரிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் (part correlation coefficients) குறிப்பிட்டுள்ளார். இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள d-க்கள், பிரிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கொண்டு நிறுவப்பட்டவை அல்ல.

X_1 மாறியின் மாறுபாட்டில், X_3 மாறியால் 'விளக்கப்படும்' பங்கைக் காட்டுகிறது. இங்குக் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பால், X_3ஆல் (ஜூலை வெப்பம்) ஏற்படும் இயக்கம் X_1 மாறுபாட்டின் 30 சதவீதம் என்பதனை அறிகிறோம். (X_3, X_4 களுக்கிடையே, அல்லது X_3 க்கும், X_1 மாறியுடன் தொடர்புற்ற வேறெந்த மாறிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பும் இந்தக் கெழுவில் இடம்பெற்றிருக்கும்.) மூன்றும் உறுப்பான $_{23}d_{14} = 0{\cdot}0328$ என்பது, X_2, X_3 மாறிகளின் இயக்கங்களைக் கணக்கிட்ட பிறகு X_4 மாறி (ஆகஸ்டு வெப்ப அளவு) வருவதால், 3 சதவீதம் X_1-ன் மாறுபாடு விளக்கப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது.

(18·40), மற்றும் (18·41)சூத்திரங்களால் விளக்கப்படுவது என்னவென்றால்—ஒவ்வொரு தனித்த மாறியையும் சேர்ப்பதால் ஏற்படும் படிப்படியான 'வளர்ச்சி'களால், 'தீர்மானம்' உருவாகிறது என்பது. முதல் தனித்த மாறிக்கான 'தீர்மானம்' அந்த மாறியினால் சார்புடைய மாறியில் (X_1) ஏற்படும் இயக்கங்களையும், X_1 மாறியுடன் தொடர்புள்ள மற்ற மாறிகளுடன் இந்த (X_2) மாறியும் தொடர்புற்றுள்ளதால், X_2 மாறியினுள்ளே நடைபெறும் இயக்கங்களையும் தன்னுள்ளடக்கியிருக்கும். இந்த முதல் தீர்மான அளவு, சாதாரண சுழிப்படித் தொடர்புக் கெழுவின் வர்க்கமாகும். இரண்டாவதாகச் சேர்க்கப்படும் மாறியின் (X_3 ஆனால், $_2d_{13}$ என்ற கெழு) 'தீர்மானமும்' இதேபோன்ற பல விளைவுகளால் ஏற்பட்டதேயாகும். ஆனால், X_2, X_3 களிடையே உள்ள தொடர்பால் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகள் முதல் கெழுவிலேயே (d_{12}) இடம் பெற்றிருக்கும். எனவே, $_2d_{13}$வுள்ளது கழிவான விளைவு அளவன்று (net effect); X_2விற்குப் பிறகு X_3யினால் X_1-ல் ஏற்பட்ட 'வளர்ச்சியான' விளைவு (incremental effect) ஒரு குறித்த மாறியின் இறுதிநிலை (marginal) பங்கின் அளவாகவும் இவைகளைக் கொள்ளலாம். இதனால் நமக்குத் தெரிவது—குறித்த ஒரு மாறியின் X_3 என்போம்—மாறியின் வளர்ச்சியான விளைவு, அல்லது இறுதிநிலைப் பங்கு, அதற்குமுன் எந்த மாறிகளின் இயக்கங்கள் கருதப்பட்டுள்ளன என்பதையும், X_3 உடன் முன்பே கருதப்பட்ட மாறிகளுடைய தொடர்புகளையும்பொறுத்து அமையும் என்பதே. அதாவது, X_3 என்ற மாறி, X_2, X_4 இரு மாறிகளுடைய இயக்கங்களையும் (X_1-ன் பால்) கணக்கிட்ட பிறகு $_{24}d_{13}$ என்பது கருதப்படுகிறது என்பதனைக் குறிப்பிடும். எனவே, அதன் மதிப்பு $_2d_{13}$ என்பதிலிருந்தும், அதேபோல் $_{245}d_{13}$-லிருந்து வித்தியாசப்படும். [மாறிகள் எந்த ஒழுங்கில் (order) கருதப்பட்டிருப்பினும், அப் பங்குகளின் மொத்தம் ஒரே அளவாகவே இருக்கும்.]

இதனை, ஜூன் வெப்பம் (X_2), ஜூலை வெப்பம் (X_3), ஆகஸ்டு வெப்பம் (X_4) என மூன்று மாறிகளின் வளர்ச்சியான அல்லது

அதிகப்படியான விளைவுகளை வெவ்வேறு ஒழுங்கில் கருதியும் விளக்கிக் காட்டலாம். கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பத்தியிலும், மாறிகளின் ஒழுங்கு மாறுபட்டுள்ளது. (இரு தசமஸ்தானங்களுக்குச் சரியாகவே முடிவுகள் தரப்பட்டுள்ளன.)

$$d_{12} = 0{\cdot}24 \qquad d_{13} = 0{\cdot}50 \qquad d_{14} = 0{\cdot}27$$
$$_{2}d_{13} = 0{\cdot}30 \qquad _{3}d_{12} = 0{\cdot}04 \qquad _{4}d_{13} = 0{\cdot}28$$
$$_{23}d_{14} = 0{\cdot}03 \qquad _{23}d_{14} = 0{\cdot}03 \qquad _{34}d_{12} = 0{\cdot}02$$

ஜூன் வெப்ப அளவைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டால், அது கூல விளைச்சலின் 24 சதவீத மாறுபாட்டிற்குப் பொறுப்பாயிருப்பதாகத் தெரிகிறது. இதே மாறியை, ஜூலை வெப்ப அளவிற்குப் பிறகு செயற்படுத்தினுல், அப்பொழுது அதன் பங்கு மாறுபாட்டின் 4 சதவீதம்தான்; ஜூலை, ஆகஸ்டு இரு மாத வெப்ப அளவுகளும் கருதப்பட்டபின், ஜூன் மாத வெப்பம் செயற்படுத்துவதால், அது X_1 மாறியின் மாறுபாட்டின் 2 சதவீதத்திற்குதான் பொறுப்பாயிருக்குமென்பதைக் காண்கிறோம். ஜூன் வெப்பத்திற்கும், ஜூலை, ஆகஸ்டு வெப்பங்களுக்கும் இடையேயுள்ள அதிகப்படியான தொடர்புதான் இந்த இறக்கத்திற்குக் காரணம். ஜூலை வெப்பம்மட்டுமே விளைச்சலின் மாறுபாட்டில் 50 சதவீதத்தை விளைத்துள்ளதென்பதையும் காணலாம். ஜூன் வெப்பத்தைக் கருதியபிறகு ஜூலை வெப்பத்தைக் கணக்கிலெடுத்துக்கொண்டால், கூல விளைச்சல் மாறுபாட்டில் அதன் பங்கு 30 சதவீதத்திற்குக் குறைகிறது; ஆகஸ்டு வெப்பத்திற்குப் பிறகு ஜூலை வெப்பம் வந்தால், அப்பொழுது அதன் பங்கு 28 சதவீதமே. ஜூன், ஆகஸ்டு இரு மாத வெப்பங்களுக்கும் பிறகு ஜூலை வெப்பம் கணக்கிடப்படுமாயின், அப்பொழுது அதன் பங்கு 0·1910 அல்லது 19 சதவீதமாகும். (இந்த அளவை மேற்கண்ட அட்டவணை அமைப்பில் இல்லை).

கழிவு அல்லது ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களை விட்டு, அதிகப்படியான அல்லது வளர்ச்சியான தீர்மானக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுவதால், நம் அடிப்படை அளவு முறைகளில் ஏற்படும் அறிவு வளர்ச்சியைப் படிப்பவர் நன்கு கவனிக்கவேண்டும். முதலில் நாம் அறிந்திராத ஒரு பகுதியினை இப்பொழுது அறிவதை, ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழு காட்டுகிறது. $(s_{1\cdot2}^2 - s_{1\cdot23}^2)/s_{1\cdot2}^2$ என்பதிலிருந்து $r_{13\cdot2}^2$-ஐப் பெறுகிறோம் அல்லவா? இங்கு $s_{1\cdot2}^2$ என்பது முன்பு விளக்கப்படாத மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது; கோவையின் பகுதி இந்தத் தொகையில் ஏற்பட்ட குறைவை எடுத்துக்காட்டுகிறது. ஆனால், $_{2}d_{13}$ என்பதைப் பெறுவதற்கு நாம் $(s_{1\cdot2}^2 - s_{1\cdot23}^2)/s_1^2$ என்ற கோவையைப் பயன்படுத்துகிறோம். முன்பு கணக்கிடப்பட்ட பகுதியே இப்பொழுதும் கணக்கிடப்படுகிறது ; ஆனால், அதனை

s_1^2-ன் (X_1 மாறியின் மாறுபாடு) ஒரு பகுதியாகவே இப்பொழுது கொண்டுள்ளோம்.[16]

தனியான தீர்மானக் கெழுக்களுக்குள்ளது போன்ற எதேச்சையான வரம்புகளில்லாததால், வளர்ச்சியான தீர்மானக் கெழுக்கள் திட்பமான அளவைகளாகும். அவைகள், மாறிகளிடையே காரணத் தொடர்பு உள்ளதைச் சுட்டிக் காட்டுவதில்லை என்பதை மறுபடியும் உறுத்திக் கூறவேண்டும். தீர்மானக் கெழுக்களைப்பற்றிக் குறிப்பிடும் பொழுதெல்லாம், இந்தப் பொருளை (அதனைத் தனியாகத் 'தீர்மானம்' என்று குறிப்பிட்டிருந்தாலும் இல்லாவிட்டாலும்) மனத்தில் நன்றாக நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டும். மேற்கண்ட கூல விளைச்சல் எடுத்துக்காட்டிலுள்ளதைப்போல், மாறிகளிடையே காரணத் தொடர்பு இருக்குமென்று நம்ப முடியுமானால், இந்தக் கெழுக்களைப் பயன்படுத்தி, அம் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு அளவைகளை விளக்கலாம்.

பல்தரத் தொடர்புள்ள ஒரு பிரச்சினையில் மாறுபாட்டின் ஆய்வு முறையைப்பற்றிய குறிப்பு: மொத்தத் 'தீர்மானத்தை' அதன் பிரிவுகளாகப் பிரிப்பதற்கான முறைகளைச் சென்ற பகுதிகளில் கவனித்தோம். சார்புடை மாறியொன்றின் மொத்த வேறுபாட்டைப் பிரிவாக்க அதன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையையும் கையாளலாம். இப்படி எழுதுவதால், நாம் முன்பே அறிந்துள்ள மாறுபாட்டுச் சோதனைகளைச் செயலாக்குதல் முடியும். கூல விளைச்சல் எடுத்துக் காட்டில், X_1 மாறியின் சராசரியிலிருந்த விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 2,952.03 என்பதாகும். இதனை மூன்று முறைகளில் பிரித்துள்ளதை அட்டவணை 18-5 காட்டுகிறது.

இந்த அட்டவணை A-பிரிவில், மொத்தக் கூட்டுத் தொகை இரண்டு பிரிவுகளாக்கப்பட்டுள்ளது; ஒன்று, ஜூனின் வெப்பமான X_2 மாறியின் இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது; மற்றது மீதமான பகுதி. முதலாவதான, 'விளக்கப்பட்ட' பகுதியானது (697.68) இவ்விரு மாறிகளிடை உள்ள தொடர்பை $X_1 = a + b_{12} X_2$ என்ற சமன்பாடு

[16] மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுவிலிருந்து வளர்ச்சியான தீர்மானக் கெழுவைக் கணக்கிடலாம்; $s_{1\cdot 2}^2/s_1^2$ என்பதனால் வர்க்கமாக்கப்பட்ட ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுவைப் பெருக்கவேண்டும். அதாவது,

$$\frac{s_{1\cdot 2}^2 - s_{1\cdot 23}^2}{s_{1\cdot 2}^2} \times \frac{s_{1\cdot 2}^2}{s_1^2} = \frac{s_{1\cdot 2}^2 - s_{1\cdot 23}^2}{s_1^2}$$

(multiplier) பெருக்கியான $s_{1\cdot 2}^2/s_1^2$ என்பது $(1 - r_{12}^2)$ என்பதற்குச் சமம் என்பது தெளிவு. இதுதான் 'பராதீனக் கெழு' (coefficient of alienation) கருத்தின் அடிப்படையை, இந்தப் பெருக்குதல் $s_{1\cdot 2}^2$ என்பதிலிருந்து, X_1-மாறியின் முழு மாறுபாடான s_1^2 என்பதற்கு மாற்றுகிறது; நிறுவப்பட்ட கெழுக்களைக் கூட்டாக முடியுமாறு செய்கிறது.

அட்டவணை 18-5

கூல விளைச்சலின் மொத்த வேறுபாட்டில், அடுக்கடுக்காகப் பல தனித்த மாறிகளைக் கருதுவதால் ஏற்படும் பிரிவுகள்

மொத்த வேறுபாட்டின் பிரிவு (1)	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (2)	DF (3)	மாறுபாடு (4)
A: X_2-ன் இயக்கம் ...	697.68	1	697.68
மீதி	2254.35	55	40.99
மொத்தம் ...	2952.03	56	
B: X_2 ன் இயக்கம் ...	697.68	1	697.68
சேர்க்கப்பட்ட X_3-ன் இயக்கம் ...	900.60	1	900.60
மீதி	1353.75	54	25.07
மொத்தம் ...	2952.03	56	
C: X_2-ன் இயக்கம் ...	697.68	1	697.68
சேர்க்கப்பட்ட X_3-ன் இயக்கம் ...	900.60	1	900.60
சேர்க்கப்பட்ட X_4-ன் இயக்கம் ...	96.83	1	96.83
மீதி	1256.92	53	23 72
மொத்தம் ...	2952.03	56	

குறிக்குப்பொழுது, கணக்கிடப்பட்ட X_1 மதிப்புகள் X_1-ன் சராசரியிலிருந்து விலக்கமாயுள்ள அளவைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிப்பதாகும். இந்தப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து, அதாவது, கண்டறிந்த விவரங்கள், கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து வித்தியாசப்படும் அளவைகளின், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையே மீதியான 'விளக்கப்படாத' பகுதி (2254.35). அதே அட்டவணையின் B பிரிவில், X_3 என்ற (ஜூலை வெப்ப அளவு) மாறியும் போக்குச் சமன்பாட்டில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. இந்த மாறியின் 'சேர்க்கப்பட்ட இயக்கம்' (added influence) 900.60 என்று குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது; எனவே, இந்த B பிரிவில் மூன்று பாகங்கள் உள்ளன; X_2-வினால் ஏற்பட்டது, X_2-விற்குப் பிறகு X_3-யினால் ஏற்பட்டது, மீதி அல்லது 'விளக்கப்படாதது' என்பவை. கடைசியாக, C பிரிவில், X_2, X_3 இரு மாறிகளுக்குப் பிறகு, X_4 மாறி சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது. X_4-ன் 'சேர்க்கப்பட்ட இயக்கத்தின்' அளவு 96.83. எனவே, இங்கு X_1-ன் மொத்த வேறுபாடு நான்கு பாகங்களாக்கப்பட்டுள்ளது. இவைகளில் ஒன்றுதான், மற்ற மூன்று

மாத வெப்பங்களின் இயக்கங்களைக் கணக்கிட்ட பிறகு மீதியான மாறுபாடு.

அட்டவணை 18-5-ன் இரண்டாவது பத்தியிலிருந்தும், வளர்ச்சியான தீர்மான அளவைகளைக் கணக்கிடலாம். d_{12} என்பது 697·68/2952.03 என்பது; $_{2}d_{13}$ = 900·60 2952·03; $_{23}d_{14}$ = 96·83/2952 03.

அட்டவணை 18-5-லுள்ள அமைப்பு முறை எல். எச். ஸி. டிப்பெட்டின் :நூலிலிருந்து (து.நூ.ப. 160) எடுக்கப்பட்டது. இவ் விவரங்களை வைத்துக்கொண்டு, ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் சேர்க்கப்பட்ட மாறிகளின் பங்குகளை, சிக்னிபிக்கன்ஸ் சோதனைகளுக்கு உட்படுத்தலாம். முன்பு (பக்கம் 338-9) மூன்று தனித்த மாறிகளின் பங்குகளைச் சோதனை செய்ததுபோலவே, இப்பொழுதும் X_4 என்பதின் பங்கை (X_2, X_3 இரண்டிற்கும் பிறகு வரும் பொழுது) சோதனை செய்யலாம். இந்தப் பங்கானது, வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையான 96·83 என்பதனால் குறிப்பிடப்பட்டது. X_1, X_2, X_3 களுக்கிடையே முன்பே உள்ள தொடர்பைத் தவிர, X_4, X_1 இரண்டிற்குமிடையே தொடர்பு இல்லை என்ற எடுகோளைத்தான் நாம் இப்பொழுது சோதனைக்குள்ளாக்குகிறோம். அப்படித் தொடர்பில்லையானால், இங்கு வந்துள்ள 96·83 என்ற X_1-ன் வேறுபாட்டில் ‘ விளக்கப்பட்ட ’ பகுதி, வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டுமே நிகழ்ந்திருக்கவேண்டும். அதற்கான வரையற்ற டிகிரி 1 தான். போக்குச் சமன்பாட்டில் புதிதாகச் சேர்க்கப்பட்ட $b_{14\cdot 23}$ என்ற கெழுவால் குறிக்கப்பட்டது. 96·83ஐ, இந்த 1ஆல் வகுத்தால் நமக்குக் கிடைப்பது—கருதப்பட்ட எடுகோளின்படி—வாய்ப்புக் காரணங்களால் ஏற்பட்ட மாறுபாட்டின் ஓர் அளவுதான். 16ஆம் அதிகாரத்தில், இதேபோன்ற ஓர் உதாரணத்தில், தனியே கணக்கிடப்பட்ட மற்றொரு பிழை மாறுபாட்டுடன், இந்த மாறுபாட்டை ஒப்பிட்டுப் பார்த்துச் சோதனையைச் செய்தோம். இங்கு 18-5ஆம் அட்டவணை C-பிரிவில் மீதியான வேறுபாடு 1256·92 என்பதாம். இதனை, இதற்கான 53 என்ற வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுக்க, 23·72 என்ற பிழை மாறுபாடு—வாய்ப்புக் காரணங்களால் ஏற்படக்கூடிய ஏற்றவிறக்கங்களின் ஒரு மதிப்பீடு—கிடைக்கிறது.[17]

[17] முன் பக்கங்களில் s^2 என்று குறிக்கப்பட்டவைகள் (s_1^2, $s_{1\cdot 2}^2$...) போன்றவைகளே, இங்கு அட்டவணை 18-5-ல் (4)ஆம் பத்தியிலுள்ள மீதி மாறுபாடுகள். ஆனால், அவைகளுக்கும் இங்குள்ளவைகளுக்கும் வித்தியாசமுண்டு. முன்பு கணக்கிடப்பட்டவை s வர்க்கங்களுக்கெல்லாம், N-என்பதுதான் வகுக்கும் எண்ணாகவிருந்தது; இந்த அட்டவணையிலுள்ளவை, அவைகளுக்கான வரையற்ற டிகிரிகளால் வகுக்கப்பட்டவை. [k என்பது குறித்த நிலைகளில் குறைவாகும் வரையற்ற டிகிரிகளைக் குறித்தால், வகுக்கும் எண் ($N—k$) யாகும்.] s-வர்க்கங்களை, விளக்க அளவைகளாக (descriptive measures) மட்டுமே கருதியுள்ளோம்; ஆனால், அட்டவணை 18-5-லிருந்து கிடைப்பவை, முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளின் மதிப்பீடுகளாக அமைகின்றன.

96·83 என்பதும் 23·72 என்பதும் கூல விளைச்சலில் வாய்ப்புக் காரணங்களால்மட்டும் ஏற்படும் மாறுபாட்டை அளப்பவைகளாக இருக்கக்கூடுமா? இவைகளின் விகிதமான F-ன் மதிப்பு 4·08; இங்கு $n_1 = 1$, $n_2 = 53$· 5 சதவீத சிக்னிபிக்கென்ஸ் மட்டத்தை வைத்துக் கொண்டால், கண்டுபிடித்த F-ன் மதிப்பு சூனிய எடுகோளிற்கு ஒத்ததாக இல்லை என்று சொல்லவேண்டும். அதாவது, ஆகஸ்டு வெப்ப அளவானது, கூல விளைச்சலை உண்மையாகவே, வளர்ச்சியாக இயக்குகிறது. ஆனாலும், இதே F-மதிப்பு 1 சதவீத மட்டத்தில் சிக்னிஃபிக்கன்டாக இல்லை. எனவே, சற்று நிதானித்து முடிவுக்கு வரும் ஆராய்ச்சியாளர், சூனிய எடுகோளை நிராகரிக்குமுன், அதிக விவரங்களை விரும்பார்.

சில வரம்புகள் : கருதப்படும் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பு ஓரடுக்குத் தொடர்பாக (linear relationship) இருந்தாலும், அல்லது தோராயமாக அப்படி இருந்தாலும், நாம் முன் விளக்கியுள்ள ஒருசிறைத் தொடர்புக் கெழுக்களும், பல்தரத் தொடர்புக் கெழுக்களும் பயன்படும். (ஓரடுக்குத் தொடர்பிலிருந்து சிறிதே மாறுபட்டிருப்பின், மதிப்பீடுகளின் திருத்தம் குறையுமேயன்றி, அவைகளைத் தள்ளிவிடவேண்டியிருக்காது). இந்த எடுத்துக்காட்டில், நான்கு மாறிகளுள்ளதால், அவைகளிடையே ஆறு ஜோடிகள் கிடைக்கும். இந்த ஆறு ஜோடி மாறிகளிடையேயும் உள்ள தொடர்பு ஓரடுக்குத் தொடர்பாகவிருந்தால்தான், அவைகளிடையே உள்ள மொத்தத் தொடர்புகளையும் கழிவுத் தொடர்புகளையும், மேற்கூறிய முறைகளால் ஆராயமுடியும். அளவைகளை அப்படியே கருதாமல் அவைகளை மாற்றி அமைப்பதாலும் (transformation) ஓரடுக்குத் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். இந்த மாறுபாடுகள் லாகிருதம் முறையிலோ, ரெஸிப்ரோக்கல் முறையிலோ நிகழலாம். எனவே,

$$\text{Log } X_1 = a + b_{12\cdot34}X_2 + b_{13\cdot24}X_3 + b_{14\cdot23}X_4$$

என்ற மதிப்பீட்டுக்கான ஒரு சமன்பாட்டை நிறுவலாம். இங்கு X_1-மாறியின் லாகிருதமும், மற்ற மாறிகளும் ஓரடுக்குத் தொடர்புடையனவாக உள்ளவாறு கருதியுள்ளோம். இவைகளிலிருந்து கிடைக்கும் s, R அளவைகள், மாறிகளின் விகிதங்களுக்கானவைகளாக அமையும்.[18]

18 விவசாயப் பொருளாதாரத் துறையில் அதிகமாகப் பயன்பட்டுவரும் முறையொன்றை மார்டேகாய் எஜெகீல் (Mordecai Ezekiel) என்பவர் வகுத்துள் ளார். இது பல்தரப்பட்ட வளைவுத் தொடர்பை அளவிடுவதாகும். இதற்கான ஓர் எளிதான வரைபட முறையை லூயி எச். பீன் (Louis H. Bean) என்பவர் தந்துள்ளார். பற்பல மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்புகளை முதல் நிலையில் ஆராய்வதற்கு இம்முறைகள் மிகத் தகுந்தவைகளாகும். பற்பலத் தொடர்பு ஆய்வு முறைகளைப்பற்றிய தெளிவான விளக்கங்களுக்கு எஜெகீல் என்பவரின் நூலை (து.நா.ப. 37) பார்க்கவும்.

மற்றுமொரு வரம்பையும் நாம் நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டும். கண்டறிந்த விவரங்கள் அதிகமாக இல்லாத நிலைகளில் பல மாறிகளைக்கொண்டு, கழிவுத் தொடர்புக் கெழுக்களையோ, பல் தரத் தொடர்புக் கெழுக்களையோ கணக்கிடுவது பொருந்தாது. சிறு எண்ணிக்கைகொண்ட மாதிரிகளில் பல மாறிகளைச் செயற்படுத்துவதால், அதிகமான, ஆனால் திருத்தமற்ற மதிப்புகளைப் பெறுவோம். (அந்த நிலைகளில், முன்பே கூறப்பட்ட திருத்தங்களைச் செய்வதால், தவறான முடிவுகள் நிகழ்வதைத் தடுக்கமுடியும்.) இந்த விதிகளுக்குட்பட்ட வரம்புகளிடையே, ஒருசிறைத் தொடர்பு முறைகளும் பல்தரத் தொடர்பு முறைகளும் திறன்வாய்ந்த ஆய்வு முறைக் கருவிகளாகப் பயனளிக்கும்.

துணைநூல்கள்

Cramer, H., 'Mathematical Methods of Statistics,' Chap. 23.

Croxton, F. E., and Cowden, D. J., 'Applied General Statistics,' Chap. 24.

Dean, J., 'The Relation of the Cost to Output for a Leather Belt Shop,' Technical Paper 2, National Bureau of Economic Research, 1941.

Ezekiel, M., 'Methods of Correlation Analysis,' 2nd ed., Chaps., 10, 12-15, 18.

Ferber, R., 'A Study of Aggregate Consumption Functions,' Technical Paper 8, National Bureau of Economic Research, 1953.

Frisch, R., 'Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems.'

Goulden, C.H., 'Methods of Statistical Analysis,' 2nd ed., Chap. 8.

Kelley, T. L., 'Fundamentals of Statistics,' Chap. 12.

Kendall, M. G. 'The Advanced Theory of Statistics,' 3rd ed., Vol. I, Chap. 15.

Lewis, E. E., 'Methods of Statistical Analysis in Economics and Business,' Chap. 14.

Peters, C. C. and Van Voorhis, W. R., 'Statistical Procedures and their Mathematical Bases,' Chap. 8.

Schultz, H., 'Statistical Laws of Demand and Supply.'

Schultz, H.; 'The Theory and Measurement of Demand'.

Snedecor, G. W., 'Statistical Methods,' 4th ed., Chap. 13.

Tippett, L. H. C., 'The Methods of Statistics,' 4th ed., Chap. 10.

Walker, H. M. and Lev, J., 'Statistical Inference', Chap. 13.

Waugh, A. E., 'Elements of Statistical Method,' 3rd ed., Chap. 16.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics,' 14th ed., Chap. 12.

இந்த அத்தியாயத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணைநூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பிக்கப்பட்ட ஆண்டையும் நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

19. மாதிரி முறையும் மாதிரி அளவெடுப்புகளும்

கண்டறிந்த விவரங்களை ஆராய்ந்து விளக்குவதற்கும், அவைகளிலிருந்து சில பொதுப்படை முடிவுகளைக் காண்பதற்கும் பற்பல முறைகளைச் சென்ற அதிகாரங்களில் படித்தோம். இந்த அதிகாரத்தில் புள்ளியியல் விவரங்களை எப்படித் திரட்டுவது என்பதைப் பற்றிக் கூறுவோம். சமூக விஞ்ஞானிகள், தொழிலதிபர்கள், பொதுத் துறை ஆட்சியாளர்கள் முதலியவர்களுக்குக் கிடைக்கக்கூடிய விவரங்களின் விரிவிலும் (scope) அளவிலும் (quantity) அண்மையில் சில ஆண்டுகளில் நிகழ்ந்துள்ள முன்னேற்றங்களைப்பற்றி முன்பே கூறியுள்ளோம். இந்த விரிவானது சமூகவியல் பகுதிகளுக்கே ஒரு நல்ல அனுபவவழி (empirical) அடிப்படையைத் தந்துள்ளது; மற்றும், தொழில் முறைகளிலும் பொதுத்துறைகளிலும் தேர்ந்த முடிவுகளைக் காணச் சிறந்த அடிப்படைகளையும் அளிக்கிறது. ஆனால், மாதாந்தரமோ, வருடாந்தரமோ வெளியிடப்படும் சமூக, பொருளாதார, தொழில்துறை விவரங்களின் எண்ணிக்கையை மட்டும் கவனித்தால் போதாது; அவை எந்த நோக்கங்களுக்காகத் திரட்டப்பட்டனவோ அவைகளுக்குப் பொருத்தமாக அமைதலும், விவரங்கள் பிழைகளில்லாது அமைதலும் அவசியம். அப்படியிருந்தால்தான், புள்ளியியல் ஆய்வுகளும் முடிவுகளும் பயனுள்ளவைகளாக நிகழும்.

புள்ளிவிவரங்களின் வகைகள்

கண்டறிந்த விவரங்களைப் பாகுபடுத்தும்பொழுது, அவைகள் சாண்டம் மாதிரி முறைகளில் (random samplings) தொகுக்கப் பெற்றவைகளாக இருத்தல் வேண்டுமென்பதை முன்பே வற்புறுத்தியுள்ளோம்; அவ்வாறு இல்லையென்றால், அவைகளிலிருந்து காணும்

முடிவுகளைத் திட்டமான பிழை அளவுகளைக்கொண்டு விளக்க முடியாது. ராண்டம் அல்லாத முறைகளில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களும் பயன்படக்கூடியனவே; ஆராய்ச்சித் துறைகளிலும் முடிவு காணுதல்களிலும் (decision-making) அவைகள் அதிகமாகப் பயன் தரலாம். ஆனுல், புள்ளியியல் வழியில் பொதுமைகளைக் (generalisations) காணும்பொழுதும், எடுகோள்களைச் சோதனை செய்யும் பொழுதும் நாம் காணும் முடிவுகளை (conclusions) ஊக அளவைகளுடன் இணைத்துக் கூறவேண்டுமாதலால், ராண்டம் முறையில் திரட்டப்பெற்ற விவரங்களே தேவைப்படும்.

அண்மையில், விவரங்களை நல்ல முறையில் திரட்டுவதைப்பற்றி அதிகமான முன்னேற்றங்களைக் காண்கிருேம். சுமார் 25 ஆண்டுகளுக்குமுன்பு சமூக, பொருளாதார, வணிகத்துறைகளில், ராண்டம் முறையில் திரட்டப்பெற்ற புள்ளியியல் விவரங்களைப் பெறுவது அரிதாகவே இருந்தது. அந்த நாட்களில் பொது நிறுவனங்களினுலும் தனியார் நிறுவனங்களினுலும் கையாளப்பட்ட முறைகளை, இன்று நாம் திட்டமில்லா முறைகள் என்று கூறிவிடுவோம். பொதுத்துறையிலும் சரி, தனித்துறையிலும் சரிஎந்தெந்த விவரங்கள் எளிதாகக் கிடைத்தனவோ, அவைகள் எல்லாம் ஏற்றுக்கொள்ளப் பெற்றன; அவைகளில் பிழையின்மையைப்பற்றியோ, அல்லது குறித்த நோக்கத்திற்கு அவை தகுந்தவையா என்பதைப்பற்றியோ சிந்திக்காமல்கூடத் திரட்டப்பெற்றன. ''இவ் வகையில்—எளிதில் கிடைக்கும் விவரங்களைமட்டுமே திரட்டுவதால்—கிடைப்பதை ஒரு 'துண்டு' (chunk) என்று கூறலாமேயன்றி, மாதிரி என்று கூற முடியாது'' என்று ஹௌஸரும், டெமிங்கும் (Hauser and Deming) தெரிவித்துள்ளார்கள். ஆனுல், அண்மையில், விவரங்களைத் திரட்டும் முறைகளில் மிகுந்த முன்னேற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. கிடைத்தவைகளைப் பொறுக்குவது என்பது மாறி, நன்கு திட்டமிட்டுக் குறிக்கோள்களுக்கு ஏற்ற வகைகளில் புள்ளிவிவரங்களைத் திரட்டுவது நிகழ்ந்துவருகிறது. அவ்வகையான முறைகளில் எல்லாவற்றினூடே அமைந்த ஒரே ஓர் உட்கருத்து, ராண்டம் கொள்கைதான்.

இப்படிக் கூறுவதால், இன்று சமூக, பொருளாதாரப் புள்ளி விவரத் திரட்டுகள் எல்லாம் ராண்டம் முறைகளைப் பின்பற்றியே எடுக்கப்பட்டுவந்துள்ளன என்பதாகாது; அப்படி அவைகள் திரட்டப் பெறுவதில்லை; முடியவும் முடியாது. சமூகவியல் அறிஞர்களாலும், ஆட்சியாளர்களாலும் கையாளப்பெறும் பற்பல புள்ளிவிவரங்கள் ராண்டமற்றுதான் இருக்கும். ஆனுல், முக்கியமான சமூக, பொருளாதாரப் பிரிவுகளில் நன்கு ஆராய்ந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகளையே பயனுக்குகிருர்கள். மக்கள் விசாரணைகளிலிருந்து

(population surveys), நாட்டிலுள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, அவர்களில் வேலையிலிருப்போர், இல்லாதோர் என்ற பாகுபாடுகளைப் பெறுகிறார்கள்; துய்ப்போர் நிதிகளைப் (consumer finances) பற்றிய ஆராய்ச்சிகளிலிருந்து, துய்ப்போர் சேமிப்பு, செலவிடுதல்களைப்பற்றி அறிதல் முடிகிறது; குடும்ப வரவு-செலவுத் திட்டங்களின் (family budgets) மாதிரி ஆராய்ச்சிகள், துய்ப்போர் விலைக் குறியீட்டெண்ணிற்குத் தேவையான நிறைகளை அளிக்கும்; கார்ப்பரேஷன்களின் (corporations) இலாபங்கள் எவ்வளவு என்பது இன்று மாதிரி முறைகளாலேயே மதிப்பிடுகின்றனர்; அரசாங்கத்திடம் உள்ள வருமானவரிப் பட்டியல்களிலிருந்து (income-tax returns) மாதிரிகள் எடுத்து, அவைகளைக்கொண்டு வருமானம் பெறுவோரை, அவர்கள் பெறும் வருமான அளவிற்கேற்றவாறு பரவல்களாகப் பாகுபடுத்துகிறார்கள். துய்ப்போரின் நோக்கம் (attitudes) எவ்வாறு உள்ளது, எவ் வகைகளில் மாறிக்கொண்டு வருகிறது என்பதனை மதிப்பிடுவதற்குத் தொழில் ஆராய்ச்சிக்கூடங்கள் (Business Research Units) பற்பல மார்க்கெட் அளவெடுப்புகளைப் (market surveys) பயன்படுத்துகின்றன. அன்றாட வாழ்க்கையில் ஏற்படும் பல பிரச்சினைகளுக்குச் சீரான முறையில் தீர்வுகாண, இவைபோன்ற மாதிரித் தேர்வுகள் —குறுகிய, மற்றும் விரிவான நோக்கங்கொண்டவை—பெரிதும் உதவுகின்றன. இவைகளுக்கப்பாலும், அவைகள் பொதுவாக எல்லாச் சமூகவியல் முன்னேற்றங்களுக்கும் பெரிதும் பயன்படுபவைகளே.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது, மாதிரியில் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு நபரும் சார்பற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவராக இருக்கவேண்டும், மற்றும் அவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான ஊக அளவையும் விளக்கமாகத் தெரிந்திருக்கவேண்டும் என்ற இரண்டு விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டேதான் புள்ளியியலறிஞர் மாதிரிப் பரவல்களையும் (sampling distribution), மாதிரிப் பிழைகளையும் அமைக்கிறார். இந்த விதிகள், எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சீட்டுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்பொழுதும், மற்றும் பல சிறு பந்துகளைக்கொண்ட பாத்திரத்திலிருந்து (urn) சில சிறு பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்பொழுதும், பொருத்தமாயுள்ளதைக் காணலாம். ஆய்வுக்கூடத்தின் கட்டுப்பாடுகள் இருக்குமானல் இந்த விதிகள் சரிவர அமைந்துவிடுவது உண்மைதான்; எனவே, பற்பல சிக்கல்கள் நிறைந்த நடைமுறைக் களத்தில் (actual field) இந்த விதிகளைப் பொருத்தமுடியுமா என்ற காரியத்தைப்பற்றிப் போதிப்பவரும், படிப்பவரும் நன்கு சிந்திக்காமல் போகலாம்; விதிகள் தோராயமாகக்கூடப் பொருத்தமாக இருக்காதுபோகலாம். எனவே, இந்தக் காரியம் எளிதானதன்று. மற்றும், ஒருவித முறையும் இன்றி, ஏனோதானோ என்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட

மாதிரி, ராண்டம் மாதிரி ஆகிவிடாது. உண்மையான ராண்டம் மாதிரிகளை எடுப்பதற்குப் பிரச்சினையை நன்கு ஆராய்ந்து கவனமாகத் திட்டமிட்டுக்களத்தில் அத்திட்டத்தைச் செயற்படுத்தும்பொழுது மிகச் சிறிய பிரிவுகளையும் கூர்ந்து கவனித்தல் மிக அவசியம். அண்மையில் மாதிரித் தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகரித்திருப்பதும், அவைகளின் நோக்கம் விரிவடைந்துள்ளதும் மாத்திரம் விவரங்கள் திரட்டுவதில் ஏற்பட்டுள்ள முன்னேற்றங்களுக்குக் காரணமில்லை; நுட்ப முறைகளிலேயேதான் முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது. சென்ற 30, 40 ஆண்டுகளிலேதான் அளவெடுப்பு அமைப்புகளிலும் (survey designs) கள மாதிரி முறைகளிலும் (field sampling) ஒரு தனியான கலைத்திறமை நிகழ்ந்துள்ளது என்று கூறினால் அது மிகையாகாது. இன்னமும், அத் திறமை ஒரு முழுமை நிலையை அடைந்துவிட்டது என்று கூறிவிட முடியாது; எனினும், நிகழ்ந்துள்ள முன்னேற்றங்கள் பெரியவைகளே—இவைகள் பிற்காலத்தில் ஏற்படக்கூடியவைகளுக்கு முன்னோடிகளாகவே திகழும்.

இக் கலைத் திறமையின் முக்கிய நோக்கம் ஓர் ஊக அளவை மாதிரியைத் (probability) தேர்ந்தெடுப்பதாகும். மாதிரியில் 'இடம் பெறும்' ஒவ்வொரு 'நபரு'ம், ஆராய்ச்சியாளரின் விருப்பத்தின் பேரில்மட்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்படக்கூடாது; ஊக அளவை முறையைக்கொண்டு ஒரு குறித்த 'நபரை' மாதிரியில் சேர்த்துக்கொள்ளலாமா, கூடாதா என்பதை முடிவு செய்யவேண்டும். மற்றும், மாதிரியில் சேர்க்கப்படுகிற 'நபர்' எந்த ஊக அளவையுடன் சேர்க்கப்படுகிறார் என்பதும் தெரிந்தால்தான், அத்தகைய மாதிரியை 'ஊக அளவை மாதிரி' என்கிறோம். மாதிரியில் உள்ள 'நபர்'களைத் தேர்ந்தெடுப்பதில், ராண்டம் முறைகளையே கையாளுதல் இத்தகைய மாதிரியின் தனிச்சிறப்புக் கூறு ஆகும். ஊக அளவை மாதிரிகளிலிருந்து நிறுவும் முடிவுகளுக்கு (results), திட்ப அளவைகளையும் (measures of precision), மாதிரிப் பிழை (sampling errors) அளவுகளையும் அமைத்தல் சாத்தியமாகும். இவையன்றி வேறு பல வகை மாதிரி அளவெடுப்புகளும் உள்ளன. அவைகளைத் தீர்ப்பு மாதிரிகள் (judgment samples) என்றும், நோக்க மாதிரிகள் (purposive samples) என்றும், பங்குவீத மாதிரிகள் (quota samples) என்றும் கூறலாம். இவைகளில் ஒன்றுக்கொன்று வெகுவாக வித்தியாசப்படாமல், இவை எல்லாவற்றிற்கும் பொதுவான தனிக் கூறு ஒன்றும் உள்ளது. அதுதான் ராண்டம் முறையில்லாமல் தனி மனிதனது அபிப்பிராயத்தைக்கொண்டு தொகுக்கப்பட்டிருத்தல், தேர்ந்தெடுத்த மாதிரியானது, தன் மூலத்தின் பிரதிநிதியாக (representative) இருக்கவேண்டும் என்ற கருத்துக்கேற்றவாறு அமைகிறது—எனவே, இவைகளிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளுக்குத் தற்சார்பற்ற (objective)

திட்பமான அளவைகளை அமைக்க முடியாதென்றே கூறவேண்டும். இம் முறையான மாதிரிகள் எல்லாம் ராண்டம் அற்றவைகளே— ஏனென்றால், எந்த 'நபர்' மாதிரியில் இடம்பெற வேண்டும் என்பதில் தனி மனிதனது தீர்ப்பு புகுகிறது. எனவே, இந்தத் தீர்ப்பு அந்த 'நபரின்' சில தன்மைகளையும் மாதிரியில் புகுத்திவிடக்கூடும்.

சில சொற்களும் விளக்கங்களும்

மாதிரி விசாரணைகள் கீழ்க்கண்ட சில நபர்களின் சில பண்புகளைப் பற்றி ஆராய்வதற்குப் பயன்படுகின்றன. அவை மக்கள், குடும்பங்கள், வாழும் வீடுகள், வியாபார நிறுவனங்கள், பண்ணைகள் முதலியன. எந்தப் பண்பை நாம் ஆராய எடுத்துக்கொள்கிறோமோ அதைச் சிறப்புக்கூறு (characteristic) என்று கூறுவோம். இப் பண்பினை உட்கொண்ட அலகுகளை (units) முதற்படி (elementary) அலகுகள் எனக் கொள்வோம். அந்த அலகுகள் அளவிடக்கூடியனவாயின் (measurable), நாம் X, Y...என்ற எண்களினால் அவைகளைக் குறித்து, மாறிகள் (variates) என்போம். அலகுகள் அளவிட முடியாத பண்புகளாகவும் இருக்கலாம்—அப்பொழுது நாம் அப் பண்பைப் பெற்றவைகளின் விகிதம் எவ்வளவு, பெறாதவைகளின் விகிதம் எவ்வளவு என்று மாத்திரமே கணக்கிடுதல் முடியும். ஆக, அமெரிக்க நாட்டு மக்களின் சம்பளங்களைப்பற்றி ஆராயுங்கால் நாம் ஒரு மாறியின் சிறப்புக்கூற்றை (variable characteristic) ஆராய்கிறோம்; மக்களின் மணமான, அல்லது தனித்த நிலையை ஆராயும் போது நாம் பண்பின விவரங்களை (attribute or qualitative data) சேகரிக்கிறோம். இதுபோன்ற முதற்படி அலகுகளின் கூட்டம் முழுமைத் தொகுதி (population) ஆகும். இத் தொகுதிக்குத்தான் நம் மாதிரி ஆராய்ச்சியின் முடிவுகள் பொருந்தும். கள விசாரணைகளில் பயன்படுபவை வரம்புற்ற (finite) முழுமைத் தொகுதிகளாகும்; ஆனால், புள்ளியியல் ஊகக் கோட்பாடுகளை (theories of statistical inference) முறைப்படுத்தப் பயன்படும் முழுமைத் தொகுதிகள் வரம்பற்றவைகளாகும் (infinite). (சில வேளைகளில் வரம்புற்ற தொகுதிகளையும் பாவனை செய்யவேண்டி வரும்; அவைகளைத் தனியே ஆராயலாம்.) மாதிரி எடுத்தல் முறைக்கு அடிப்படையாக (basis) உள்ள அலகுகளை மாதிரி அலகுகள் (sampling units) எனக் கொள்வோம். அவைகள் தனித்தவைகளாகவும் இருக்கலாம், அல்லது பல அலகுகள் சேர்ந்த கூட்டாகவும் இருக்கலாம். ஆக ஊரின் ஒரு பகுதியாக மாதிரி அலகு இருக்கலாம். ஆனால், அவைகளிலுள்ள தனி வீடுகளையோ, அல்லது வாழும் மக்களையோ ஆய்வாளர் முதற்படி அலகுகளாகக் கருதி ஆராயவேண்டியிருக்கலாம். 'மாதிரி' என்பது அப்படிப் பொறுக்கி எடுக்கப்பெற்ற அலகு

களின் ஒரு கூட்டாகும். நாம் இந்த மாதிரியை நன்கு ஆராய்ந்து, அதன்வாயிலாக முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிய சில முடிவுகளை வெளியிட முயல்வோம். மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிகள், மொத்தங்கள், விகிதங்கள் முதலியனவற்றை மதிப்பிட்டுக் (estimate) கூறலாம்; மற்றும் அம் மதிப்பீடுகளின் திட்ப அளவைகளை அமைக்க உதவும் செய்திகளையும் அறியலாம். குறிப்பிட்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிய முறைகளை எடுத்துக் கூறுவதுதான் மாதிரித் திட்டம் (sampling plan). கடைசியாக, மாதிரிச் சட்டம் என்பது தொகுதியிலுள்ள எல்லா அலகுகளையும் விவரித்துக் கூறுவதாகும். இது ஒரு பட்டியலாகவோ, தேசப்படமாகவோ, அல்லது ஒரு விவரத் திரட்டாகவோ (directory) இருக்கலாம். இச் சட்டத்தைக் குறிப்பிட்ட ஓர் ஆராய்ச்சிக்கென்றே தனியாகவும் அமைக்க நேரிடலாம். அல்லது முன்பே தொகுக்கப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டும் அமைக்கலாம்.

குறியீடு : மாதிரி விசாரணைகளில் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகள் இன்னமும் தரப்படுத்தப்படாவிட்டாலும், முறைகளில் பெரும்பாலும் ஒற்றுமை ஏற்பட்டுள்ளது.[1] பெரும்பான்மையோரால் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ள குறியீடுகளே இங்கு விவரிக்கப்படும். இப்படிச் செய்யுங்கால் சென்ற அதிகாரங்களில் பயன்படுத்திய குறியீடுகளைச் சிறிது மாற்றிக் கூறுகிறேன். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கையையோ, அல்லது பண்புகளையோ குறிக்க ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளையும் (capital letters), மாதிரியின் அதே பண்புகளைக் குறிக்க, அந்தந்தச் சிறு எண்களையும் (small letters) பயன்படுத்தல் ஒரு முக்கியக் கோட்பாடாகும். ஆக X என்பது முழுமைத் தொகுதியின் ஏதாவதொரு மாறியைக் குறிக்க உதவும்; X_i என்பது அந்த மாறியின் ஏதாவதொரு மதிப்பைச் (value) சுட்டிக் காட்டும். (அதாவது, X_i என்பது அந்த X மாறியின் தனிக் குறிப்பாகும்.) x மற்றும் x_i என்பவை மாதிரியின் மாறியையும், அம் மாறியின் ஒரு தனிக் குறிப்பையும் முறையே எடுத்துக்காட்டும். முழுமைத் தொகுதியோ, அல்லது மாதிரியோ படுகைகளாகப் (stratas) பிரிக்கப்படுமாயின் h என்னும் ஒட்டுக் குறி (subscript) சேர்க்கப்படும். ஆக X_{hi} என்பது தொகுதியொன்றின் படுகையின் ஒரு குறிப்பையும், x_h என்பது மாதிரியின் ஒரு படுகையையும், x_{hi} என்பது மாதிரியின் ஒரு படுகையின் ஒரு தனிக் குறிப்பையும் குறிக்கும். சில குறியீட்டு முறை விவரங்களை அடுத்துவரும் பட்டியல் தெளிவுபடுத்தும்.

[1] *மாதிரி விசாரணை முறைகளில் பயன்பட்டுவரும் சர்வதேச, தரப்படுத்திய குறியீடுகளைப்பற்றிட தகவல்களை* 'The Preparation of Sampling Survey Reports,' ***Statistical Papers***, Series C, No. 1 *(திருத்தப் பெற்றது) என்ற நூலில் காணலாம். வெளியிட்டோர்:* Statistical Office of the United Nations, *1950-ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி.*

அளவுகள்	அடையாளம்			
	முழுமைத்தொகுதி		மாதிரி	
	மொத்தம்	ஒரு படுகை	மொத்தம்	ஒரு படுகை
அலகுகளின் எண்ணிக்கை.*	N	N_h	n	n_h
அளவிட்ட ஒரு மாறியின் சராசரி.	$\bar{X}$	$\bar{X}_h$	$\bar{x}$	$\bar{x}_h$
ஒருமாறியின் மொத்த மதிப்பு.	X_t	X_{ht}	x_t	x_{ht}
அளவிட்ட ஒரு மாறியின் மாறுபாடு.	S^2	S_h^2	s^2	s_h^2
குறித்த பண்புடைய அலகுகள்.	U	U_h	u	u_h
குறித்த பண்புடைய அலகுகளின் விகிதம்.	$P(=U/N)$	P_h	$p(=u/n)$	p_h
குறித்த பண்பில்லா அலகுகளின் விகிதம்.	$Q(=1-P)$	Q_h	$q(=1-p)$	q_h
X-மாறியின் வேறுபாட்டுக் கெழு.	V		v	
X-மாறியின் ஒப்புமை மாறுபாடு (Relative variance).	V^2		v^2	

தனித்தனியே படுகைகளை $h_1, h_2, h_3 \ldots$, என்று காட்டி, அவைகளுக்கான குறியீடுகளுக்கும் ஒட்டுக் குறிகளை வைத்துக் காட்டுவோம் (உதாரணம்: $n_{h_1}, n_{h_2}, n_{h_3} \ldots$).

அடையாளம்	எதைக் குறிக்கின்றதென்ற விவரம்
$\bar{X}'$	$\bar{X}$ என்பதன் ஒரு மதிப்பீடு (மாதிரி மதிப்பு $\bar{x}$-ம் இதையே குறிக்கப் பயன் படுத்தப்படும்)
X'_t	X_t என்பதன் மதிப்பீடு
U'	U-வின் மதிப்பீடு
P'	P-யின் மதிப்பீடு (மாதிரி மதிப்பு p-யும் இதையே குறிக்க உதவும்)
$f(=n/N)$	மாதிரி பின்னம்; மாதிரியில் அடங்கியுள்ள முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம்
$f_h(=n_h/N_h)$	படுகையின் மாதிரி பின்னம்
$g(=1/f=N/n)$	பெருக்குக் காரணி (expansion factor) (இதனால் மாதிரியின் மொத்தம் முழுமைத்தொகுதியின் மொத்தமாகப் பெருகும்)

*n என்பதை இப் புத்தகத்தின் மற்றப் பகுதிகளிலும், இணைப்புப் பட்டியல்களிலும், வரம்புற்ற டிகிரிகளைக் குறிக்கவே பயன்படுத்தியுள்ளோம். ஆனால், இங்கு அதே குறியை, மாதிரியின் அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் பயனாக்குகிறோம். இந்த ஒரே ஓர் இடத்தில்தான் குறியீடு திருத்தமாக இல்லை என்பதனை நன்கு கவனிக்கவும்.

$g_h \ (= 1/f_h)$: படுகையின் பெருக்குக் காரணி

$1 - f \ \{= (N - n)/N\}$: அளவுடைய பெருக்கும் எண்; மாதிரியில் உட்படா முழுமைத் தொகுதியின் பங்கு; மாதிரி மதிப்பீடுகளின் திட்பத்தைப் பாதிக்கும் (affects) ஒரு காரணி

$s^{2'}_{X_t}$: ஒரு மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு

s^2_p : ஒரு விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு

$v^2_{\bar{x}}$: சராசரியின் மதிப்பீட்டின் ஒப்புமை மாறுபாடு

$v^{2'}_{X_t}$: ஒரு மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் ஒப்புமை மாறுபாடு

v^2_p : ஒரு விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் ஒப்புமை மாறுபாடு

k : மாறுபாட்டுக் கெழுவின் பெருக்கும் எண்; மாதிரி முறையின் திட்பத்தைக் குறிக்க உதவும்

$s^2_h \left\{= \dfrac{\Sigma(x_{hi} - \bar{x}_h)^2}{n_h - 1}\right\}$: மாதிரியின் படுகையின் மாறுபாடு

$s^2_w \left\{= \dfrac{\Sigma(n_h s^2_h)}{n}\right\}$: மாதிரிப் படுகைகளுள் இருக்கும் மாறுபாட்டின் கூட்டளவு (aggregated measure); படுகை மாறுபாடுகளின் நிறையிட்ட சராசரி

D : முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் மதிப்பீட்டிற்கும் அதன் உண்மையான (true) மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு

மாறுபாட்டையோ, தரவிலக்கத்தையோ குறிப்பிடுகின்ற சூத்திரங்களைப் (formula) பயன்படுத்தும்பொழுது, அவைகளைப் பெறுவதற்கு வரையற்ற டிகிரிகளையே (degrees of freedom) உபயோகிக்க வேண்டும் எனக் கொள்வோம். [வரையற்ற டிகிரிகள் = .. − 1) அல்லது $N - 1$), மொத்த எண்களை விட ஒன்று குறைவு.]

சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை
(Simple Random Sampling)

table
பாருள்

தற்காலத்தில் வழங்கிவரும் மாதிரி நுட்ப வினைமுறைகளுபாருத்தி வாகும்; இவைகளால் வரும் மாதிரிகள் முழுமைத் தொகுதியிகையுடைய

நிதியாகத் திகழும். ஊக அளவை மாதிரிகளைத் தருகின்ற முறைகளிலெல்லாம் எளிமையானதுதான் சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை (simple random sampling). இம் முறை மற்றவற்றிற்கெல்லாம் அடிப்படையானது. இதனைச் சிறிது சிறிது மாறுபடுத்திப் புதுமுறைகளை வகுத்துக் களத்தில் நேரடியாகப் பயன்படுத்துகிறார்கள். ஆனாலும், இம் மாற்றங்களும் அடிப்படை முறையிலுள்ள விதிகளுக்குப் பொருத்தமாகவே இருக்கும்.

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு 'நபரும்' மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட ஒரே ஊக அளவையுடையதாக இருந்தால்தான் அது சாதாரண மாதிரி முறை என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். அதே முறையைக்கொண்டு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை 'நபர்'களை உடைய சாதாரண மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n எண்ணிக்கை நபர்களைக்கொண்ட மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும் என்றால்—அந்த எண் 'நபர்'களும் மாதிரிக்குள் புக ஒரே ஊக அளவை இருத்தல்வேண்டும். N என்பது அதிகமாகவிருந்தால், அதனின்று n எண்ணிக்கைகளைப் பொறுக்கி எடுக்கும் வெவ்வேறு வழிகளும் மிக அதிகமாகவே இருக்கும். இதை $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ என்ற சூத்திரம் தரும். [இங்கு $N!$—(N ஃபேக்டோரியல்)—என்பது 1-லிருந்து N வரையுள்ள முழு எண்களின் பெருக்கல் பலன்.] மிகச் சிறிதான எண்களைக்கொண்டு இதை விளக்குவோம். 5 'நபர்'களையுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 2 'நபர்'களையுடைய மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்தலை, $\frac{5!}{2!\ (5-2)!} = 10$ வழிகளில் செய்யலாம். (a, b, c, d, e என்ற ஐந்து வெவ்வேறு 'நபர்'களை இரண்டிரண்டாக 10 விதங்களில் பாகுபடுத்தலாம்.) ஒவ்வொரு முறையும் இதுபோல் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கைப் பொருள்களைக் கொண்ட மாதிரிகள் எவ்வளவு இருக்கலாம் என்று கணக்கிடவேண்டியதில்லை. ஆனால், மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையில் அது போன்ற ஒவ்வோர் அடைவிற்கும் (set) ஒரே ஊக அளவை இருக்குமாறு அமைதல் அவசியம். இந்த விதிகளைக்கொண்டு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிதான் சாதாரண ராண்டம் மாதிரி என அழைக்கப்பெறும்.

ஒரு மாதிரியிலுள்ள ஒவ்வொரு நபரையும் எடுக்கும்பொழுது எவ்வளவு ராண்டமாக எடுக்கிறோம் என்பதிலும், அதே எண்ணிக்கைகொண்ட எல்லா மாதிரி அடைவுகளையும் ஒத்த ஊக அளவைகள் உடையதாக எடுப்பதிலும்தான், எந்த மாதிரித் தேர்வு முறையிலும் உள்ள உட்பொருள் ஆகும். N என்ற எண்ணிக்கை நபர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரி எடுப்பதாகக் கொள்வோம்; அப்பொழுது அந்த எல்லா N-நபர்களையும் தனித்

தனியே பிரித்துப் பார்க்கும்படி அவைகளை 1, 2, 3........என்ற எண் களினுல் குறித்தோ, அல்லது வேறெந்த முறையில் தனிப்படுத்தியோ பகுப்பது முதல் வேலையாகும். பிறகு அந்த N-எண்களைத் தனித் தனியாகச் சிறு அட்டைகளிலோ, சிறு வட்டத் துண்டுகளிலோ (chips) அல்லது சிறு குண்டுகளின்மீதோ (balls) எழுதி வைக்கவேண் டும். இந்த அட்டைகள், வட்டத் துண்டுகள் அல்லது குண்டுகள் எல்லாம் வெளித்தோற்றத்திற்கு ஒரேவகையாகவும், ஒரே அளவுகளும் கனமும் உள்ளவைகளாகவும் இருத்தல் அவசியமாகும். பிறகு அவை களை ஒரு கிண்ணத்திலோ, ஒரு தாழியிலோ போட்டு நன்ருகக் குலுக்கி அவைகளை இரண்டறக் கலந்துவிடவேண்டும். பிறகு அதனின்று n எண்ணிக்கைகொண்ட தனி எண்களை ராண்டமாகப் பொறுக்கி எடுத்தால்--அந்த n எண்களுக்கொப்பான அலகுகளைக் கொண்டதுதான் ஒரு சாதாரண ராண்டம் மாதிரி ஆகும். இந்த முறையில் பல சிக்கல்கள் உண்டு. அந்த உறுப்புகளை (அட்டைகளோ, குண்டுகளோ, துண்டுகளோ) ராண்டமாக ஒன்று கலப்பது என்பது அவ்வளவு எளிதன்று. அட்டைகள் ஒன்ருே டொன்று ஒட்டிக்கொள்ளலாம் அல்லது கிண்ணத்தின் அடியிலோ, பக்கங்களிலோ அவைகள் தங்கிவிடலாம். அப்படியாயின் எல்லா அட்டைகளையும் தேர்ந்தெடுக்க ஊக அளவை சமமாக இராது. N என்பது மிகப் பெரிய எண்ணுனல் அவ்வளவு அட்டைகளை வெட்டு வதும், அவைகளை வைப்பதற்கு ஒரு கிண்ணத்தைத் தேடுவதும் மிகக் கடினமானதாகிவிடலாம். ஆதலால் N அதிகமாக உள்ள போதும்—ஏன், N சிறியதாயுள்ளபோதுங்கூட—அந்த எண்களை ராண்டமாகக் கலக்க வேறு முறைகள் உண்டு. [மற்றும், மேற்கூறின சம ஊக அளவைகளாகத் திகழ, ஒவ்வோர் அட்டையையும் அதை எடுத்தவுடன் (அதில் காணும் எண்ணைக் குறித்துக்கொண்டு) மறுபடி யும் கிண்ணத்தில் போட்டுவிடுவது அவசியமாகிறது. இல்லாவிடில் இரண்டாம் முறை தேர்ந்தெடுக்கப்படும் அட்டைத் துண்டுக்கு ஊக அளவை மாறிவிடுமென்பதைக் கவனிக்க. ஆனுல், நடைமுறையில் இதுபோல் திருப்பிப் போட்டுவிடுவதில்லை. ஏனென்ருல், அப்படிப் போட்டால் மற்ருெரு முறை அதே அட்டையைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டியதாகலாம். அப்படி ஒரே அலகை (அந்த அட்டையிலுள்ள எண்ணிற்குப் பொருத்தமான அலகை), மறுமுறை தேர்ந்தெடுப்பது அவசியமில்லாதது. ஆனுல், இந்தச் சிறு மாற்றம் N என்பது பெரிய எண்ணுக இருப்பின் கணக்கில் வராது. சாதாரணமாகக் கள அளவெடுப்புகளில் N பெரிய எண்ணுகத்தான் இருக்கும்.]

ராண்டம் எண் பட்டியலைப் பயன்படுத்தல் (Use of a table of random numbers) : ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள N பொருள் களுக்கும் தனித்தனியே 1-லிருந்து N-வரை எண்களைப் பொருத்தி விடலாம். அப்பொழுது நமக்கு வேண்டிய எண்ணிக்கையுடைய

அட்டவணை 19-1

ராண்டம் எண்கள்*

வரிசை	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	78994	36244	02673	25475	84953	61793	50243	63423
2	04909	58485	70686	93930	34880	73059	06823	80257
3	46582	73570	33004	51795	86477	46736	60460	70345
4	29242	89792	88634	60285	07190	07795	27011	85941
5	68104	81339	97090	20601	78940	20228	22803	96070
6	17156	02182	82504	19880	93747	80910	78260	25136
7	50711	94789	07171	02103	99057	98775	37997	18325
8	39449	52409	75095	77720	39729	03205	09313	43545
9	75629	82729	76916	72657	58992	32756	01154	84890
10	01020	55151	36132	51971	32155	60735	64867	35424
11	08337	89989	24260	08618	66798	25889	52860	57375
12	76829	47229	19706	30094	69430	92399	98749	22081
13	39708	30641	21267	56501	95182	72442	21445	17276
14	89836	55817	56747	75195	06818	83043	47403	58266
15	25903	61370	66081	54076	67442	52964	23823	02718
16	71345	03422	01015	68025	19703	77313	04555	83425
17	61454	92263	14647	08473	34124	10740	40839	05620
18	80376	08909	30470	40200	46558	61742	11643	92121
19	45144	54373	05505	90074	24783	86299	20900	15144
20	12191	88527	58852	51175	11534	87218	04876	85584
21	62936	59120	73957	35969	21598	47287	39394	08778
22	31588	96798	43668	12611	01714	77266	55079	24690
23	20787	96048	84726	17512	39450	43618	30529	24356
24	45603	00745	84635	43079	52724	14262	05750	89373
25	31605	64782	34027	56734	09365	20008	93559	78384
26	10452	33074	76718	99556	16026	00013	78411	95107
27	37016	64633	67301	50949	91298	74968	73631	57397
28	66725	97865	25409	37498	00816	99262	14471	10232
29	07380	74438	82120	17890	40963	55757	13492	68294
30	71621	57688	58256	47702	74724	89419	08025	68519
31	03466	13263	23917	20417	11315	52805	33072	07723
32	12692	32931	97387	34822	53775	91674	76549	37635
33	52192	30941	44998	17833	94563	23062	95725	38463
34	56591	72529	66063	73570	86860	68125	40436	31303
35	74952	43041	58869	15677	78598	43520	97521	83248
36	18752	43693	32867	53017	22661	39610	03796	02622
37	61691	04944	43111	28325	82319	65589	66048	98493
38	49197	63948	38947	60207	70667	39843	60607	15328
39	19436	87291	71684	74859	76501	93456	95714	92518
40	39143	64893	14606	13543	09621	68301	69817	52140
41	82244	67549	76491	09761	74494	91307	64222	66592
42	55847	56155	42878	23708	97999	40131	52360	90390
43	94095	95970	07826	25991	37584	56966	68623	83454
44	11751	69469	25521	44097	07511	88976	30122	67542
45	69902	08995	27821	11758	64989	61902	32121	28165
46	21850	25352	25556	92161	23592	43294	10479	37879
47	75850	46992	25165	55906	62339	88958	91717	15756
48	29648	22086	42581	85677	20251	39641	65786	80689
49	82740	28443	42734	25518	82827	35825	90288	32911
50	36842	42092	52075	83926	42875	71500	69216	01350

* இந்தப் பட்டியல் பர்க் ஹார்டன், எச்., மற்றும் டைனஸ்-ஸ்மித் III, ஆர். (Burke Horton, H. and R. Tynes Smith III) என்பவர்களால், பியூரோ ஆஃப் ட்ரான்ஸ்போர்ட் எக்கனாமிக்ஸ், இன்டர்ஸ்டேட் கமிஷன் (Bureau of Transport Economics, Interstate Commission) என்ற நிறுவனத்தாருக்காகத் தொகுக்கப்பெற்ற *'Table of 1,05,000 Random Decimal Digits'* என்ற நூலின் 5-ஆம் பக்கத்தின் ஒரு பகுதியாகும். அந்த நிறுவனத்தின் இயக்குநரான டபிள்யூ. எச். எஸ். ஸ்டீவன்ஸ் (W. H. S. Stevens) என்பவரின் அனுமதிபெற்று இங்கு வெளியிடப்பட்டுள்ளது.

மாதிரியை எளிதாகவும் சீக்கிரமாகவும் தேர்ந்தெடுக்க ராண்டம் எண் பட்டியல்கள் உதவும். அந்தப் பட்டியல்களிலிருந்து ஆய்வாளர் n தனி எண்களைப் பொறுக்கி எடுத்தால் அவை 1-லிருந்து N வரை உள்ள எண்களின் ஒரு ராண்டம் மாதிரியாகும். அட்டவணை 19-1-ல் உள்ளது, இன்டர்ஸ்டேட் காமர்ஸ் கமிஷன் (Interstate Commerce Commission) என்ற நிறுவனத்தார் வெளியிட்டுள்ள பெரிய அட்டவணையின் ஒரு பகுதி. இது அந்த ராண்டம் எண்களின் அமைப்பையும் பயனையும் உணர்த்தும். ஒவ்வொரு பத்தியிலுள்ள முழு எண்கள் ராண்டம் முறையிலுள்ளன; அதுபோலவே தான் வரிசையில் உள்ள எண்களும் எந்த வழியில்—மேலிருந்து கீழாகவோ, இடமிருந்து வலமாகவோ—பார்த்தாலும் எண்கள் ராண்டம் முறைமையிலுள்ளனவாதலால், நாம் அந்தப் பட்டியலில் எந்த இடத்திலிருந்து தொடங்குகிறோம் என்பது முக்கியமில்லை. பத்தியிலிருந்து பொறுக்கி எடுத்தலே நடைமுறையில் எளிதாக உள்ளது. N-ன் மதிப்பைப்பொறுத்துத் தேவைக்கேற்றவாறு பத்திகளைக் குறைவாகவோ அதிகமாகவோ பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

900 தனிப் பொருள்களைக்கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஓர் ஆய்வாளர் 10 நபர்களைக்கொண்ட ராண்டம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்க விரும்புகிறார் எனக் கொள்வோம். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் அலகிற்கும் 1-லிருந்து 900 வரை எண்ணிக்கை இடவேண்டும். இப்படி எண்ணிக்கை இடுவதை நமக்குச் சௌகரியமான எந்த முறையிலும் செய்யலாம். N-ன் மதிப்பு 900-க்குள் இருப்பதால் மூன்று பத்தியிலுள்ள எண்களைப் (அதாவது மூன்று ஸ்தான எண்களை) பயன்படுத்துவோம். எந்த மூன்று பத்திகளை வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்; எந்த இடத்திலிருந்தேனும் தொடங்கலாம். ஆனால், இவைகளைப்பற்றிய முடிவைப் பட்டியலை நோக்கும் முன்பே செய்துவிடுதல் நல்லது. (அப்படிச் செய்யாமல் பட்டியலை எதிரில் பிரித்துவைத்துக்கொண்டு, அதைக் கவனித்துத் தொடக்க இடத்தை நிர்ணயித்தால் அது ராண்டம் முறைப்படி அமையாமல் போய்விடலாம்.) இந்த அட்டவணையில் (8) பத்திகள் உள்ளன; ஒவ்வொன்றிலும் 5 எண்களைக் கொண்ட 50 வரிசைகள் உள்ளன. இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஆய்வாளரானவர் (3)ஆம் பத்தியிலுள்ள கடைசி மூன்று எண்களை எடுப்பதாகவும், 7ஆவது வரிசையில் தொடங்குவதாகவும், மேலிருந்து கீழ் எண்களைக் குறித்துக்கொள்வதாகவும் முடிவு செய்தார் எனக் கொள்வோம். மூன்றும் பத்தியில் ஏழாவது வரிசையிலுள்ள கடைசி மூன்று எண்கள் 1 7 1 என்பவை. ஆதலால் முழுமைத் தொகுதியில் எந்த அலகு 171ஆம் எண் இடப்பெற்றிருந்ததோ, அந்த அலகு மாதிரியில் சேர்த்துக்கொள்ளப்பெறும். அப்படியே அடுத்த வரிசையிலுள்ளவை 0 9 5 என்ற எண்கள். ஆதலால், 95ஆம் எண்ணுள்ள

அலகு மாதிரியில் சேரும். இவ்வாறே மேலிருந்து கீழ் எண்களைப் படித்துக்கொண்டே போனால் அடுத்த எண்ணான 916 கிடைக்கிறது; இது 900-ஐவிடப் பெரிதாகையால் இதை நாம் விட்டுவிடுகிறோம். (அதேபோல் ஒரே எண் மறுமுறை வந்தால் அதையும் விட்டுவிட வேண்டும்.) ஆக, ஆய்வாளர் தேர்ந்தெடுத்த 10 எண்கள் பின் வருமாறு :

171 95 132 260 706 267 747 81 15 647

இந்த எண்களைப் பெற்றுள்ள 10 முழுமைத் தொகுதி அலகுகளே ஆய்வாளருக்குக் கிடைக்கும் ராண்டம் மாதிரியாகும்.

இச் செய்முறை சாதாரண ராண்டம் மாதிரி கிடைக்குமாறு அமைகிறது. நாம் பயன்படுத்திய பட்டியலானது எண்களின் வகைப் படுத்துதலைப்பொறுத்தமட்டில் ராண்டமாக அமைந்த ஒன்று. முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு நபருக்கும் அது மாதிரியில் சேர அமையும் ஊக அளவைகள் சார்பில்லாமலும், சமமாகவும் உள்ளன. அந்தச் சம ஊக அளவையும் தெரிந்ததுதான் (n/N என்பதுதான் அது; N நபர்களைப் பெற்ற ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n நபர்களைக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது இந்த விடை கிடைக்கும். நம் எடுத்துக்காட்டில் இது, 10/900 அல்லது 1/90 ஆகிறது). மற்றும், 10 எண்களைக் கொண்ட எந்த மாதிரிக் கூட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தாலும் அவைகளின் ஊக அளவைகள் சமமாகத்தான் இருக்கும். இந்த ஊக அளவையைக் கணக்கிட முடிந்தால் போதும்; அதைக் கணக்கிட்டுத் தான் ஆகவேண்டுமென்பதில்லை.

சாதாரண ராண்டம் மாதிரியிலிருந்து மதிப்பீடுகள் (Estimates from a Simple Random Sample)

முதற்கண் நாம் மாதிரியிலிருந்து ஓர் அளவையைக் கணக்கிடுகிறோம்; இதை ஒரு 'மாதிரி அளவை' அல்லது 'ஸ்டாடிஸ்டிக்' (statistic) என்று கூறுவோம். இதிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் அளவை ஒன்றை [இதைப் 'பராமீட்டர்' (parameter) என்று கூறுவோம்] மதிப்பிட வேண்டும். ஸ்டாடிஸ்டிக்கிலிருந்து பராமீட்டர் கண்டுபிடிக்க வழி வகுப்பதுதான் இரண்டாம் வேலை. பிறகு நாம் கண்டுபிடித்த மதிப்பீட்டிற்கு மாதிரிப் பிழை (sampling error) அமைத்தலே மூன்றாம் வேலை. இவைகளைப்பற்றி 6, 7, 8ஆம் அதிகாரங்களில் (பாகம் I) வேறு இடத்தில் விளக்கியுள்ளோம். ஆனால், இப்பொழுது பல புதுச்சொற்களும் செய்முறைகளும் தேவைப்படுமாதலால், அவைகளை ஒழுங்குபடுத்திச் சீராக, சுருக்கமாக விளக்குவோம்.

மாதிரி அளவைகளும் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பிடுதலும்: மாதிரியிலிருந்து அளவைகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டிய முறைகள் நாம் அறிந்ததே. X என்னும் மாறியின் சில அளவைகளைக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களினால் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$x_t = \Sigma x$ (சம்பளம் பெறுவோர்களின் மொத்தச் சம்பளம் என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்)

$\bar{x} = \Sigma x/n$ (மாதிரியிலுள்ள சம்பளம் பெறுவோர்களின் கூட்டுச் சராசரி எனக் கொள்ளலாம்)

$p = u/n$ (மாதிரியிலுள்ளோர்களில் வேலையில்லாதோர்களின் விகிதம் என்று கொள்ளலாம்)

மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியை அணுகுங்கால், இந்த அளவைகளைச் சற்று மாற்றி அமைத்தல் வேண்டும். ஏனென்றால், மாதிரியானது தொகுதியின் ஒரு சிறு பாகம்தான். $f\ (= n/N)$ என்பது மாதிரியின் பின்னம்; இது தொகுதியின் எந்தப் பாகம் மாதிரி என்பதனைக் குறிக்கும். அதேபோல் $g\ (= N/n)$ என்பது தொகுதியின் பெருக்கி; இந்தப் பெருக்கியால் பெருக்குவதால் மாதிரி மொத்தங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் மொத்தங்களைக் கணக்கிடலாம். ஆக, கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களின் உதவியைக் கொண்டு மாதிரியின் அளவைகளிலிருந்து, தொகுதியின் அளவைகளைக் கணக்கிடலாம்:

$$X'_t = gx_t \tag{19.1}$$

$$\bar{X}' = \bar{x} \tag{19.2}$$

$$U' = gu \tag{19.3}$$

$$P' = U'/N \tag{19.4}$$

[மாதிரியின் $p\ (= u/n)$-ம், மேற்கூறிய P'-ம் சமமாகவிருக்கும். இதற்குப் பின்வரும் விளக்கங்களிலெல்லாம் p என்பதனையே பயன்படுத்துவோம்; அதேபோல் $\bar{x}$ என்பது தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியைக் குறிக்கும். X'_t and U' என்பவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் மொத்தத்தின் மதிப்பீடுகளைக் குறிக்கும்; இவைகள் மாதிரியின் மொத்தங்களிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கின்றன.]

மாதிரிப் பிழைகளை மதிப்பிடுதல்: வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதிகளுக்கு உதவும் முடிவுகளை வரம்புற்ற முழுமைத் தொகுதிகளுக்குப் பயன்படுத்தும்பொழுது, நாம் நம் முறைகளைச் சிறிது மாற்றவேண்டியிருக்கிறது. இவ் வகையான மாற்றத்தை நிகழ்த்துவதற்கு 'வரம்புற்ற பெருக்கி' (finite multiplier) என்ற காரணியைப் பயனுக்குவோம். இதனையே வரம்புற்ற முழுமைத் தொகுதியின் திருத்தம் (finite population correction) என்று கூறுவர். இதன் மதிப்பு முழுமைத் தொகுதியில் மாதிரி நீ... உள்ள நபர்கள்

எண்ணிக்கைக்கும், தொகுதியிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதம். சூத்திரம் = $(N-n)/N$. f என்ற அடையாளத்தை n/N என்ற மாதிரி பின்னத்திற்குப் பயனுக்கியுள்ளோமாதலால், இதனை $1-f$ என்றும் குறிப்பிடலாம். இந்தக் கோவையினால், மாதிரி ஸ்டாடிஸ்டிக்குகளைப் பெருக்கவேண்டும். இந்தத் திருத்தத்தைப் பயன்படுத்துவதால் ஸ்டாடிஸ்டிக்கின் மாறுபாட்டை f என்ற விகிதத்தின்படி குறைத்துவிடுகிறோம். f-ன் மதிப்பு 0.25 என்று இருந்தால், வரம்புற்ற பெருக்கி 0.75 ஆகிறது; இதனால் குறித்த ஸ்டாடிஸ்டிக்கின் மாறுபாடு 25 சதவீதம் குறைந்துவிடுகிறது. நாம் 150,000,000 தனிப் பொருள்களுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 10,000 எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்போம் என்று வைத்துக்கொள்வோம். இந்த எடுத்துக்காட்டில் தொகுதியானது மாதிரியைவிட எவ்வளவோ பெரிதாக உள்ளது. ஆதலால், இதுபோன்ற நிலைகளில் நாம் தொகுதியை வரம்பற்றதாகவே கொள்ளுதல்தான் எளிது; அப்படியாயின் f-ன் மதிப்பு 1 என்றே சொல்லிவிடலாமாதலால் அதைப் பயன்படுத்தவேண்டிய அவசியம் இல்லை. [மாதிரி பின்னம் 5 சதவீதத்திற்கும் குறைவாக இருந்தால் இந்தத் திருத்தம் செய்யவேண்டியதில்லை என்று காக்ரான் (Cochran) என்பவர் கூறுகிறார்.]

பல மாதிரி விசாரணைகளில் நாம் பொருள்களை ஆராயும்பொழுது அந்தப் பொருள்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட இயல்பின் சராசரியைத்தான் கணக்கிடுகிறோம். ஒரு குடும்பத்தின் சராசரி வருமானம், தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி வாரச் சம்பளங்கள், பங்குகளின் சராசரி விளைபயன்கள் போன்றவை. அத்தகைய சராசரியின் மாறுபாடு (தரவிலக்கத்தின் வர்க்கம் அல்லது இரண்டாம்படி) $s_{\bar{x}}^2$ என்றோ s^2/n என்றோ குறிக்கப்பெறும். இங்கு n என்பது மாதிரியிலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை; மாதிரி மாறுபாடான s^2 கணக்கிடும்பொழுது $(n-1)$ வரையற்ற டிகிரிகளை (degrees of freedom) பயன்படுத்தியிருத்தல் வேண்டும். முழுமைத் தொகுதி வரம்பற்றதாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. ஆனால், தொகுதி வரம்புற்றதாயிருந்து, N பொருள்களைக் கொண்டிருந்தால், சராசரியின் மாறுபாட்டைக் கணக்கிடக் கீழ்க்காணும் சூத்திரம் தேவை.

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) = \frac{s^2}{n}(1-f) \qquad (19.5)$$

இதன் வர்க்க மூலம்தான் முழுமைத் தொகுதி சராசரி மதிப்பீட்டின் தரவிலக்கமாகும். இதனைத்தான் 'தரப் பிழை' (standard error) என்பர். இதனைக்கொண்டுதான் ஆய்வாளர் நம்பிக்கை எல்லைகளை (confidence limits) அமைக்கிறார்; அல்லது எடுகோள்களைச் சரிபார்க்கிறார் (இதனைக் குறித்து பாகம் I, அதிகாரம் 7, 8-ல் காண்க).

கள விசாரணைகளிலிருந்து சராசரி அல்லாமல், மற்ற பராமீட்டர்களையும் மதிப்பிடவேண்டிவரலாம். உதாரணமாக, இடைநிலைகள், தரவிலக்கம் முதலியன. இவைகளுக்கும் பாகம் I, 7, 8ஆம் அதிகாரங்களில் விளக்கப்பட்ட செய்முறைகளே போதும்; ஆனால், மாதிரி பின்னத்தைக்கொண்டு பெருக்கிவிடவேண்டும். ஆதலால் அவைகளைப்பற்றி இங்குத் தனி விளக்கம் தேவை இல்லை. இவைகளையன்றி மற்றும் இரண்டு எளிதான அளவுகளை மதிப்பிடுதல் அவசியம்—முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள பொருள்களின் ஏதாவது ஒரு தனி இயல்பின் கூட்டுத் தொகையும், அந்தத் தொகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பைப் பெற்றிருக்கும் பொருள்களின் விகிதமும். இவைகளின் மாதிரிப் பிழைகளைப்பற்றிச் சிறிதளவு விளக்கம் தேவையாகிறது.

பல மாதிரி அளவெடுப்புகளின் நோக்கம், கூட்டுத் தொகையை மதிப்பிடுவதுதான். நாட்டிலுள்ள விவசாயிகளின் மொத்த வருமானம் என்ன? குறிப்பிட்ட ஒரு சமூகத்தினரிடையே உள்ள தேசீயச் சேமிப்புப் பத்திரங்களின் மொத்தம் என்ன? குறித்த ஓர் இடத்தில் பள்ளிக்குச் செல்லக்கூடிய வயதை அடைந்துள்ள சிறுவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை என்ன? இவைபோன்ற கேள்விகளுக்கு விடை தேடவேண்டியிருக்கும். மாதிரியில் n உறுப்பினர்கள் இருந்தால், அவர்களின் ஒரு தனி இயல்பின் கூட்டுத்தொகை x_t என்பதை முன்பே கண்டோம். இதனின்று, X'_t என்பதனைக் கணக்கிடலாம்; இதுதான் முழுமைத் தொகுதியின் அதே இயல்பின் மொத்தத் தொகையாகும். இதனை gx_t (g என்பது பெருக்கி) என்றும் கூறலாம். அதுகால், X'_t-ன் மாறுபாடு கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தால் கணக்கிடப் பெறும்.[2]

$$s^2_{X'_t} = \frac{ns^2}{f^2}(1-f) \tag{19.6}$$

இங்கு s^2 என்பது மாதிரியின் மாறுபாட்டைக் குறிக்கும்; இதையே முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடாகக் கொண்டுள்ளோம்.

ஒரு சிறு எடுத்துக்காட்டால் மேற்கூறிய முறைகளை விளக்குவோம். அமெரிக்க நாட்டின் (U.S.) ஓர் ஊரில் மொத்த சேமிப்புப் பத்திரங்கள் எவ்வளவு உள்ளன என்பதை மதிப்பிட ஓர் ஆராய்ச்சி செய்கிறோம் எனக் கொள்வோம். அந்த ஊரில் 10,000 குடும்பங்கள் உள்ளன. [முறையாக நோக்குங்கால் செலவழிக்கும் ஒவ்வொரு குழுவும் (15ஆவது அதிகாரத்தில் குறிப்பிட்டவாறு) ஒரு முதற்படி மாதிரி அலகு ஆகிறது.] நாம் 1,000 குடும்பங்கள் கொண்ட ஒரு

[2] மாதிரிச் சராசரி மதிப்பீட்டின் மாறுபாட்டை N^2 என்பதனால் பெருக்க, மொத்த மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு கிடைக்கும். ஆதலால் (19.6)-ன் வலப்பக்கக் கோவையானது (19.5)-ன் வலப்பக்கக் கோவையின் N^2 பெருக்கல் பலன் ஆகும் என்பதைக் கவனிக்க.

மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்து, அவைகளின் சேமிப்புப் பத்திரங்களின் மொத்த மதிப்பு 900,000 டாலர்கள் என்று கணக்கிட்டிருக்கிறோம் எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது, மாதிரி விகிதம் 'f'-ன் மதிப்பு 0.10; g-ன் மதிப்பு 10 ஆகிறது. இப்பொழுது (19.1) சூத்திரத்தின் உதவியால், மொத்தச் சேமிப்புத் தொகையை

$$X'_t = 10 \times 900,000 = 9,000,000$$

டாலர்கள் என்று கணக்கிட்டுவிடலாம்.

இங்கு மாதிரியின் தரவிலக்கம் 300 டாலர்கள் என்று கொண்டால் (19.6) சூத்திரத்தின்படி, இந்த மொத்த மதிப்பீட்டின் தரவிலக்கம்

$$sx'_t = \sqrt{\frac{1,000 \times 90,000}{0{\cdot}01}(1 - 0{\cdot}10)} = \sqrt{8,100,000,000}$$

$= 90,000$ டாலர்கள் என வருகிறது.

·95 மட்டத்தில் நம்பிக்கை எல்லைகளை அமைத்தால் $9,000,000 \pm 1{\cdot}96 \times 90,000$ என்று ஆகிறது. அதாவது அந்த ஊரின் மக்களிடையே உள்ள சர்க்கார் சேமிப்புப் பத்திரங்களின் மதிப்பு 8,823,600 டாலர்களிலிருந்து 9,176,400 டாலர்கள் வரை இருக்கும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள நபர்களில் (பொருள்களில்) எவ்வளவு நபர்கள் ஒரு குறித்த பண்பைப் பெற்றிருக்கின்றனர் அல்லது அப் பண்பு இல்லாமல் உள்ளனர் என்பதனை ஆராயுங்கால் நாம் விகிதத்தை மதிப்பீடு செய்யவேண்டிய நிலை ஏற்படும். குறிப்பிட்ட ஒரு சமயத்தில் ஊரில் எவ்வளவு விகித வீடுகள் மக்கள் வசிக்காமல் காலியாக இருந்தன? செலவழிக்கும் நபர்களில் எவ்வளவு விகிதத்தினர் தங்கள் சம்பளங்களில் மிச்சப்படுத்திச் சேமித்தனர்? குறித்த ஓர் ஊரில் எவ்வளவு விகிதத்தில் வீடுகளில் தொலைக் காட்சி செட்டு (TV-set) உள்ளது? இதுபோன்ற கேள்விகளுக்கு விடை காணவேண்டிய நிலையில், சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறையைக் கையாண்டு, அந்த விகிதங்களுக்குச் சார்பற்ற (unbiased) மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடுதல் முடியும்.

சாதாரணமாக ஒப்புமை அலைவெண் பரவல் ஒன்றிற்குத் (distribution of relative frequencies) தரவிலக்கம் $\sqrt{pq/n}$ என்பது நாம் அறிந்த ஒன்று. இதைச் சிறிதே மாற்றி அமைத்தால் p-ன் மாறுபாடு கிடைக்கிறது. இங்கு நாம் குறிப்பாக அறியவேண்டியது என்னவெனின்—முழுமைத் தொகுதியின் P, Q-க்களின் மதிப்பு தெரியாது என்பதாகும். ஆதலால், அவைகளுக்குப் பதிலாக p, q-வையே பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம்.

$$s_p^2 = \frac{pq}{n-1}(1-f) \qquad (19{\cdot}7)$$

ஒரு தொகுதியில் 25,000 மக்கள் வசிக்கிருர்கள் என்றும், அவர்களில் எவ்வளவுபேர்கள் வேலேயில்லாமல் இருக்கிருர்கள் என்றும் மதிப்பிட 5,000 நபர்களேக்கொண்ட ஒரு ராண்டம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்தோம் என்று வைத்துக்கொள்வோம். இதனே ஆராயுங்கால், நமக்கு 8 சதவிகித மக்களுக்கு வேலேயில்லே என்ற கணக்கு வந்தால் வேலேயற்றவர்கள் விகிதம் (மாதிரியில்) $p = \frac{8}{100} = \cdot 08$ என்று தெரிகிறது. இங்கு மாதிரி பின்னம் $f = \frac{5,000}{25,000} = \cdot 02$; ஆதலால் வரம்புற்ற பெருக்கி ·08 ஆகிறது. q-வின் மதிப்பு = ·92. சூத்திரம் (19·7) கொண்டு p-ன் தரவிலக்கத்தை

$$s_p = \sqrt{\frac{0\cdot 08 \times 0\cdot 92}{5,000-1} \times (1 - 0\cdot 20)}$$
$$= \sqrt{\frac{0\cdot 0736}{4,999}(0\cdot 80)}$$
$$= 0\cdot 00343$$

என்று கணக்கிடுவோம்.

இப்பொழுது முழுமைத் தொகுதியின் விகிதத்திற்கு ·95 மட்டத்தில் நம்பிக்கை எல்லேகளே வகுத்தால் $p \pm 1\cdot 96 s_p$ அல்லது $0\cdot 08 \pm 0.0067$ என்று வரும். அதாவது ·95 என்ற நம்பிக்கைக் கெழுவின் (confidence coefficient) மட்டத்தில் நோக்குங்கால் அந்த 25,000 பேர்கொண்ட தொகுதியில் வேலேயில்லாதவர்களின் விகிதம் 0·0733-லிருந்து 0·0867 வரையில் இருக்கும் என்பதுதான் நம் முடிவு.

திட்பமும் மாதிரியின் அளவும் (Precision and Sample Size)

மாதிரியிலிருந்து மதிப்பிடப்பட்ட அளவைகளின் திட்பத்தைப் பற்றிக் கூறுங்கால் நாம் அந்த அளவைகள் மாதிரி எடுத்தல்களால் எவ்வாறு மாறலாம் என்பதனேயே சுட்டிக்காட்டுகிருேம். ஆதலால் 'தரப்பிழை'கள் மாதிரிகள் எடுப்பதால் நேரக்கூடிய மாறுதல்களேத் தான் குறிக்கும். அளக்கப் பயன்படும் அளவுகோல்களினுலோ, முறைகளினுலோ பேட்டி காணுபவர்களின் ஒரு சார்புற்ற தன்மையினுலோ, பொருள் சரியாக விளங்காத அல்லது திட்பமாக விளங்காத கேள்விகளினுலோ ஏற்படும் பிழைகள் மாதிரிப் பிழைகள் என்று கூறப்படமாட்டா. இவைபோன்ற மற்றப் பிழைகள் நம்முடைய முடிவுகளின் திருத்தத்தைப் (accuracy) பாதிக்குமாதலால், இவைகளும் ஆய்வாளர் மிகுந்த எச்சரிக்கையுடன் கவனிக்கவேண்டியவைகளே. ('திருத்தம்' என்னும்பொழுது, நாம் கண்டுபிடித்த அல்லது மதிப்பிட்ட முடிவான மதிப்பிற்கும் அதன் உண்மை மதிப்பிற்கும் உள்ள ஒற்றுமையைத்தான் குறிக்கிருேம்.) இதுபோன்ற பிழைகளுக்கும்

மாதிரிப் பரவல்களிலிருந்து வரும் தரவிலக்கங்களுக்கும் அல்லது மாதிரி மதிப்பீடுகளின் தரவிலக்கங்களுக்கும் ஒருவிதத் தொடர்பும் கிடையாது. திட்பம் என்று சொல்லுங்கால் நாம் மாதிரிவழிப் பிழைகளைமட்டுமே குறிப்போம்.

சாதாரண ராண்டம் முறையைப் பின்பற்றித் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட மாதிரியினுல் ஒரு முழுமைத் தொகுதியை ஆராய்ந்தோமானுல், நம் முடிவுகளின் திட்பமானது, மாதிரியின் அளவைமட்டிலுமே சார்ந்திருக்கும். ஆதலால் திட்பத்தைக் கட்டுப்படுத்தமுடியும். எந்த அளவு நமக்கு அது தேவையோ, அந்த அளவிற்குத் தகுந் தாற்போல் மாதிரியின் அளவை ர்ணயிக்கலாம். ஆனுல், மாதிரி யின் அளவை இந்த ஒன்றைமட்டும் கவனித்து அமைக்க முடியாது; மாதிரி எடுத்தலுக்குச் செலவாகும் தொகையையும் கவனிக்க வேண்டும். ஆதலால் ஆய்வாளர் செலவையும், தப்பான முடிவு களால் நேரக்கூடும் விளைவுகளின் தன்மையையும் சீர்தூக்கிப்பார்த்து ஒரு முடிவுக்கு வருவார். திட்டமிட்டுச் செய்யும் விசாரணை ஒன்றில்—மாதிரி எடுத்தலின் செலவை எளிதில் கணிக்க முடியுமாயின்—குறிக் கோள்கள் சிலவே இருக்குமானுல், இத்தகைய முடிவு காணுதல் எளி தாக இருக்கும். அப்படியில்லாமல் பல நோக்கங்களைக் கொண்டவாறு ஒரு விசாரணை அமையுமாயின், அந்தந்த நோக்கங்கள் மாதிரியின் எண்ணிக்கையை (அளவை) ஒன்றுக்கொன்று முரணுகப் பாதிக்கலாம். அப்படியானுல் நடைமுறையில் ஒரு முடிவுநிலையைக் காணவேண்டும். இந்தப் பகுதியில் நாம் கவனிப்பது என்னவென்ருல்—திட்ப அளவையை நிச்சயித்த பிறகு, ஒரு சாதாரண ராண்டம் முறை மாதிரியொன்றில் எவ்வளவு அலகுகள் அல்லது பொருள்கள் சேர்க்கப்படவேண்டும் என்ற பிரச்சினை ஒன்றேயாம்.

மாதிரிப் பிழைகளின் அளவைகளைப்பற்றி முன்பு கூறினேம். இவைகளெல்லாம் மொத்தமாகவே (absolute) கணக்கிடப்பட்டுள் ளன—அதாவது முதற்கண் எந்த அலகுகளைக்கொண்டு நாம் பொருள்களை அளந்துள்ளோமோ, அந்த அலகுகளின் வழியிலேயே தான் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. குடும்ப சேமிப்பை மதிப்பிடுங்கால், அந்தச் சேமிப்புத் தொகையின் மொத்த நம்பிக்கை எல்லைகளும் டாலர் கணக்கில்தான் அமையும். அதுபோலவே கோதுமைப் பண்ணைகளில் விளையும் கோதுமையின் சராசரி அளவை மதிப்பிடும் பொழுது, அந்த முடிவுகள் 'புஷல்' (bushel) கணக்குகளில் இருக்கும் (புஷல் என்பது நம் நாட்டு மரக்கால் போன்றது).

ஆனுல், ஒரு மாதிரி விசாரணையைத் திட்டமாக்கும் சமயம், இந்த மொத்தமான திட்பத்தைவிட ஒப்புமைத் திட்பமே எளிதாக இருக்கும். அப்பொழுது நமக்குத் தேவைப்படுவது மொத்தப் பிழைகள் அல்ல; ஒப்புமைப் பிழைகள்தாம். ஆதலால் அனுமதிக்கப்படக்கூடிய பிழை

எல்லைகளை நிர்ணயிக்கும்பொழுது அவற்றையும் ஒப்புமைகள் வழியிலேயே அமைத்துவிடுவோம்; அப்படி அமைத்து, குறிப்பிட்ட ஊக அளவைக் கணக்கில் இந்த எல்லைகளுக்குள் நம் முடிவு அமையுமாறு ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கத் திட்டம் வகுப்போம். இங்கு அனுமதிக்கப்படக்கூடிய எல்லையென்பது, பராமீட்டரின் மதிப்பீட்டிற்கும் பராமீட்டரின் உண்மை மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை ஒப்புமை முறையில் கணக்கிடப்பட்ட வித்தியாசத்தைக் குறிக்கும்.

ஒப்புமை மாதிரிப் பிழை அளவுகள் (Measures of Relative Sampling Errors):[3] ஒப்புமை மாறுபாட்டைப்பற்றி பாகம் I, 5ஆம் அதிகாரத்தில்படித்தோம். அதற்கு ஒரு கெழுவாக, தரவிலக்கத்திற்கும் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள விகிதத்தைப் பயன்படுத்தினேம். அதாவது $v = \frac{s}{\bar{x}}$. [முன்பு இதையே 100ஆல் பெருக்கிச் சதவீதமாக்கி V என்ற பெரிய எழுத்தால் (capital letter) குறிப்பிட்டோம். இப்பொழுது அதை அப்படிப் பெருக்காமல் விகிதமாகவே வைத்து அதை v என்ற சிறிய எழுத்தால் குறிக்கிறோம். மாதிரியிலிருந்து கணக்கிட்ட எல்லா ஸ்டாடிஸ்டிக்குகளுக்கும் சிறிய எழுத்துகள்தான் பயன்படுத்தப்படும்.] இந்த ஒப்புமை மாறுபாட்டை மூலப் பரவல்களிலிருந்து கணக்கிட்டதுபோலவே, மாதிரிப் பரவல்களுக்கும் (சராசரி விகிதங்கள், தொடர்புக் கெழு முதலியனவற்றின் பரவல்களுக்கும்) அமைக்கலாம். அப்பொழுது v-க்கு ஒரு ஒட்டுக்குறி வைத்து, அதனல் v-யானது எந்த ஸ்டாடிஸ்டிக்கைக் (மாதிரி அளவையை) குறிக்கும் என்றும் உணர்த்தலாம். அதாவது $v_{\bar{x}}$ என்பது சராசரியின் ($\bar{x}$-தான் மாதிரியின் சராசரி) ஒப்புமை மாறுபாடு; $v_{\bar{x}} = s_{\bar{x}}/\bar{x}$; அதுபோலவே $v_p = s_p/p$ என்பதும் (p-தான் தொகுதியின் விகிதத்தை மதிப்பீடு செய்யும் விகிதம்).

ஹான்சன் (Hansen), ஹர்விட்ஸ் (Hurwitz), மெடோ (Madow) என்பவர்கள் இந்தக் கெழுவின் வர்க்கத்தைப் பயன்படுத்துகிருர்கள். இது நம் வேலையைச் சற்றே எளிதாக்குகிறது. இதற்கு அவர்கள் ஒப்புமை மாறுபாடு (relative variance) என்ற பெயர் (சுருக்கமாக ரில்-வேரியன்ஸ்) தந்துள்ளார்கள். மாதிரி விசாரணைகளில் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தப்படும் சில அளவைகளுக்குத் தொடர்புடைய மாறுபாடுகளைத் தரும் சூத்திரங்கள் அடுத்து உள்ளன. (மாதிரி பின்னம் 5 சதவீதத்திற்கும் மிகையாகவிருந்தால், வரம்புற்ற பெருக்கியைப்

[3] ஒப்புமை மாறுபாட்டைப்பற்றிய இந்தக் கலந்தாய்தலில் (discussion) நான் ஹான்ஸன், ஹர்விட்ஸ், மெடோ அவர்களுடைய வழியையே பின்பற்றியுள்ளேன். நான் பயன்படுத்தும் அடையாளக் குறிகள், செய்முறைகள் எல்லாம் அவர்களுடையனவே. எடுத்துக்காட்டுகளுக்கும், நிறுவுதல்களுக்கும் (proofs) கீழ்க் கண்டவைகளைப் பார்க்க: து.நூ.ப. 67, 1ஆம் வால்யூம், 4ஆம் அதிகாரம், 2ஆம் வால்யூம், 4ஆம் அதிகாரம்.

பயன்படுத்த வேண்டும்; 5 சதத்திற்கும் குறைவாகவிருப்பின் பயன் படுத்தாமல் விட்டுவிடலாம்.)

$$\nu^2 = \frac{s^2}{\bar{x}^2} \qquad (19.8)$$

(ஒட்டுக் குறியில்லாத ν^2 ஆனது மூலப் பரவலின் ஒப்புமை மாறுபாட்டைக் குறிக்கும்.)

$$\nu^2_{\bar{x}} = \frac{\nu^2}{n}(1-f) \qquad (19.9)$$

$$\nu^2_{X'_t} = \frac{\nu^2}{n}(1-f) \qquad (19.10)$$

$$\nu^2_p = \frac{q}{(n-1)p}(1-f) \qquad (19.11)$$

இவை ஒவ்வொன்றும் தர விலக்கத்தின் வர்க்கத்திற்கும் மதிப்பிடப்பட்டுவரும் அளவின் வர்க்கத்திற்கும் உள்ள விகிதமாகும். ஆக, வரம்பற்ற ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பீடுகளுக்கு

$$\nu^2_{\bar{x}} = \frac{s^2_{\bar{x}}}{\bar{x}^2} = \frac{s^2/n}{\bar{x}^2} = \frac{s^2}{\bar{x}^2 n}$$

$$= \frac{\nu^2}{n}$$

என்று வருகிறது. இதில் வரம்புற்ற பெருக்கியான $(1-f)$ என்பதனையும் சேர்க்க (19·9) சூத்திரம் வருகிறது. இதுபோலவேதான் (19.10), (19.11) சூத்திரங்களும் கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

இந்தச் சூத்திரங்களின் பயனைக் கீழ்க்கண்ட ஒரு சாதாரண ராண்டம் மாதிரியின் அளவைகளைக் கொண்டு விளக்குவோம்:

$N = 1000 \quad n = 100 \quad f = 0.10 \quad 1-f = 0.90$

$\bar{x} = 200 \quad s = 40 \quad \nu = 40/200 = 0.20 \quad \nu^2 = 0.04$

$$\nu^2_{\bar{x}} = \frac{\nu^2}{n}(1-f) = \frac{0.04}{100} \times 0.90 = 0.00036$$

$$\nu_{\bar{x}} = \sqrt{0.00036} = 0.019$$

ஆக மாதிரிச் சராசரியின் மாறுபாட்டுக் கெழு 0.019 அல்லது 1.9 சதவீதமாகிறது. இதைப் பயன்படுத்தி நம்பிக்கை எல்லைகளை அமைப்பதற்கும் முன் கூறப்பட்ட செய்முறைகளையே உபயோகிக்கலாம். ஊக அளவை 0·68 உள்ள நம்பிக்கை அளவைகள் தேவை என்று கொண்டால்: எந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று இந்த மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கபபட்டதோ, அந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியானது [200 − (0.019 × 200) =] 196.20-க்கும் [200 + (0·019 × 200)] = 203.80 டாலர்களுக்கும் இடையே இருக்கும் எனக்

கூறலாம். நாம் அமைக்கும் நம்பிக்கை எல்லைகள் எப்பொழுதும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை உள்ளடக்கி (included) இருக்க வேண்டுமென்றால், மாதிரிச் சராசரியின் இரு பக்கமும் 3ν மதிப்புகளை எடுத்து நம்பிக்கை எல்லைகள் அமைக்கலாம். இதற்கு ஊக அளவு 0.9973 அல்லது 1 என்றே கொள்ளலாம்.

இங்குக் கவனிக்கவேணடியது ஒன்று உள்ளது. (19.8)லும்—ஆகையினாலே (19.9), (19.10) சூத்திரங்களிலும்—வரும் s^2 ஆனது மாதிரியின் மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. இது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் (σ^2) ஒரு தோராயமாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. எனவே, அது எவ்வளவு நெருக்கமாக (close) σ^2-ன், மதிப்பைக் காட்டுமோ அந்த அளவிற்கு ν_x^2, $\nu_{X'_t}^2$ என்ற மதிப்பீடுகள் பிழையின்றி அமையும். s^2-க்கு மாதிரி ஏற்றவிறக்கங்கள் (fluctuations) இருக்கத்தான் செய்யும்; ஆனால், மாதிரி பெரிதாக ஆக, இந்த ஏற்றவிறக்கங்களின் அளவும் குறைந்து வரும். இதேபோல்தான் முழுமைத் தொகுதியின் விகிதத்திற்கு பதில் மாதிரியின் விகிதமான p-ஐப் பயன்படுத்தும்போதும் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரியில் உள்ள 'நபர்'களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுதல்: மேற்கண்ட (19.9), (19.10), (19.11) சூத்திரங்களின் உதவியால் நாம் குறிப்பிட்ட திட்ப அளவைக் கொண்ட மதிப்பீடுகளைப் பெற மாதிரியின் எண்ணிக்கை எவ்வளவாக இருத்தல் வேண்டும் என்று கணக்கிடலாம். இங்கும் நமக்குக் கிடைக்கும் முடிவுகள் தோராயமானவைகளே. முழுமைத் தொகுதி எவ்வகையைச் சார்ந்தது?—நார்மலா (normal), கோட்ட வகையா (skewed) அல்லது தட்டையான வகையா (flattopped) என்பதைப்பற்றி விவரங்கள் கிடைப்பின், அந்தப் பரவல்களிலுள்ள சில பராமீட்டர்களை முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு, அல்லது ஒப்புமை மாறுபாடு அல்லது ஒரு விகிதம் இவை போன்றவை தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்க முடியும். இவைபோன்ற சில விவரங்கள் அதே துறையிலோ, அல்லது சம்பந்தப்பட்ட துறைகளிலோ பிறர் செய்த ஆராய்ச்சிகளிலிருந்து ஓர் ஆய்வாளருக்குக் கிடைக்கக்கூடும். ஒன்றும் கிடைக்காவிடில், ஆய்வாளரே சிறு முன்னணி விசாரணை யொன்றைத் (limited pilot survey) தொடங்கி, பிறகே தான் ஆய்ந்தெடுத்த முழு விசாரணையை மேற்கொள்ள வேண்டி வரலாம். முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கம் 10-12 சதவீதத்திற்குட்பட்ட பிழையுடன் கணக்கிடப் பட்டுவிடுமாயின், ஆய்வாளர் தன் மாதிரியின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட்ட திட்ப அளவைக்குட்பட்ட சராசரியையோ, தொகுதியின் மொத்தத்தையோ மதிப்பிடுமாறு நிர்ணயித்துவிடமுடியும்.

மாதிரியிலிருந்து கணக்கிட்ட சராசரியின் மதிப்பீட்டிற்கும், முழுமைத் தொகுதியின் உண்மை மதிப்பிற்கும் உள்ள ஒப்புமை

வித்தியாசத்தை D என்று அழைப்போம். இதன் மதிப்பை நாம் எந்த அளவிலேனும் வைத்துக்கொள்ளலாம்—5, 10 அல்லது 15 சத வீதம்—பிறகு நம் முடிவுகள் இந்த விகிதத்திற்கும் அப்பால் போகுமானுல் ஏற்படக்கூடிய இன்னல்களைப்பற்றி (risk) முடிவு செய்யலாம். வித்தியாசம் அதிகமாக இருப்பதால் ஏற்படும் விளைவுகள் இடர் நிரம்பியனவாயிருப்பின் D-ன் மதிப்பை மிகக் குறைவாகவே கொள்ள வேண்டும்; பிறகு இந்த வித்தியாசத்தையும் மீறும்படியான ஊக அளவை 1,000-ல் 3 ஆகும் எனக் கூறலாம். இந்த ஊக அளவிற்குத் தக்கவாறு D என்பது $3\nu_{\bar{x}}$ என வரும். அதற்குப் பிறகு இவ்வகைக் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்படுமாறு மாதிரியின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடலாம். மாதிரி பின்னம் 5 சதவீதத்திற்கும் குறைவாகவிருப்பின், தொகுதியை வரம்பற்றதாகவே கருதிவிடுவதால், வரம்புற்ற பெருக்கியைப் பயன்படுத்தவேண்டியதில்லை. அந்த நிலையில் (19.9) சூத்திரம் கீழ்வருமாறு

$$\nu_{\bar{x}}^2 = \frac{\nu^2}{n} \qquad (19.12)$$

அமைந்துவிடுகிறது.

இப்பொழுது, வரம்புற்ற பெருக்கியைப் பயன்படுத்தாத ஓர் எடுத்துக்காட்டை விளக்குவோம். D என்பதை 0.06 என்றும், நம்பிக்கைக் கெழு 0·997 என்றும் கொள்வோம். அதாவது நம் மதிப்பீட்டிற்கும், உண்மை மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் 6 சத வீதத்தைவிட மிகையாகும் நிலைகள் மிகக் குறைவானவையாக இருத்தல்வேண்டும் எனக் கொள்கிறோம். ஆக, $D=3\nu_{\bar{x}}$, அல்லது $\nu_{\bar{x}} = D/3$. பிற ஆய்வாளர்களாலோ, அல்லது முன்னணி விசாரணையினுலோ, நமக்கு ν^2-ன் மதிப்பு 0.16 என்று வந்திருக்கிறது எனக் கொள்வோம். இதுதான் முழுமைத்தொகுதி V^2-ன் மதிப்பீடு. (19.12) என்ற சூத்திரத்தின்படி

$$\frac{D^2}{9} = \frac{\nu^2}{n} \qquad (19.13)$$

இதனின்று

$$n = \frac{9\nu^2}{D^2} \qquad (19.14)$$

$$n = \frac{9 \times 0.16}{0.0036} = 400$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆதலால், மேற்கூறிய திட்ப அளவுகள் இருக்கவேண்டுமாயின் 400 எண்ணிக்கைகொண்ட மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும் என்ருகிறது.

அப்படியின்றி வரம்புற்ற பெருக்கியைப் பயன்படுத்தவேண்டி வந்தால், (19.13) ஆனது

$$\frac{D^2}{9}=\frac{\nu^2}{n}(1-f) \qquad (19.15)$$

என்று மாறும். இதில் $(1-f)$-ற்கு $\frac{N-n}{N}$ என்று வைத்தால்

$$\frac{D^2}{9}=\frac{\nu^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N} \qquad (19.16)$$

என்று வரும். இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$n=\frac{9\nu^2N}{ND^2+9\nu^2} \qquad (19.17)$$

என்ற விடை கிடைக்கும்.

உதாரணமாக 2,000 எண்ணிக்கை 'நபர்'களைக் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து மாதிரியை எடுப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். D, ν^2-ன் மதிப்புகள் சென்ற எடுத்துக்காட்டில் உள்ளவாறே அமையுமாயின்,

$$n=\frac{9\times 2{,}000\times 0.16}{(2{,}000\times 0.0036)+(9\times 0.16)}=\frac{2880}{8.64}$$
$$=333$$

என்ற விடை வரும்.

மேற்கண்ட (19.14), (19.17) சூத்திரங்கள், $D=3\nu_{\bar{x}}$ என்ற நிலைக்குத்தான் பொருந்தும். இந்த வீச்சானது நம் முடிவுகளில் ஏற்படக் கூடும் பிழை, D-ஐவிட அதிகமாகப் போகாது என்று துணிவுடன் கூறுமாறு கொள்ளப்பட்டதாகும். இதைவிடச் சிறிதான வீச்சை எடுத்துக்கொண்டால், வித்தியாசம் D-ஐவிட அதிகமாகக்கூடிய இன்னலும் அதிகமாகும். இது குற்றமில்லை என்றால் மாதிரியின் எண்ணிக்கையும் குறைவாகவே வரும். முதலிற்கூறிய எடுத்துக் காட்டில் (வரம்புற்ற பெருக்கி பயன்படாதபொழுது) ஆய்வாளர் 1,000-ல் 45.5 பங்குள்ள ஊக அளவையை ஒத்துக்கொள்வதாக வைப்போம் [அதாவது D-ன் மதிப்பு முன்போலவே 0.06 ஆக இருக்கும். இதைவிட வித்தியாசம் அதிகமாகக்கூடிய நிலைகளின் ஊக அளவை $\frac{455}{1{,}000}$ ஆகும்; .0455 என்பதுதான் நார்மல் வளைகோட்டுப் பரவலில் சராசரிக்கு இருபுறமும் இரண்டு தரவிலக்கத்திற்கப்பாலுள்ள பரப்பைக் குறிக்கிறது என்பதைக் கவனிக்க. தொடர்புடைய விலக்கத்தின் (deviations) பரவலும், மொத்த (absolute) விலக்கத்தின் பரவலை யொட்டியே (இந்த ஒரு நிலையில்) அமைந்திருக்கும்.] ஆக $\nu^2_{\bar{x}}$-க்கு

$(D/2)^2$ என்பதனை 19.12) சூத்திரத்தில் பொருத்த, (19.14)ஆம் சூத்திரமானது

$$n = \frac{4\nu^2}{D^2} \qquad (19.18)$$

என்றாகிறது. முன்போலவே கணக்கிட $n = 177$ என்று வரும்.

ஒவ்வொரு முறையும் தனித்தனியே போடாமல், பொதுவாக k என்பது மாறுபாட்டுக் கெழுவின் பெருக்கியாக வைத்துக்கொள்ளலாம். நம்பிக்கைக் கெழு 0.997 ஆகுங்கால் $k = 3$ ஆகிறது; அது 0.9545 ஆகுங்கால் $k = 2$ ஆகிறது. இவைகள் நார்மல் பரவலில் குறிப்பிட்ட ஊக அளவைகளுக்குத் தகுந்த பரப்புகளின் மதிப்புகளாகும். வரம்புற்ற பெருக்கியைப் பயன்படுத்தாத நிலையில், n-ஐ மதிப்பிடப் பொதுவாக

$$n = \frac{k^2\nu^2}{D^2} \qquad (19.19)$$

என்ற சூத்திரத்தைக் கையாளலாம்.

மாதிரி பின்னம் 5 சதத்திற்கும் மீறினால், பெருக்கியைப் பயன்படுத்தவேண்டிவரும். அதுகால்

$$n = \frac{k^2 N\nu^2}{ND^2 + k^2\nu^2} \qquad (19.20)$$

என்று சூத்திரம் நிற்கும். ஆதலால் D, k இரண்டும் கூடி மாதிரி முறையில் எதிர்பார்க்கும் திட்பத்தை உறுதியாக நிலைப்படுத்துகின்றன. D என்பது ஒப்புமைப் பிழையின் (relative error) மதிப்பு- இது கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ இருக்கலாம். k என்பது நாம் (ஆராய்ந்த) மாதிரியிலிருந்து தொகுதிக்கு நம் முடிவுகளைப் பொதுவாக்கும்பொழுது D-ஐ விட அதிகமான வித்தியாசம் வரக்கூடிய ஊக அளவையைக் குறிக்கிறது. சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறைகளிலெல்லாம் மேற்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிகள், விகிதங்கள், மொத்தங்கள் முதலியனவற்றிற்கு மதிப்பீடுகள் காணலாம்.

பொதுவாகக் கூறின், நாம் அளவெடுக்கும் மாதிரிகளிலுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை பல நூறுகளுக்குமேல் போகுமானால், சாதாரணமாக முழுமைத் தொகுதியின் இயல்பைப்பற்றி ஒருவித பாவனைகளையும் (assumptions) செய்யவேண்டியதில்லை. ஏனென்றால், மாதிரிப் பரவல்கள், n என்பது அதிகமாக ஆக நார்மல் பரவலைப் போலவே அமைந்துவிடுகின்றன. முழுமைத் தொகுதி மிகுந்த கோட்டம் உடையதாயின் (மிகச் சமச்சீரற்ற நிலையில் இருப்பின்) அதன் மாறுபாட்டை மாதிரியின் மாறுபாட்டினின்று மதிப்பிடும்பொழுது பல சிக்கல்கள் ஏற்படலாம்; அப்பொழுது பல மாதிரிகளில் வரும் மாறுபாடுகள் மிகுந்த வித்தியாசங்களைப் பெற்றிருக்கும். மாதிரியில் உள்ள ஓரிரண்டு பொருள்களுங்கூடத் தொகுதியின்

மாறுபாட்டு மதிப்பீட்டைப் பாதிக்கலாம். ஆதலால், மிகுந்த கோட்ட முள்ள (skewed) நிலைமை இருக்கும் என்ற ஐயப்பாடு இருப்பின், அதற்கென்றே பல முன்னணி விசாரணைகளை நடத்தி, முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையைப்பற்றி தீர்மானமான முடிவைக் காணுதல் வேண்டும். மேற்கூறிய சூத்திரங்களினல் கிடைக்கும் விடையைவிட அதிக எண்ணிக்கைகள் கொண்ட மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதை ஓர் முன்னெச்சரிக்கையாகக் கொள்ளுதல் நல்லது. முழுமைத்தொகுதி மிகுந்த கோட்டம் உடையது என்று முன்கூட்டியே தெரிந்திருப்பின் அடுத்து வரும் படுகை முறைகளின் உதவியால் அக் கோட்டத்தின் அளவைக் குறைத்தல் முடியும்.[4]

ஒரு குறித்த பண்பைப் பெற்றிருக்கும் விகிதத்தை ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மதிப்பிடும்பொழுது, இந்தச் சிக்கலைத் தவிர்க்க முடியும். சாதாரண ராண்டம் முறையில் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, முதல்படி அலகுகளையே மாதிரி அலகுகளாக வைத்துக்கொண்டால், முழுமைத் தொகுதியின் தன்மை விகிதத்தின் மதிப்பீடுகளைப் பாதிப்ப தில்லை என்று கூறலாம்.

ராண்டம் படுகை மாதிரி முறை

படுகை மாதிரி முறையின் நோக்கமும் விளக்கமும்

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் (element) வித்தியாசமில்லாமல் ஒரே வகையாக அமைந்ததாகக் கொண்டு சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறையை விளக்கினேம்; மாதிரியில் இடம் பெறும் பொருள்கள் அந்தத் தொகுதியின் எந்தப் பாகத்திலிருந்தும் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும். சில சமயங்களில், முழுமைத தொகுதியைப் பல பிரிவுகளாக—படுகைகளாகப் (stratas) பிரிக்கக் கூடும்; அப்படிப் பிரித்தல் தேவையாகவும் இருக்கலாம். அதற்குப்பின் அந்தத் தனிப் பிரிவுகளிலிருந்து ராண்டம் முறையைப் பின்பற்றிக் குறித்த எண்ணிக்கையுடைய மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இதனல் தொகுதியின் முழுவதுமே அல்லாமல் தனிப் பிரிவுகளிலும் நம் ஆராய்ச்சிக்குப் பயன்படும். பண்ணைகளைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியில் எல்லாப் பண்ணைகளைப்பற்றியும் ஆராயலாம்; பண்ணைகளைக் கோதுமைப் பண்ணைகள், மாட்டுப் பண்ணைகள் என்று பிரித்து, இரண்டு பிரிவுகளையும் தனித்தனியே ஆராயலாம். அதுபோலவே, துய்ப்போரின் (consumers) வரவு செலவுப் பட்டியல்களை முழுமை யாகவும், நகரமக்கள், கிராம மக்கள் என்று பிரித்தும், அவர்களின் செலவுகள், சேமிப்புகள் அமையும் தோரணிகளை (pattern) ஆராயலாம்.

[4] காக்ரான் என்பவரின் நூலைப் (Cochran, து.நூ.ப.17, 20-28) பார்க்க. அங்கு முழுமைத் தொகுதியின் கோட்டம் மிக்க அதிகமாயிருத்தலினல் ஏற்படும் சிக்கல்களைப்பற்றிய விரிவான கலந்தாய்தலைக் காணலாம்.

இதுபோன்று தனிப் பிரிவுகளிடையே விவரங்கள் வேண்டியிருப்பின் அப்பிரிவுகளை ஆய்வுப் பகுதிகள் (domains of study) எனக் கூறலாம். தனியாகக் கவனம் செலுத்தவேண்டிய பிரிவுகள் இருப்பதுமட்டுமே முழுமைத் தொகுதியை மாதிரி விசாரணைக்காகப் பிரிப்பதற்குக் காரண மாகாது—ஏன் முக்கிய காரணங்கூட ஆகாது. பெரும்பான்மையான முழுமைத் தொகுதிகள் பகுத்தறிவுக் கண்கொண்டு பார்க்குங்கால், தனித்தனிப் பண்புகளைக் கொண்ட பிரிவுகளாக நின்றுவிடுவதால் அவைகளைக் கலப்படமான தொகுதிகள் (heterogeneous)என்றே கூற வேண்டும். இதனுல் ஒவ்வொரு தனிப் பகுதியும் ஒருபடித்தானதாக (homogeneous) அமையும் என்பது தெளிவு. ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட சிறப்புக் கூற்றின் வேறுபாடுகள் கோதுமைப் பண்ணை களில் மாத்திரமே ஆராய்ந்தால் குறைவாகவும், எல்லாப் பண்ணை களையும் ஆராய்ந்தால் அதிகமாகவும் அமைதலைக் காணலாம். செலவுத் திட்டங்களில் தொழிற்சாலைப் பாட்டாளிகளிடையே வேறு பாடுகள் குறைவு; அதே திட்டங்களை எல்லாத் தொழிலாளர்களிடையே யும் ஆராய்ந்தால் வேறுபாடுகள் அதிகமாக இருக்கும் என்பது வெளிப் படை. இதுபோன்ற நிலைகளில்—அதாவது, தொகுதிகளைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்தலால் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள பொருள்கள் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள பொருள்களைவிட ஒரே சீராக அமையும் பொழுது—முழுமைத் தொகுதியைப் படுகைகளாக்குதல் மாதிரி முறையை மேலும் பயன்தரத்தக்கதாகச் செய்யும். குறித்த திட்ப முள்ள மதிப்பீடுகளைச் சிறிய எண்ணிக்கைகொண்ட மாதிரிகளி லிருந்தே பெறமுடியும் ; ஆக, அதற்காகச் செலவும் குறைவாகும். அல்லது அதே எண்ணிக்கையுடைய மாதிரியிலிருந்து இன்னமும் அதிகத் தோராயமான மதிப்பீடுகளைப் படுகை மாதிரி முறையி லிருந்து பெறுதல் சாத்தியமாகிறது. இந்த முறைக்கு 'ராண்டம் படுகை மாதிரி முறை' என்று பெயர்.

இந்த முறையில் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்குமுன்பே முழுமைத் தொகுதியைப் படுகைகளாகப் பிரித்துவிடவேண்டும். இப் படுகைகள் ஒன்றுடொன்று படிந்திராமல் (overlap) தனித்தனியே அமைதல் அவசியம். பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் தனியாகக் குறித்த எண்ணிக்கையுள்ள ராண்டம் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். நமக்கு ஒரு தனித்த படுகையிலுள்ள பொருள்களின்மேல் கவனம் அதிகமிருப்பின் அப் படுகையினின்று எடுக்கப்பட்ட மாதிரியானது படுகையின் பண்புகளைப்பற்றிய மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிட உதவும். இதுபோன்ற சிறு மாதிரிகளெல்லாம் ஒன்றுசேர, முழுமைத் தொகுதியி லிருந்து தேர்ந்தெடுத்த முழு மாதிரி ஒன்று நிலையாகிறது. தனித்த ஒரு படுகையிலிருந்து மதிப்பீடுகளைப் பெற முன்பு கூறப்பட்ட முடிவு களையே (சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை) உபயோகப்படுத்தலாம். பல படுகைகளிலிருந்து கிடைக்கும் மதிப்பீடுகளை ஒன்றுசேர்த்து

முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளின் மதிப்பீடுகளைப் பெறவும் அவைகட்குண்டான மாதிரிப் பிழைகளைக் கணிக்கவும் வேண்டிய பிரச்சினை இப்பொழுது நேர்ந்துள்ளது.

இப் படுகை முறையில் ஒவ்வொரு படுகையிலும் குறித்த பண்பைப் பொறுத்தமட்டில் வேற்றுமை அதிகமில்லை; ஆனால், படுகைகளிடையே வேற்றுமை (அதே பண்பைப் பொறுத்தமட்டில்) அதிகம் என்பதனை நாம் நன்கு மனத்தில் கொள்ளவேண்டும். அதுபோன்ற வேற்றுமையுள்ள பிரிவுகளை அமைக்க முடிந்தால்தான் படுகைமுறை விளைவைத் தரும்; மற்றும் பயனுள்ளதாக அமையும். படுகைகளிடையே வேற்றுமையும், தனிப் படுகையினுள் ஒற்றுமையுமே நாம் விரும்புவன என்று கூறலாம்.

முழுமைத் தொகுதிக்கும் மாதிரிக்கும் உபயோகித்த குறிகளையும் அடையாளங்களையும், ஒட்டுக் குறிகள் அமைப்பதால் படுகைகளுக்கும் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

படுகை மாதிரி முறையில் பங்கீடு (Allocation in Stratified Sampling)

ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டிய மாதிரியின் அளவெண்ணிக்கைகளைத் தீர்மானித்தல் படுகை மாதிரி முறையின் முக்கியப் பிரச்சினையாகும். துணைமாதிரிகளின் (sub-samples) எண்ணிக்கையை நிறுவும் முறைக்குப் பங்கீடு என்று பெயர் தந்துள்ளார்கள். மிக எளிதான பங்கீட்டு முறை, எல்லாத் துணைமாதிரிகளுக்கும் சம எண்ணிக்கை அளித்துவிடுவதே—அதாவது $n_{h1} = n_{h2} = n_{h3} = \ldots\ldots$ இப்படிச் செய்வதால் படுகை அமைத்தலின் பல நற்பயன்களை இழக்கவேண்டியிருக்கும். இதனைவிட மேலான மூன்று பங்கீட்டு முறைகளை விவரிப்போம்.

படுகைகளின் அளவு விகிதத்தில் பங்கீடு (Allocation proportional to sizes of stratas): மாதிரியின் எண்ணிக்கைக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள விகிதத்தை மாதிரி பின்னம்—f—என்று முன்பே கூறியுள்ளோம். சாதாரண ராண்டம் மாதிரிக்கு $f = n/N$. அதேகருத்தைக்கொண்டு ஒவ்வொரு படுகைக்கும் ஒவ்வொரு மாதிரி பின்னத்தை அமைக்கிறோம். ஆக h_1 என்ற படுகைக்கு மாதிரி பின்னம் $f_{h1} = n_{h1}/N_{h1}$; h_2 என்பதற்கு $f_{h2} = n_{h2}/N_{h2}$...இப்படி. இங்கு ஒரே மதிப்புள்ள மாதிரி பின்னத்தை உபயோகித்து ஒவ்வொரு படுகையினின்றும் எந்த எண்ணிக்கை கொண்ட துணைமாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும் என்று கணக்கிடுவோம்; அதாவது $f_{h1} = f_{h2} = f_{h3} = \ldots\ldots\ldots$ இதன் அடிப்படைத் தத்துவம் தெளிவானதே. நாம் வேண்டுவது முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதியான ஒரு மாதிரியை; தொகுதியில் ஒரு படுகை (h_1)

மற்றொரு படுகையை (h_2) விட இருமடங்கு பெரியதாக இருப்பின் (அலகுகளின் எண்ணிக்கையில்) இரண்டாம் படுகையிலிருந்து (h_2) தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கை, முதல் படுகையி னின்று (h_1) வருபவைகளைப்போல் இரட்டிப்பாக இருத்தல்வேண்டு மென்பது நியாயமானதே. அதேபோல் முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டர்களை மதிப்பிடும்பொழுது h_2 படுகையிலிருந்து கிடைக்கும் தகவல்களுக்கு அதிக நிறையும் (weight), h_1 படுகைத் தகவல்களுக் குக் குறைவான நிறையும் அளிக்கவேண்டும். விகிதமுறைப் பங் கிடுதல் இதைத்தான் செய்கிறது. அது தனக்குத் தானே நிறை யிட்டுக்கொள்ளும் முறை (self-weighing procedure). நிறையிடு தலைத் தனியே குறிப்பாகக் காட்டாவிடினும், நம்மை அறியாமலே படுகைகளிலுள்ள எண்ணிக்கையைப்பொறுத்து (N_{h1}, N_{h2}...) நிறைகளைக் கையாளுகிறோம் என்று உறுதியாகக் கூறலாம். 'விகித முறைப் பங்கிடுதல்' என்ற சொற்றொடர் (வேறெந்த விளக்கமோ, தொடரோ இல்லாவிடில்) ஒரே மதிப்புள்ள மாதிரி பின்ன முறை யில் அமைக்கப்பெற்ற பங்கீட்டினையே குறிக்கும்.

படுகைகளின் தரவிலக்க விகிதத்தில் பங்கிடுதல் : சென்ற அதிகாரங்களில் மாதிரிப் பரவல்களைப்பற்றிப் படித்தோம். அப் பொழுது அவைகளினிடையே உள்ள சிதறலளவானது எந்த முழு மைத் தொகுதியிலிருந்து இவைகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவையோ அந்தத் தொகுதியின் சிதறலளவுடன் தொடர்புள்ளது என்பதையும், கூட்டுச் சராசரியின் தரப்பிழை $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N}$ என்பதையும் படித்தோம். இங்கு மாதிரிப் பரவலின் மாறுபாடானது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டுடன் நேர்விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது. ஆதலால், அந்தப் படுகைகளில் நிலவும் சிதறலளவுகளின் மதிப்பைக் கொண்டு பங்கீடு செய்யலாம் என்பது ஒரு நல்ல முறையாகத் திகழ்கிறது. அதிகமான சிதறலுள்ள படுகைகளிலிருந்து பெரிதான துணைமாதிரிகளையும், குறைவான சிதறலுள்ள படுகைகளிலிருந்து சிறியதான துணைமாதிரிகளையும் தேர்ந்தெடுத்தால்தான்—பல படுகைகளிலிருந்து வரும் மதிப்பீடுகளை ஒன்றாக்கிக் குறித்த பிழை யின்மையுள்ள மதிப்பீடுகளைப் பெறுதல் முடியும். சிதறல் சிறி தேனும் இல்லாத தொகுதியிலிருந்து ஒரே ஒரு பொருளை மாதிரியாக எடுத்தாலே போதுமானதன்றோ? இந்தக் கோட்பாடுகளுக்கொப்ப அமைக்கப்பெறும் பங்கீட்டு முறையில், துணைமாதிரியின் எண்ணிக்கை அளவுகள், அந்தந்தப் படுகையின் தரவிலக்கத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் அமையவேண்டியதாகும். அதாவது

$$\frac{n_{h1}}{\sigma_{h1}} = \frac{n_{h2}}{\sigma_{h2}} = \frac{n_{h3}}{\sigma_{h3}} = \ldots$$

இம்மூன்று தரவிலக்கங்களும் முறையே 10, 20, 30 என்றிருப்பின்,

துணைமாதிரிகளின் எண்ணிக்கை 100, 200, 300 என்றிருத்தல் போதுமானது.

இந்த முறைப் பங்கீட்டில், நமக்கு ஒவ்வொரு படுகையின் தரவிலக்கத்தின் மதிப்பும் தெரிந்திருக்கவேண்டியது இன்றியமையாததாகிறது. மக்கட் கணிப்புக் குறிப்புகள் அல்லது மற்ற மூல கணிப்புகள் இந்தத் தகவல்களைத் தரலாம். அப்படி இல்லாவிடில் நன்கு வகுக்கப்பட்ட சிறு முன்னணி விசாரணைகளைக்கொண்டு தரவிலக்கங்களைச் சுமாராக மதிப்பிட முடியும். அந்தத் தோராய முடிவுகளை வைத்துக்கொண்டே பங்கீட்டைச் செய்துவிடலாம்.

படுகைத் தரவிலக்கங்களுக்கு விகிதசமமுறையில் பங்கீடு செய்யும் முறையானது, படுகைகளின் எண்ணிக்கை அளவுகள் (N_{h_1}, N_{h_2}... என்பவை) சமமாகவோ, அல்லது ஏறத்தாழச் சமமாகவோ இருந்தால் தான் திருப்திகரமானதாகும். இந்த விதி பல நிலைகளில் பொருத்தமாகவிராது; எனவே, சமமின்மையால் ஏற்படும் பிரச்சினைகளுக்கு முடிவு காணவில்லை என்றே கூறவேண்டும். ஆதலால் நாம் விரும்பும் முறை இவ்விரண்டில் உள்ள வித்தியாசங்களையும்—N-களில் மற்றும், σ-களில்—கணக்கில் கொண்டு அமைதல் நன்றாகும்.

உத்தமப் பங்கீடு (Optimum allocation) : இந்த முறையானது மேற்கூறிய இரு கொள்கைகளையும் ஒருவாறு ஒன்றுசேர்த்து அமைக்கிறது. சமமான மாதிரி பின்னத்தைப் பயன்படுத்தாமல், மாறும் மாதிரி பின்னத்தைச் (variable sampling fraction) செயற்படுத்தி, அவைகளை அந்தந்தத் தரவிலக்கங்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமைக்கிறோம். அதாவது

$$\frac{f_{h_1}}{\sigma_{h_1}} = \frac{f_{h_2}}{\sigma_{h_2}} = \frac{f_{h_3}}{\sigma_{h_3}} = \ldots$$

இந்தப் பங்கீட்டு முறையால் நிகழ்கின்ற துணைமாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அளவுகள், படுகைகளின் தரவிலக்கம், எண்ணிக்கை இவைகளின் பெருக்கல் பலன்களுக்கு நேர் விகிதமாக அமைதலைக் காணலாம்.[5]

மேற்கண்ட முறையில் அமையும் பெருக்கல் பலன்களில் சரியான நேர் விகிதங்கள் கிடைப்பது கடினமாயிருக்கலாம். முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றிய முழுத் தகவல்கள் கிடைக்காமல் இருக்கக்கூடும். சில தனிப்பட்ட படுகைகளில் ஆராயவேண்டிய பண்புகள் உள்ளதால் ஆய்வாளர் அந்தப் படுகைகளிலிருந்து அதிக எண்ணிக்கை

[5] இந்தத் துறையில் முதன்மையான உயர்தரக் கட்டுரை ஜெர்ஸி நேமன் (Jerzy Neyman) என்பாருடையதாகும். அதன் பெயர் 'On the two different aspects of the representative method'. (து. நூ. ப. 120)-ஐ பார்க்க.

யுடைய துணைமாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க விரும்பலாம். பல நோக்கங்கள் கொண்ட ஒரே ஒரு பெரிய மாதிரி விசாரணை அமைக்கப் பெறும்பொழுது, எல்லா நோக்கங்களுக்கும் பொருந்துமாறு ஒரு துணைமாதிரிகளின் எண்ணிக்கை அடைவு (set) அமைவது மிக்க சிரமமாகும். ஆதலால், நடைமுறையில் படுகைகளின் அளவைகளைக்கொண்டு பங்கீடு செய்யும் முறையே பெரிதும் பயன்பட்டு வருகிறது. இதனால் பின்பு கணிக்கப்படவேண்டிய கணக்கு முறைகள் எளிதாக அமைகின்றன. மாறும் மாதிரி பின்னத்தைப் பயன் படுத்துவதால் இக் கணக்குகள் மிகச் சிக்கலுள்ளனவாகிவிடும். எனினும், படுகைகளின் தரவிலக்கங்களைத் தோராயமாகவேனும் கண்டுபிடிக்கக்கூடுமானாலும், அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று மிகுதியாக வித்தியாசப்படுமானாலும், உத்தமப் பங்கீடு முறையே சிறந்ததும் விரும்பத்தக்கதும் ஆகும். ஆனால், நடைமுறையில் இந்த விதிகளுக்குட்பட்ட சந்தர்ப்பங்கள் மிகக் குறைவு.

திட்ப அளவு மிக அதிகமாக இருக்கவேண்டும் என்ற ஒரே குறிக்கோளை வைத்து மாதிரி பின்னங்களை ஆய்வாளர் கணக்கிட மாட்டார். அதனையும் செலவையும் சேர்த்துப் பார்த்து நடைமுறையில் முடிவு காணவே முயற்சி செய்வார். படுகைக்குப்படுகை செலவினங்கள் வித்தியாசமாக விருப்பின் பிரச்சினை மற்றும் சிக்கல் அடையும்; அப்பொழுது உத்தம மாதிரி முறையாயினும் சரி, அல்லது விகித மாதிரி முறையாயினும் சரி, சற்று மாற்றி அமைக்க வேண்டியிருக்கும். அண்மையில் வெளிவந்துள்ள சில மாதிரித் தேர்வுக் குறிப்புகளில் இதுபோன்ற செலவினங்களையும் சேர்த்து, மாதிரிகளின் எண்ணிக்கைகளை மதிப்பிடுகிறார்கள். காக்ரான் (து.நூ.ப. 17, பக்கம் 75) என்பவர், செலவினங்கள் வெவ்வேறாக இருக்கையில் உத்தம மாதிரிப் பங்கிடுதலைச் செய்வதற்கு ஒரு நடைமுறைச் சூத்திரத்தை (working formula) வெளியிட்டுள்ளார். குறித்த இரண்டு படுகைகளைமாத்திரம் எடுத்துக்கொண்டால், அதிக உள் மாறுபாடு (internal variation) உள்ளதும், செலவினம் குறைவாக இருப்பதும், எண்ணிக்கை அதிகம் கொண்டதுமான படுகைக்குப் பெரிய n_h எண் பொருந்துமாறு இச் சூத்திரம் அமைந்ததாகும்.

படுகை ராண்டம் மாதிரியிலிருந்து மதிப்பீடுகள் (Estimates from a Stratified Random Sample)

மாதிரியின் அளவைகளை எப்படிக் கணக்கிடுவது, பிறகு முழுமைத் தொகுதியின் மொத்தங்கள், சராசரிகள், விகிதங்கள்—இவைகளை எவ்வாறு மதிப்பிடுவது, அதன் பின் அம் மதிப்பீடுகளுக்கு எவ்வாறு திட்ப அளவுகள் அமைப்பது என்பன போன்றவைகளை இந்தப் பிரிவில் கவனிக்கப்போகிறோம்.

மாதிரி ஸ்டாடிஸ்டிக்குகளும் பராமீட்டர்களை மதிப்பிடுதலும்:[6] முதற்கண் மாதிரி பின்னம் எல்லாப் படுகைகளுக்கும் சமமாக இருக்கும் நிலையைக் கவனிப்போம். இதில் சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறையைப்போலவே மாதிரி அளவைகளிலிருந்து தொகுதியின் அளவைகளை—மொத்தம், சராசரி, விகிதம் இவைகளை—மதிப்பிட வேண்டும் (பார்க்க, பக்கம் 382-ம் தொடர்ச்சியும்). $\bar{x}=\frac{\Sigma(\Sigma x_{hi})}{n}$ என்றாகும். இங்கு x_{hi} என்பது h படுகையிலுள்ள பொதுவான ஓர் அலகின் மதிப்பைக் குறிக்கும். வலப்பக்கமிருக்கும் பின்னத்தின் மேல்பகுதியிலுள்ளது மாதிரியின் எல்லா அலகுகளையும் கூட்டினால் கிடைக்கும் Σx-க்குச் சமமாகும்; இதுபோலவே சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறைகளில் கூறிய சூத்திரங்களின் உதவியைக்கொண்டு, சமமான மாதிரி பின்னமுடைய படுகை மாதிரிகளிலிருந்தும் முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடலாம். (இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் பல படுகைகளின் எண்ணிக்கைகளின் N_h-களின் மதிப்புகள் தெரியும் என்றும், அவைகளை மாதிரி பின்னத்தினை அமைக்கப் பயன்படுத்தியுள்ளோம் என்றும் கொண்டுள்ளோம்.) ஒரே மாதிரி பின்ன முறையில் அமைந்த படுகை மாதிரியானது தனக்குத்தானே (சுயமாக) நிறையிட்டுக்கொள்ளும் செய்முறை என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். ஆதலால், படுகைகளுக்குத் தனித்தனியே நிறைகளை அமைக்கவேண்டியதில்லை. பல மாதிரிப் படுகைகளில் உள்ள அலகு விவரங்கள்—முழுமைத் தொகுதியில் அவைகளுக்கு நேரான N_hகளுடன் நேர்விகிதங்களில் உள்ளனவால்—ஒன்று சேர்ந்ததால் கிடைக்கும் மொத்தமானது வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தாமலேயே நிறையிட்டதாகிவிடுகிறது.

மாதிரி பின்னம் படுகைக்குப் படுகை மாறும் சமயம், படுகை மதிப்புகளிலிருந்து மொத்த மதிப்பைத் தொகுக்கவேண்டிவரும். கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களினால் நமக்குத் தேவையான மாதிரி அளவைகளைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரியின் மொத்தம் $= x_t = \Sigma(\Sigma x_{hi}) = \Sigma x$
மாதிரியின் சராசரி $= \bar{x} = x_t/N$
குறித்த பண்பைப் பெற்றுள்ள அலகுகளின்
மொத்தம் (மாதிரியில்) $= u = \Sigma u_h$
மாதிரியின் விகிதம் $= p = u/N$

[6] முன்பு பயன்படுத்திய குறிகளையும் அடையாளங்களையுமே ($\bar{x}$, $\bar{X}'$, p, P' போன்றவைகள்) இங்கு எடுத்துக்கொள்வோம். இடத்தை ஒட்டி அவைகள் சாதாரண ராண்டம் மாதிரிகளுக்கும் படுகை மாதிரிகளுக்கும் பொருந்துமாறு கொள்ளலாம்.

(இங்கு h என்பது ஒரு பொதுப்படைக் குறி; எந்தப் படுகைக்கும் பொருந்தும்)—இவைகளை நாம் முன்பே அறிவோம். '1' குறியுள்ள பெரிய எண்களை முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பீடுகளைக் குறித்து, மாறும் மாதிரி பின்னத்தைப் பொதுவாக f_h என்று குறித்தால், கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்கள் அம் மதிப்பீடுகளைக் கணக்கிடும்:

முழுமைத் தொகுதியின் எண்ணிக்கை அளவு $= X'_t = \Sigma(x_{ht}g_h)$ (19·21)

(இங்கு g_h என்ற பெருக்கி ஒவ்வொரு படுகையிலுமுள்ள மொத்தமான x_{ht}-யுடன் இணைந்த அந்தப் படுகையின் மொத்தத்தை மதிப்பிடுகிறது; பின்பு அம் மொத்தங்கள் ஒன்று சேர்க்கப்பெற்று முழுமைத் தொகுதியின் மொத்த மதிப்பீடு பெறப்படுகிறது.)

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $= \bar{X}' = X'_t/N$ (19·22)

[மற்றொரு சூத்திரம் $\bar{X}' = \Sigma(N_h\bar{x}_h)/N$ என்பதாகும்; ஒவ்வொரு படுகையின் சராசரியும் $(\bar{x}_h)$ அந்தப் படுகையின் மொத்தத்தினுல் (N_h) நிறையிடப்பெற்றுள்ளது. இதுபோன்ற நிறைகளினுல் நமக்கு முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் சார்பற்ற மதிப்பீடு கிடைக்கும்.]

முழுமைத் தொகுதியில் குறித்த பண்பைப் பெற்றுள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை $= U' = \Sigma(u_hg_h)$ (19·23)

[இது (19·21)-ஐப் போன்றது. இங்கு ஒவ்வொரு படுகையிலும் பெருக்கியும், அந்த மாதிரியில் குறித்த பண்பைப் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையுடன் இணைந்து, அந்தப் படுகையிலுள்ளவர்களின் மொத்தத்தை மதிப்பிடுகிறது. இதுபோன்ற மொத்தங்கள் எல்லாப் படுகைகளினின்றும் ஒன்றுசேர்க்கப் பெற்று, முழுமைத் தொகுதியின் U'-ஐ மதிப்பிடுகின்றன.]

முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம் $= P' = U'/N$ (19·24)

[மற்றொரு சூத்திரம் $P' = \dfrac{\Sigma(N_hp_h)}{N}$ என்பதாம்; படுகைகளின் விகிதங்களை, படுகையின் N_h-களைக் கொண்டு நிறையிட்ட சராசரியாகும்.]

முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பீடுகளை இவ்வாறு பெற்றபின் அவைகளுக்கான மாதிரிப் பிழைகளை நாம் கணக்கிடவேண்டும்.

மாதிரிப் பிழைகளின் மதிப்பீடுகள்: முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்பீடுகளைச் செம்மையாக்குதலில் படுகைமுறை தரும் நற்பயனைக் கூறுவோம். ஒரு படுகைமுறையில் தேர்ந்தெடுத்த மாதிரியில் உள்ள மொத்த வேறுபாட்டினை இரு கூருகப் பிரிக்கலாம்—ஒன்று, படுகை

களுக்குள்ளே (within strata) உள்ள வேறுபாடு; மற்றொன்று, படுகைகளிடையே (between strata) உள்ள வேறுபாடு. முதலாவது படுகை சராசரிகளையொட்டி அமையும் வேறுபாட்டைக் குறிக்கும்; இரண்டாவது படுகை சராசரிகளுக்கும் மொத்தச் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள மாறுபாட்டைக் குறிக்கும். படுகைகளாகப் பிரித்ததனுலேதான் இரண்டாம் வேறுபாடு கிடைக்கிறது; இது படுகைகளினிடையே உள்ள வேறுபாடு. ஆதலால், இதுமாதிரி முடிவுகளை முழுமைத் தொகுதி முழுவதுக்கும், பொதுமையாக்குவதற்கான மாதிரிப் பிழைகளைக் கணக்கிட உதவாது. ஆக, எல்லா அலகுகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளைக் கவனிக்கும்பொழுது, சராசரியின் மாதிரிப் பிழையானது படுகைகளுக்குள் உள்ள வேறுபாடுகளைக் கொண்டுதான் கணக்கிடப்பெறவேண்டும் என்று ஆகிறது. (சாதாரண ராண்டம் முறைக்கும் இதற்கும் உள்ள வேற்றுமையைக் கவனிக்க. அம் முறையில் மாதிரியின் எல்லா அலகுகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளை ஒட்டித்தான் சராசரியின் மாதிரிப் பிழை அளவுகள் அமைக்கப்படுகின்றன.) படுகைகளினிடையே உள்ள வேறுபாடு மொத்த மாதிரியில் உள்ள வேறுபாட்டைவிட மிகக் குறைந்திருப்பின், படுகையாக்குதலால் மாதிரிப் பிழையின் அளவைகள் சிறிதாகிவிடுகின்றன; அப்பொழுது நம் மதிப்பீடுகளின் திட்பமும் அதிகமாகிறது. இதை மனத்தில்கொண்டு படுகைகளை ஒன்ருெடொன்று அதிக மாறுபாடுடையனவாக—அதாவது படுகைச் சராசரிகளிடையே அதிக வேற்றுமை இருக்குமாறு அமைக்க ஆய்வாளர் முயல்வார். ஒவ்வொரு படுகையும் முடிந்த அளவு ஒரே சீராக (homogeneous) இருத்தல் நலம்.

இதனை விளக்க ஓர் எளிதான உதாரணத்தைத் தருவோம். மாதிரி பின்னம் சமமாகவும் மிகச் சிறிதாகவும் (5 சதவீதத்திற்கும் கீழ்) இருப்பதால், வரம்புற்ற பெருக்கியை நீக்கிவிடலாம். இங்கும்—பிறகும்—n_h-களும், n-களும் பெரிய எண்கள் என்றும் கொள்கிருேம். மற்றும் ஒவ்வொரு படுகையிலும் உள்ள வேறுபாடு சமமாக இருக்கும் என்போம். இந்தக் கருத்தானது விகிதமுறைப் பங்கீட்டிற்குப் பொருந்தும் (ஒரேமாதிரி பின்னமுள்ள நிலை); உத்தமப் பங்கீட்டு முறைக்குப் பொருந்தாதென்றே சொல்லவேண்டும்.

இப்பொழுது ஒரு தனிப் படுகையின் மாறுபாட்டை s_h^2 என்று குறித்தால்

$$s_h^2 = \frac{\Sigma(x_{hi} - \bar{x}_h)^2}{n_h - 1} \qquad (19{\cdot}25)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து s_h^2-ஐக் கணக்கிடலாம். இவைகளை முறையே அந்தப் படுகைகளின் எண்ணிக்கை—n_h-களைக்கொண்டு

நிறையிட்டு ஒரு சராசரியைக் கணக்கிட்டால் அது இந்தப் பொதுவான படுகை மாறுபாட்டின் ஒரு மதிப்பீடாகும்.

அதாவது $$s_w^2 = \frac{\Sigma(n_h s_h^2)}{n} \qquad (19{\cdot}26)$$

இப்பொழுது நாம் படுகை மாதிரியின் மாறுபாட்டைக் கணிக்க

$$s_x^2 = \frac{s_w^2}{n} \qquad (19{\cdot}27)$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். இந்தச் சூத்திரம் நமக்குப் பழக்கப்பட்ட ஒன்றுதான்—கூட்டுச் சராசரியின் தரவிலக்கத்தின் வர்க்கமாகும்; இங்கு மாதிரியிலுள்ள மாறுபாட்டிற்குப் பதிலாகப் படுகைகளினிடையே உள்ள மாறுபாடு வந்துள்ளது.

மாதிரி பின்னம் பெரிதாக இருப்பின், வரம்புற்ற பெருக்கியான f-ஐயும் உபயோகிக்கவேண்டும். (19.27) என்பது அப்பொழுது

$$s_x^2 = \frac{s_w^2}{n}(1-f) \qquad (19{\cdot}28)$$

என்று மாறும்.

மாதிரி பின்னங்கள் ஒவ்வொரு படுகைக்கும் வெவ்வேருகவும், ஆனால், எல்லா பின்னங்களுமே சிறிதாக இருப்பின் (வரம்புற்ற பெருக்கியை நீக்கி)

$$s_x^2 = \frac{1}{N^2}\Sigma\left(\frac{N_h^2 s_h^2}{n_h}\right) \qquad (19{\cdot}29)$$

என்றும் வரும்.

முடிவாக, வரம்புற்ற பெருக்கிகளையும் பயன்படுத்துவோம். அப்பொழுது, ஒரு தனிப் படுகையின் சராசரியின் மாறுபாடு $s_{x_h}^2$ ஆகும். அதற்குச் சூத்திரம்

$$s_{x_h}^2 = \frac{s^2}{n_h}(1-f_h) \qquad (19{\cdot}30)$$

இங்கு f_h என்பது அந்தப் படுகையின் மாதிரி பின்னமாகும். ஒவ்வொரு படுகையிலும் ராண்டம் முறைகளைப் பின்பற்றியிருந்தும், படுகைக்குப் படுகை உள்ள செய்முறைகள் தனித்தும் (independent) இருந்தால், கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தினால் படுகை மாதிரிச் சராசரியின் மாறுபாட்டைக் கணக்கிடலாம். இதுவும் ஒரு நிறையிட்ட சராசரி தான்.

$$s_x^2 = \frac{\Sigma(N_h^2 s_{x_h}^2)}{N^2} \qquad (19{\cdot}31)$$

இந்த விதிகளிரண்டும் நாம்விவரித்துள்ள செய்முறைகளில் பொருத்த மாக உள்ளதைக் கவனிக்க. இங்கு N என்பது முழுமைத் தொகுதியி லுள்ள மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை; N_h என்பது முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு படுகையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை. இங்கும் (19·27) சூத்திரத்தில் உள்ளதுபோல், சராசரியின் மாறுபா டானது படுகைகளுக்குள்ளே இருக்கும் வேறுபாடுகளைச் சார்ந்த தாகவே உள்ளதைக் கவனிக்க. (19·31)-ல் மாறுபாட்டைக் குறிக்கும் உறுப்பு $s^2_{x_h}$ ஒன்றுதான்; இதன் மதிப்பு படுகைகளுக்குள்ளே இருக்கும் வேறுபாட்டைத்தான் குறிக்கிறது. [பார்க்க : (19·25), (19·30)]

அதிக விளக்கங்கள் இல்லாமல் படுகைமுறையில் மற்ற மாதிரி அளவைகளின் மாறுபாடுகளைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரங்களைக் கீழே தருவோம்.[7] இங்கும் n_h-களும், n-ம் பெரிதாக உள்ளன என்றும், மாதிரியின் மாறுபாடுகளும் விகிதங்களும் தொகுதியி னுடைய மாறுபாடுகளையும் விகிதங்களையும் மதிப்பிடுகின்றன என் றும் கொள்வோம். இந்தக் கருதுகோள்கள் இங்குக் கொடுக்கப் பட்டுள்ள எல்லா அளவைகளுக்குமே பொருந்தும்.

ஒரேமாதிரி பின்னம், வரம்புற்ற பெருக்கியை நீக்கி :

மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_{X_t'} = \frac{N^2 s^2_w}{n} \quad (19.32)$$

இங்கு s^2_w என்பதை (19.26)ஆம் சூத்திரத்தின்படி கணக்கிட வேண்டும் (மொத்தத்தின் மாறுபாடு; சராசரியின் மாறுபாட்டைப் போல் N^2 தரம் இருக்கும் என்பதனை நாம் முன்பே கவனித்துள் ளோம்).

விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_p = \frac{\Sigma(N_h p_h q_h)}{Nn} \quad (19.33)$$

ஒரேமாதிரி பின்னம்; வரம்புற்ற பெருக்கியுடன் ;

மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_{X_t'} = \frac{N^2 s^2_w}{n}(1-f) \quad (19.34)$$

விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_p = \frac{\Sigma(N_h p_h q_h)}{Nn}(1-f) \quad (19·35)$$

[7] தேற்றங்களுக்கும் எடுத்துக்காட்டுகளுக்கும்—காக்ரான் (து. நா. ப. 1), டெமிங் (து. நா. ப. 29), ஹான்சன், ஹர்விட்ஸ், மெடோ (து. நா. ப. 67), யேட்ஸ் (து. நா. ப. 197) என்ற நூல்களைக் கவனிக்கலாம்.

மாறும் மாதிரி பின்னம் ; வரம்புற்ற பெருக்கியை நீக்கி ;

மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_{X'_t} = \Sigma\left(\frac{N_h^2 s_h^2}{n_h}\right) \qquad (19.36)$$

இங்கு s_h^2 ஆனது (19.25)ஆம் சூத்திரத்தின்படி கணிக்கப்படும்.

விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s_p^2 = \frac{1}{N^2} \Sigma\left\{\frac{N_h^3}{(N_h-1)} \cdot \frac{p_h q_h}{n_h}\right\} \qquad (19\cdot37)$$

மாறும் மாதிரி பின்னம் ; வரம்புற்ற பெருக்கியுடன் ;

மொத்தத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s^2_{X'_t} = \Sigma\left\{\frac{N_h^2 s_h^2}{n_h}(1-f_h)\right\} \qquad (19.38)$$

இதை $s^2_{X'_t} = \Sigma(N_h^2 s^2_{x_h})$ என்றும் கூறலாம். (19.39)

[$s^2_{x_h}$ என்பதை (19.30)ஆம் சூத்திரத்தைக் கொண்டு கணக்கிட வேண்டும்.]

விகிதத்தின் மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு :

$$s_p^2 = \frac{1}{N^2} \Sigma\left\{\frac{N_h^2(N_h-n_h)}{(N_h-1)} \cdot \frac{p_h q_h}{n_h}\right\} \qquad (19.40)$$

சாதாரணமாக $\frac{1}{N_h}$ என்பது மிகச் சிறியதாக இருக்கும் ; ஆதலால் அதனை நீக்கி 'காக்ரான்' தந்துள்ள எளிய சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.

$$s_p^2 = \frac{1}{N^2} \Sigma\left\{N_h(N_h-n_h)\frac{p_h q_h}{n_h}\right\} \qquad (19.41)$$

சாதாரண ராண்டம் முறையில் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க முறைகளை விளக்குங்கால், மாதிரியின் எண்ணிக்கை அளவுகளை எவ்வாறு மதிப்பிடலாம் என்ற பிரச்சினையை நாம் முன்பே ஆராய்ந்துள்ளோம். அங்கு நாம் மாதிரியின் எண்ணிக்கையையும் திட்ப அளவையையும் மாத்திரமே கவனித்தோம் எனினும், மாதிரியிலுள்ள உறுப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்க ஆகும் செலவினங்களையும் கவனிக்கவேண்டும் என்பதையும் கூறியுள்ளோம். படுகை மாதிரி முறைகளில் மாதிரியின் எண்ணிக்கை அளவுகளைக் கணக்கிடுதல் மிகுந்த சிரமமான காரியமாகிறது. இங்கு நாம் மனத்தில்

கொள்ளவேண்டியவைகள்—படுகை அமைக்கும் முறை, பங்கீட்டு முறை (விகித முறையா, உத்தம முறையா), மாதிரியின் அலகின் தன்மை (nature of sampling unit), நாம் பயன்படுத்த நினைக்கும் நம்பிக்கை அளவுகளையும், இவைகளுடன் மொத்தச் செலவு, தனிச் செலவு முதலானவைகள் எவ்வாறு கள விசாரணையில் அமையும் என்பதனையும், விசாரணைக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள திட்டப் பணத்தையும் கவனிக்கவேண்டும். இதுபோன்ற செய்ம்முறைத் திட்டங்கள் வகுத்து முறைப்படுத்துவதில்தான் தற்கால விசாரணை ஆய்வாளர்கள் ஊக்கத்துடன் பாடுபடுகிறுர்கள். இந்த விவரங்களுக்குப் பல உயர்தரமானவையும் அடிப்படையானவையுமான புத்தகங்கள் உள்ளன. அவைகளைப் படித்துப் பயனடையலாம்.[8]

மற்றும் சில மாதிரி அமைப்புகள்

இதுவரை விளக்கப்பட்ட முறைகள் அடிப்படையானவையாகும். ஆனால், நடைமுறையில் இவைகளைப் பல வழிகளில் மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளவேண்டிய நிலைகள் ஏற்படும். குறித்த சில விசாரணைகளில் செலவினங்களையும், திட்ப அளவைகளையும் கருதுவதால் மாறுதல்கள் நேரும். மாறுதல் அடைந்த, முக்கியமான இரண்டு முறைகள்—பலகட்ட மாதிரி முறையும் (multi-stage sampling), பல தோற்ற மாதிரி முறையுமே (mulit-phase sampling). சாதாரணமாக இவைகள், இரு கட்ட அல்லது இரு தோற்ற முறைகளாகவே அமையும்.

பலகட்ட மாதிரி முறை

இதற்குக் கொத்து மாதிரிமுறை (cluster sampling) என்ற மற்றொரு பெயரும் உண்டு; இந்தப் பெயர் அதன் தன்மையை

[8] சிறிது காலத்திற்கு முன்பு இம் முறைகளைப்பற்றிய விவரங்களைப் பெரிதும் ஆராய்ச்சிக் குறிப்புகளிலும், விஞ்ஞானப் பத்திரிகைகளில் வெளிவரும் ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளிலும் தேடவேண்டியிருந்தது. சென்ற சில ஆண்டுகளாக உயர்தரமான பல புத்தகங்கள் வெளிவந்துள்ளன. 1953-ல் இரண்டு புத்தகங்கள் பெரிதும் உதவின. அவைகள்—காக்ரான் (து.நா.ப. 17), மற்றும் ஹான்சன், ஹர்விட்ஸ், யேட்ஸ் (து.நா.ப. 67)—இவர்களின் நூல்கள் முன்பே வெளிவந்துள்ள டெமிங் (து.நா.ப. 29), யேட்ஸ் (து.நா.ப. 197) இவர்களின் நூல்களுடன், இவைகளையும் கூர்ந்து படித்தால் மாதிரி விசாரணைகளைத் திட்டமிட்டு நடத்துங்கால் ஏற்படும் இடர்களையும், அவைகளைத் தவிர்க்கும் முறைகளையும் நன்கு அறியலாம். மற்றும் இரு புத்தகங்களும் காணத்தக்கவைகளே—(1) மனிதர்களிடையே எவ்வாறு மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்பதனைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியும் விவாதங்களும்; நேமனனின் (து.நா.ப. 119) 'Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability (இரண்டாம் பதிப்பு 1952) என்ற நூலின் இரண்டாம் அதிகாரத்தில் உள்ளன. (2) பி. வி. ஸுகாத்மே (P. V. Sukhatme) என்பவரின் 'Sampling Theory of Surveys' (து.நா.ப. 155) என்ற நூல். விவசாயத் துறையிலிருந்து பல எடுத்துக்காட்டுகள் இதில் உள்ளன.

உணர்த்துவதுபோல் அமைந்துள்ளது. துவக்கநிலை அலகுகளை (elementary units)—நாம் எவைகளை ஆராய்கிறோமோ அவைகள்—பற்றி முன்பே கூறியுள்ளோம். இவைகள் பண்ணைகளாகவோ, குடும்பங்களாகவோ, தனி மனிதர்களாகவோ, கார்ப்பரேஷன்களாகவோ (corporations), ஊர்களாகவோ இருக்கலாம். எதுவாயினும் சரி, இவைகளே நம் ஆராய்ச்சிக்கு நேராகப் பயன்படும். இவற்றை இன்னும் சிறியதாக நாம் பகுக்கப்போகிறதில்லை. துவக்கநிலை அலகுகள் பலவற்றைக்கொண்ட ஒரு கொத்தாக, மாதிரி முறையின் அலகானது அமையலாம்; இது, முறையின் முதல் கட்டத்திலோ அல்லது பிற்பாடு வரும் கட்டங்களில் ஏதாவ தொன்றிலோ நிகழலாம். அப்படியாயின், அத்தகைய கொத்தைப் பிறகு நாம் ஆராய்ந்துவரும் பண்புகள் உள்ள அலகுகளாகப் பிரிவாக்கலாம். எந்த முறையில் இதுபோன்று மாதிரி அலகுகளைக் (sampling units) கொண்ட கொத்துகள் பயன்படுகின்றனவோ, அது கொத்து மாதிரி முறை என்றழைக்கப்படும்.

எனவே, முதற்படி மாதிரி அலகானது (சுருக்கமாக முமாஅ) (primary sampling unit) ஒரு துவக்கநிலை அலகாக இருக்கலாம்; அல்லது அவைகளின் ஒரு கொத்தாகவும் இருக்கலாம். அது கொத்தாக இருப்பின், மற்றும் அதைத் திருப்பிச் செய்யலாம்: அதாவது, பலகட்டங்களில் கொத்து முறையைப் பின்பற்றி நம் மாதிரி முறையை வகுக்கலாம். ஓர் எடுத்துக்காட்டு இந்தப் பல கட்டமுறையை விளக்கும். ஐக்கிய நாடுகள் வெளியிட்ட மாதிரி விசாரணைகளைப்பற்றிய அறிக்கையிலுள்ளது இந்த உதாரணம். பண்ணைகளைப்பற்றிய சில பண்புகளை ஆராயவேண்டியிருக்கிறது. அதற்கு முதற்கண் நாட்டைப் பல மாவட்டங்களாகப் பிரிக்கலாம்; ஆதலால், மாவட்டம் இந்த விசாரணையில் முதற்படி மாதிரி அலகு (முமாஅ) ஆகிறது. முதற்படியில் அல்லது கட்டத்தில் நாம் சில மாவட்டங்களை மட்டும் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்கிறோம். இரண்டாம் கட்டத்திற்கு மாவட்டங்களைக் கிராமங்களாகப் பிரிக்கலாம். இப்பொழுது கிராமங்கள் இரண்டாம் கட்ட மாதிரிகள் ஆகின்றன. மூன்றாவதாக, கிராமங்களைப் பண்ணைகளாகப் பிரித்து, சில பண்ணைகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, நம் ஆராய்ச்சியைப் பண்ணைகளில் தொடங்கலாம். இங்கு மூன்றுகட்ட மாதிரி முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெளிவு.

மாதிரி முறை முதற்படியிலேயே நின்றுவிட்டால்—அதாவது முதற்படி மாதிரி அலகுகளே நம் ஆராய்ச்சிக்குட்பட்ட துவக்கநிலை அலகுகளாகுமாயின்—அது 'ஒருகட்ட கொத்துமுறை' அல்லது 'ஒரு கட்ட மாதிரி முறை' (single-stage cluster-sampling) என்று அழைக்கப்பெறும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் நாம் அந்த மாவட்டங்களி

லுள்ள எல்லாப் பண்ணைகளையுமே ஆராய்ந்துவிட முடிவு செய்தால் இந்த நிலை ஏற்படும். அப்படியில்லாமல் நாம் மாதிரி முறையை இரண்டாம் படியில் நிறுத்தி அந்த நிலையிலுள்ள துவக்கநிலை அலகுகளை ஆராய்ந்தால், அது 'இருகட்ட' மாதிரி முறையாகிறது. நாம் மாவட்டங்களைப் பிரித்து அவைகளினின்று சில கிராமங்களை மாதிரியாக எடுத்து, அவைகளிலுள்ள எல்லாப் பண்ணைகளையும் ஆராய்ந்தோமானால், இந்தப் பெயர் பொருந்தும். கிராமங்களைப் பண்ணைகளாகப் பிரித்து, அவைகளில் சிலவற்றை மாதிரியாக எடுக்கும்பொழுது மூன்று கட்ட மாதிரி முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

ஒவ்வொரு கட்டத்திலும், நாம் சாதாரண ராண்டம் முறையையோ; படுகை முறையையோ கையாண்டு மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். முதலாவதாயின், அதைச் சாதாரணக் கொத்து முறையென்றும், இரண்டாம் வழியாயின், படுகைக் கொத்துமுறையென்றும் அழைக்கிறோம்; இது ஒருகட்டமாகவோ, இருகட்டமாகவோ இருக்கலாம்.

பொதுவாக, இந்த முறையில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் மாதிரி அலகுகளை அமைப்பதுதான் மிகவும் சிந்தித்துச் செய்யவேண்டியதாகும். அந்த அலகுகளின் நோக்கம் (scope) அவைகளின் உள் அமைப்புகள் (internal structures), அவைகளின் அளவின், மற்றும் பண்பின் (quantitative and qualitative) விவரங்கள் முதலானவற்றைக் கூர்ந்து கவனித்தல் மிக அவசியமாகும். இறுதியாக நாம் மனத்தில் கொள்ளவேண்டியவைகள்—நாம் அமைக்கும் மதிப்பீடுகளின் திட்டமும், மாதிரி முறையை வகுக்க ஏற்படும் செலவினங்களுமே. இவைகளை வைத்துக்கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் அமைப்பு நிலப்பரப்பில் எவ்வளவை நாம் ஆராயப்போகிறோம் என்பது. அந்தத் தொகுதியைப்பற்றி நாம் அறிந்துள்ளவைகள், எவ்வளவு கட்டங்கள்வரை மாதிரி முறையைக் கொண்டுபோகவேண்டும் என்பது, படுகை முறை பயனுடையதா என்பது—இவை எல்லாவற்றையும் நன்கு கவனித்து முடிவு காணவேண்டும். மாதிரி விசாரணைபற்றியே எழுதப்பட்டுள்ள தனி நூல்களில் (treaties) இந்தப் பிரச்சினைகள் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பிரச்சினைகள் செய்முறையில்மாத்திரம் கவனிக்கவேண்டியவையல்ல. விசாரணையின் முடிவுகளையும் மதிப்பீடுகளையும் சீர்தூக்கிப் பார்க்கவும் இந்த விவரங்கள் தேவைப்படும் என்பதனை இங்கு வலியுறுத்திக் கூறவேண்டும்.

பரப்பு மாதிரி முறை (Area sampling): இது, நிலப்பரப்பின் அமைப்பைச் சார்ந்தவாறு அமையும் கொத்து மாதிரி முறையாகும். இது அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுவது. ஆராயவேண்டிய முழுமைத் தொகுதி மக்களையே பற்றி இருக்கவேண்டியதில்லை—பிராணிகளின்

தொகுதி, மரங்களின் தொகுதி, வீடுகளின் தொகுதி—இவ்வாறுகவும் இருக்கலாம். ஆனால், இந்த முறையில் மக்களைப்பற்றிய ஆராய்ச்சியே பெருவாரியாக அமையும். இதில் வரும் ஒவ்வோர் அலகும் தனித்த ஒரு பரப்பினுடன் இணைந்திருக்கவேண்டும். மனிதனுக்கு, அவன் வாழும் வீடு அப்படி இணைந்த ஒன்று. ஆதலால், ஆய்வாளர் முதலில் அப் பரப்புகளைக் கொண்ட பட்டியலிலிருந்து தொடங்குவார். ராண்டம் முறையில் முதலில் நிலப்பரப்புகளில் சிலவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பார். தேவை இருப்பின் துணைமாதிரிகளையும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஏதாவதொரு கட்டத்தில் அந்தப் பரப்பிலுள்ள துவக்கநிலை அலகுகளைத் தனித்தனியாகக் கணக்கிட்டு அவைகளில் சிலவற்றைப் பேட்டி காணுதலினாலோ அல்லது வெறெந்த முறையினாலோ ஆராயலாம். அல்லது இந்தக் கட்டத்திலும் மாதிரியை அமைத்தும் ஆராய்ச்சியைத் துவங்கலாம். இந்த முறைகளில் எல்லாக் கட்டங்களிலும் ராண்டம் முறையையே பின்பற்றி இருந்தால், ஊக அளவை மாதிரி முறை விதிகளைக்கொண்டு, நாம் கணக்கிடும் மதிப்பீடுகளை ஊக அளவை வழிகளில் பெறமுடியும்.

இந்த முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா அலகுகளையும் கொண்ட ஒரு தனிப் பட்டியல் தேவையில்லை என்பது ஒரு முக்கியச் சிறப்பாகும். முதற்கண் நாம் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் நிலப் பரப்புகளிலுள்ள அலகுகளைப்பற்றிய பட்டியல் மாத்திரமே நமக்குத் தேவை. ஊக அளவை மாதிரி முறையின் முக்கிய விதி—முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் அலகிற்கும் அது மாதிரியில் தேர்ந்து இடம்பெற உண்டான ஊக அளவைத் திட்டவட்டமாக எடுத்துக்கூற இயலவேண்டும் என்ற விதி—இங்கும் நிறைவேறுகிறது. ஆதலால், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா அலகுகளையும் கொண்ட பட்டியல் கிடைக்காவிடில் இந்தக் கொத்து மாதிரி முறையைப் பின்பற்றலாம்; அப்படியான பட்டியல் ஒன்று இருக்கும் போதுகூட இந்த முறையைக் கையாண்டால் செலவு குறைவாகும். பரப்பு மாதிரியிலுள்ள செய்ம்முறைகளைப்பற்றிய முழு விவரங்களை இதே அதிகாரத்தின் பிற்பகுதியில் காணலாம்.

பலதோற்ற மாதிரி முறை (Multi-phase Sampling)

பலகட்ட மாதிரி முறையில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் வெவ்வேறு வகையான மாதிரி அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதாக அச் செய்ம்முறை அமைந்துள்ளதைக் கண்டோம். பல தோற்ற மாதிரி முறையிலோ ஒரே வகையான மாதிரி அலகுகளைத்தான் ஆய்வின் பல தோற்றங்களிலும் தேர்ந்தெடுப்போம். குறிப்பாகக் கூறவேண்டுமானால்—முதல் தோற்றத்தில் ஒரு முழு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்போம்; அதன் அலகுகளின் சில பண்புகளை ஆராய்வோம். பிறகு இரண்டாம் தோற்றத்தில் அந்த முழு மாதிரியிலிருந்து ஒரு துணை

மாதிரியை (sub-sample) எடுத்து அதன் அலகுகளில் மற்றும் சில பண்புகளை ஆராய்வோம். 10,000 குடும்பங்களின் வருமானத்தைப் பற்றிய விவரங்களைமட்டுமே தொகுக்கிறோம் எனக் கொள்வோம்; அந்தக் குடும்பங்களில் 1,000 குடும்பங்களைத் துணைமாதிரியாக எடுத்து அவைகளின் வருமானத்தையே அல்லாமல் மற்றும் வருமானம் பெற்ற வழிகள், அதனைச் செலவாக்கிய விவரங்கள் முதலியனவற்றைத் திரட்டினால் அது இரு தோற்ற மாதிரி முறை— அல்லது இரு மாதிரி முறை (double sampling) ஆகிறது. இரண்டாம் தோற்ற விவரங்களை, முதல் தோற்ற விவரங்களைத் திரட்டும் பொழுதும் திரட்டலாம்; அல்லது பிறகு தனியாகவும் திரட்டலாம். இம் மாதிரியான தோற்றங்கள் வெவ்வேறு காலங்களில் திரட்டப் பட்டவைகளாக அமைதலும் உண்டு. முதல் தோற்றத்தில் ஒரு விரிவான மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்து அதன் அலகுகளிலிருந்து வேண்டிய விவரங்களைச் சேர்க்கலாம். விவரங்கள் அதிகமாக இல்லாமையினால் இந்தத் தோற்றம் குறைந்த செலவில் அமைந்து விடும். பிறகு இதனின்று கிடைத்த முடிவுகளையும் வைத்து, இந்த மாதிரியிலிருந்து சிறிய அளவுடைய துணைமாதிரியைத் தேர்ந் தெடுத்து அதனின்று முதல் தோற்றத்தில் கவனித்த விவரங்களையே மற்றும் கூர்ந்து ஆராயலாம். (இரண்டாம் தோற்ற மாதிரி அனேக மாக முதல் தோற்றத்தின் உட்பிரிவாக இருக்கும்; ஆனால், இது போலவேதான் இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை.) சில சமயங்களில் முக்கிய நோக்கமான மாறியைப்பற்றிய தகவல்களை இரண்டாம் தோற்றத்திலேதான் திரட்டுவோம். முதல் தோற்றத்தில் அந்த மாறியுடன் தொடர்புடைய மற்றொரு மாறியை அமைத்துக்கொண்டு அதன் விவரங்களைத் திரட்டி, அந்த ஆராய்ச்சியைப் பயன்படுத்தி இரண்டாம் தோற்றத்திற்கு வேண்டிய படுகைகளை அமைத்துக் கொண்டு, அதற்குப் பின் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறித்த மாறியின் பண்பின ஆராய்ச்சிகளை நடத்துவதும் உண்டு.

ஒழுங்கு மாதிரி முறை (Systematic Sampling)

முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பினர்களை ஒழுங்காக வரிசைப் படுத்த முடியுமானாலும், அல்லது அதுபோன்று ஒழுங்கு செய்யப் பட்ட பட்டியல்கள் கிடைக்குமானாலும், எளிதான செய்முறையைக் கொண்டதான ஒரு மாதிரி முறையை அமைக்கலாம். இவ்வகை யான ஒழுங்கு 1, 2, 3,...... என்ற வரிசையில் அமைந்திருக்க வேண்டும். தொலைபேசி அட்டவணையில் (Telephone Directory) பெயர்கள் ஒழுங்காக அமைந்துள்ளன; அதுபோலவேதான் ஓர் ஊரில் உள்ள பகுதிகளும் (Blocks) சர்க்காரிடம் உள்ள வருமானவரி விவரத் தாக்கல்களும் (Incometax Returns). தொகுதியில் பத்தில் ஒரு பங்கை மாதிரியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடிவு செய்கிறோம் என்

ருல்—தொகுதிப் பட்டியலிலிருந்து பத்துப் பெயர்களில் (அலகுகளில்) ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்தால் போதும் ; முதல் பெயர் என்னவென்பதை ராண்டம் முறையில் கணித்தல் அவசியம். முதலில் 4ஆம் பெயரை அல்லது அலகைத் தேர்ந்தெடுத்தோம் என்ருல், பிறகு 14ஆவது, 24ஆவது 34ஆவது...இப்படி, அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்—அவ்வளவுதான். பொதுவாகக்கூறின்—தொகுதியின் $\frac{1}{k}$ பங்கு மாதிரியாளுல், 1-லிருந்து k வரையுள்ள எண்களில் ஓர் எண்ணை ராண்டம் முறையாகத் தேர்ந்தெடுத்து, பிறகு அதே ஒழுங்கில் k-எண்களுக்கொருமுறை வரும் அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதுதான் இந்த முறை. இதற்கு ஒழுங்கு மாதிரி முறை என்று பெயர்.

இந்த முறையில் கிடைக்கும் மாதிரியானது முழுமைத் தொகுதியின் அமைப்பைப் (structure) பொறுத்து இருக்கும். ஒழுங்கு மாதிரியானது, ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒவ்வோர் அலகைத் தேர்ந்தெடுத்தாற்போல் அமையும் படுகை மாதிரியைத் தருகிறது என்றும் கூறலாம். முழுமைத் தொகுதியில் அலகுகளை ஒழுங்காக அமைத்த முறையானது ராண்டமாக இருப்பின் நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் மாதிரியும் சாதாரண ராண்டம் மாதிரியாகவிருக்கும். அதுகால் அமையும் படுகைகளும் ஒன்றைப்போலவே மற்ருென்றும் இருக்கும். ஆதலால், ஒழுங்கு மாதிரி முறையில் கிடைக்கும் தரப் பிழை அளவுகள் தோராயமாக, சாதாரண ராண்டம் முறையில் கிடைக்கும் பிழைகளுக்குச் சமமாகும். ஆளுல், தொகுதியின் அமைப்பு ராண்டம் முறையில் இல்லாவிட்டால், ஒழுங்கு மாதிரி ஒரு ராண்டம் மாதிரியாகாது ; படுகைகள் அப்பொழுது ஒன்றுக்கொன்று பெரிதும் வித்தியாசமாக இருக்கக்கூடும். அதுபோன்ற நிலைகளில் சாதாரண ராண்டம் முறையைவிட ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒவ்வோர் அலகைத் தேர்ந்தெடுப்பது சிறப்பானதாகும்.

ஒழுங்கு மாதிரி முறையை நன்கு புரிந்துகொள்ள அதனைக் கொத்து மாதிரி முறையென்று கொள்ளுதல் எளிதாகும் என்று காக்ரான் (Cochran) கூறுகிருர். ஒழுங்கு மாதிரி ஒரு கொத்து தானே—ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் ஒவ்வோர் அலகைத் தேர்ந்தெடுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் பல கொத்துகளில் ஒன்றுதானே. இங்கு இந்த ஒரு கொத்துதான் முழு மாதிரியாகிறது. ஆதலால் இது முழுமைத் தொகுதியின் பண்பின வித்தியாசங்களை நன்கு பிரதிபலிக்கும்.

குறைந்த அளவுகள் கொண்ட மாதிரிப் பிழைகள் ஒழுங்கு மாதிரி முறையில் கிடைக்குமா, கிடைக்காதா என்பது முழுமைத் தொகுதி அமைந்துள்ள முறையையும், அதனின்று தேர்ந்தெடுக்க

வகுக்கும் முறையையும் ஒட்டியே இருக்கும். முழுமைத் தொகுதியின் அலகுகளில் ஒருவகைக் காலச் சுழற்சி (periodicity) இருப்பின், இந்த முறையில் வரும் மாதிரி தொகுதியின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்காமல் போய்விடும். உதாரணமாக, தொகுதியின் பன்னிரண்டாம் அலகுக ளெல்லாம் ஒரே பண்பையுடையனவாக அமைந்திருந்து, நாமும் 12-ல் ஒன்றாக அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தால், மாதிரி மிக மட்ட மானதாக அமையும். [காலமுறையில் (chronologically) அமைக்கப் பெற்ற விவரங்களில் இதுபோன்ற தவறு ஏற்படுதல் மிகச் சாதா ரணம். ஒரு பெரிய கடையில் மாதாந்திர வியாபார விவரங்களைக் கவனிக்குங்கால் டிசம்பர் மாத கணக்குகளை மாத்திரம் பார்த்தால் வரும் மாதிரி நமக்குத் தேவையான விவரங்களைத் (மாதாந்திர சரா சரி விற்பனைகளை) தராது என்பது தெளிவு.] வேறு சில சமயங்களில் ஒழுங்கு மாதிரி சாதாரண ராண்டம் மாதிரியைவிட உயர்ந்ததாகவும் அமையலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் அண்மையில் உள்ள அலகுகளைவிடச் சற்றுத் தொலைவில் உள்ள அலகுகள் அதிக வித்தியாசப்படுமாயின், ஒழுங்குமுறை சிறந்ததாகும். ஒரு நீண்ட தெருவில், பக்கத்தில் உள்ள வீடுகள் ஒரே மாதிரியாக இருப்பின், அப்பொழுது 20 வீடுகளுக்கு ஒன்றுவீதம் தேர்ந்தெடுக்கும் மாதிரி சாதாரண ராண்டம் மாதிரியைவிடச் சிறந்ததாகும். ஏனென்றால், சாதாரண ராண்டம் மாதிரியில் அடுத்தடுத்துள்ள வீடுகளும் இடம் பெறுதல் சாத்தியம். முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள அலகுகளினிடையே தொடர் வரிசைத் தொடர்பு (serial correlation) அதிகமாக இருப்பின், ஒழுங்குமுறை, சாதாரண ராண்டம் முறையைவிடச் சிறப்பான மாதிரியைத் தரும் என்பதனை ஒரு பொதுக் கொள்கை யாகக் கருதலாம்.

தற்கால மக்கள் கணிப்பு (Current Population Survey)

மாதிரி விசாரணைபற்றிய இந்த அதிகாரத்தில் கடைசியாக உண்மையான ஓர் உதாரணத்தை விவரிப்போம். அதுதான் 'தற்கால மக்கள் கணிப்பு' என்ற பெயரால் பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ் நிறுவனத்தாரால் நடத்தப்பெறுவது. இதனை அடிப் படையாகக் கொண்டே 'Monthly Reports on the Labour Force' என்ற பதிவேடும் வெளியிடப்படுகிறது. அமெரிக்க நாட்டின் தற்கால சமூகநிலைப் பதிவேடுகளில் (current social records) மிகச் சிறந்த தும் செறிவுடையதும் இதுவேதான். இதனைப் பலதரப்பட்ட மக்கள் நாட்டின் பொருளாதார மானிகளிலொன்றாகக் (indicators) கருதிக் கூர்ந்து கவனிக்கிறார்கள். இது மாதிரித் தேர்வுகளில் புது முறைகளை நன்கு எடுத்துக்காட்டும் ஒரு சிறந்த உதாரணம். இதனைச் சுருக்க மாக ஆய்ந்து பார்ப்பதால் மேற்கூறப்பட்ட பல செய்முறைகள் நடைமுறையில் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பது

விளங்கும்.[9] இந்த விசாரணையின் ஆட்சிமுறைத் தகவல்களைப் பற்றி நாம் இங்குக் கூறுமற்போனாலும், ஒரு மாதிரி விசாரணையைத் திட்டமிட்டுச் செயல்படுத்துவதில் எத்தகைய பிரச்சினைகள் எழக்கூடும் என்ற விவரங்கள் இந்த விளக்கத்தில் இடம்பெறும்.

மக்கள் கணிப்பின் நோக்கங்களும், பின்னணி நிலையும் (Background and Objectives of the Population Survey)

1930ஆம் ஆண்டுகளில் மந்தம் (depression) ஏற்பட்டபொழுது தான் நம் ஆட்சியாளர்களுக்கும் சமூக விஞ்ஞானிகளுக்கும், தற்காலப் பொருளாதார முறைகளையும் மனிதவளத்தையும்பற்றிய நமது அறிவில் எத்தகைய வெற்றிடங்கள் (gaps) உள்ளன என்பது புலப்பட்டது. எவ்வளவு மக்கள் வேலையில்லாமல் உள்ளனர், எவ்வளவுபேர்களுக்கு வேலையிருக்கிறது என்ற விவரங்களும் கிடைக்காதது, அவர்களெல்லோரையும் திடுக்கிடச் செய்தது. அப்பொழுது வேலையில்லாத் திண்டாட்டம்தான் மிகவும் முக்கியமான சமூகப் பிரச்சினையாக இருந்தது. ஆனால், வேலையில்லாதவர்கள் எவ்வளவு பேர் என்பதனைப்பற்றிப் பலர் வெளியிட்ட மதிப்பீடுகளை நோக்கினால் அவைகள் ஒவ்வொன்றும் பல மில்லியன்கள் (millions) வித்தியாசம் உள்ளவைகளாக இருந்ததைக் கண்டனர். இவைகளில் எதைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்பதற்குப் போதுமான ஆதாரங்களும் இருக்கவில்லை. அப்பொழுது 'வொர்க்ஸ் ப்ரோக்கிரஸ் அட்மினிஸ்ட்ரேஷன்' (Works Progress Administration) என்ற இலாக்கா துவக்கப்பட்டது. அதில், நாட்டில் உள்ள வேலையின்மையின் அளவை மதிப்பிட ஒரு மாதிரி விசாரணை அமைப்பதைப் பற்றிய வேலைகள் தொடங்கின; அந்த இலாக்காவின் முடிவுகள் மாதாந்திர அறிக்கைகளாக 1940-ல் வெளிவர ஆரம்பித்தன. 1942-ல் இந்த வேலை பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ் செயலகத்தாரால் (Bureau of Census) மேற்கொள்ளப்பட்டு, இன்றுவரை நடந்துவருகின்றது. இச் செயலகத்தார் தேவைப்பட்டபொழுது முதலில் நிறுவப்பட்ட விசாரணை முறையை மாற்றி வந்துள்ளனர். கடைசியாக மாற்றியது

[9] இந்தப் பகுதிக்கு நான் மக்கள் கணிப்புச் செயலகத்தாரின் மூல ஏடுகள் பலவற்றை ஆராய்ந்துள்ளேன். முக்கியமாக, பாபுலேஷன் அண்டு ஹவுஸிங் டிவிஷனைச் சார்ந்த ஜோசப் ஸ்டீன்பர்க்கிற்கு (Joseph Steinberg of the Population and Housing Division) மிகவும் கடமைப்பட்டுள்ளேன். 'கரென்ட் பாபுலேஷன் ரிபோர்ட்ஸ்' (Current Population Reports) என்ற அறிக்கையில், ஜூலை 30, 1954, P-23, No. 2 ஏட்டில் இந்தக் கணிப்பில் கையாளப்பட்ட முறைகளையும் கருத்துகளையும்பற்றிய சுருக்கமான விவரங்களைக் காணலாம்.

மக்கள் கணிப்பு விசாரணையின் முடிவுகள் மாதாந்திரம் 'Current Population Reports, Labour Force, Series P-57' என்ற ஏட்டில் வெளிவருகின்றன. வேலையிலுள்ளோர், வேலையற்றோரைப்பற்றிய தகவல்கள், தொழில் இலாக்காவினாலும் வணிக இலாக்காவினாலும் திரட்டப்பட்டு 'Combined Employment and Unemployment Release' என்ற மாதாந்திர ஏட்டில் வெளிவருகின்றன.

1954-ல்; அந்த விசாரணை முறையைத்தான் இங்கு விவரிக்கப் போகிறோம்.

தொடக்க நிலையில் இவர்களின் பணி மாதந்தோறும் உள்ள வேலையின்மையை (unemployment) மதிப்பிடுவதொன்றுதான். இப்பொழுதும் அது ஒரு முக்கியப் பணியாகவே உள்ளது. அமெரிக்கர் வாழ்க்கையிலும், சமூகப் பொருளாதார நிலைகளிலும் மாறுதல்கள் பல ஏற்பட்டுவிட்டனவாதலால், இந்த விசாரணையும் மேலும் சில நோக்கங்கள் கொண்டதாய்விட்டது. அமெரிக்க நாட்டில் 14-ம் அதற்கு மேலும் வயதானவர்களின் வேலைத் தன்மையை (employment status) மதிப்பிட்டுக் கூறுவது, இந்த விசாரணையின் அடிப்படை நோக்கம். அப்படிப்பட்டவர்களை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்—பாட்டாளிப் படை (Labour Force) அங்கத்தினர்கள்; அப் படையில் அங்கத்தினராக இல்லாதார். பாட்டாளிப் படை என்பது ராணுவத்திலுள்ளோரையும் ராணுவத்தைச் சேராதாரையும் கொண்டதாகும். இந்த விசாரணை ராணுவத்தைச் சாராதாரைப் பற்றியதுதான் (civilians).

இங்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள பல சொற்களுக்குத் திட்டவட்டமான விளக்க உரைகள் தேவை. அப்படி யில்லாமற்போனால் நமக்கு இறுதியில் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் பிழை பொருந்தியனவாக அமைந்துவிடும். பாட்டாளிப் படையின் இரு பிரிவுகளைப் பற்றிய விளக்க வுரைகளைக் கீழே தருகிறோம் :

வேலையிலுள்ளோர் : (1) விசாரணைக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட வாரத்தில் (இது குறிப்பிடப்பட்டுவிடும்) சம்பளம் பெற்றோ அல்லது தங்கள் சொந்தத் தொழில்களிலோ, அல்லது பண்ணைகளிலோ, ஏதாவது வேலை பார்த்தவர்கள் ; அல்லது தம் குடும்பத்தினர்களால் நடத்தப்பெற்றுவரும் பண்ணைகளிலோ, தொழிற்சாலைகளிலோ சம்பளம் பெறாமல் வாரத்திற்கு 15 மணி, அல்லது அதற்குமேல் வேலை பார்த்தவர்கள் ; (2) அந்த வாரத்தில் வேலை செய்யாமலும் அல்லது வேலை தேடாமலும் இருந்தாலும் அவர்கட்கு வேலைகளோ தொழில்களோ இருந்து அவைகளினின்று குறித்த சில காரணங்களுக்காக—உடல்நலக் குறைவு, தொழில்-நிர்வாகத் தகராறுகள் உள்பட—தாற்காலிகமாக வெளியில் இருப்பவர்கள்.

வேலையில்லாதார் : அந்த வாரத்தில் மேற் கூறப்பட்டது போல் வேலை செய்யாதார், வேலை தேடுபவர்கள். அந்த வாரத்திற்கு முன் 60 நாட்களில் வேலை தேட முயற்சி செய்தவர்களையெல்லாம் வேலை தேடுபவர்களாகக் கொள்ளப்படும்.

பாட்டாளிப் படையிலுள்ளோருக்கும், வெளியிலுள்ளோருக்கும் அவர்கள் வயது, இனம் முதலியனவற்றைப்பற்றிய மதிப்பீடுகளும் அவைகளைச் சார்ந்த முடிவுத் தகவல்களும் இந்த விசாரணையில் கண்டுபிடிக்கப்படும். வேலைகளின் அமைப்பைப் (structure) பற்றிய விவரங்கள், குறைநேர வேலை (part-time employment) பற்றிய தகவல்கள், வேலை தேடுபவர்கள் எவ்வளவு நாட்கள் வேலையில்லாதிருந்தனர் என்ற விவரம், தனிப்பட்டவர்களுக்கும் குடும்பங்களுக்கும் கிடைக்கும் வருடாந்திர வருமானம் முதலிய பற்பலத் தகவல்களும் இதில் கிடைக்கும். ஆதலால், இந்த விசாரணையானது அமெரிக்க நாட்டிலுள்ள மக்களின் செயல்கள், நலம்பற்றிய முழு விவரங்களையும் தன்னுள் கொண்டு முறைப்படி பதிவுசெய்யப்படும் அட்டவணையாகத் திகழ்கிறது. ஆகவே, இது சமூக, பொருளாதாரச் செய்திகளை வெளியிடுவதில் நாம் அண்மையில் கண்டுள்ள முன்னேற்றத்தைச் சுட்டிக் காட்டுகிறது என்று துணியலாம்.

விசாரணை அமைப்பு

சுமார் 25,000 வாழும் இடங்களை (dwelling units) கொண்டதான மாதிரியை மாதந்தோறும் இந்த பியூரோ செயலகம் தேர்ந்தெடுக்கிறது. 230 முமாஅ-களைக் கொண்டதும் நிலப்பரப்பைச் சார்ந்தது மான அலகுகளிலிருந்து இந்த வாழுமிடங்களை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கிறார்கள். இந்த 230 முமாஅ-கள் 230 படுகைகளிலிருந்து எடுக்கப்பெற்றவை. ஆக இந்த விசாரணையில் முக்கியமான இரண்டு படிகள் உள்ளன: நிலப்பரப்புப் பகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல், வாழுமிடங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

படுகை அமைத்தலும் முதற்படி மாதிரி அலகுகளின் ஒரு மாதிரியை எடுத்தலும்: அமெரிக்காவின் நிலப்பரப்பை 2,000 முதற்படி மாதிரி அலகுகளைக்கொண்டதாக முதலில் பிரித்தார்கள். நாட்டில் இதற்கு முன்பு பழக்கத்தில் இருந்த 3,000 கோட்டங்களையும் (counties) மற்றும் அரசியல் முறையில் தலைநகருக்குரிய தரப் பரப்புகள் (standard metropolitan areas) என்ற நிலப்பரப்புகளையும் பயன்படுத்தினர். 1950ஆம் ஆண்டு மக்கள் கணிப்பின்படி இது போன்ற நிலப்பரப்புகள் 168 ஆகவிருந்தன; இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு முதற்படியான மாதிரி அலகாக எடுக்கப்பட்டது. மாதிரியிலுள்ள மற்ற 1,832 முமாஅ-களும் ஒரு கோட்டத்தைக் கொண்டவையாகவோ, அல்லது பல கோட்டங்களைக் கொண்டவைகளாகவோ அமைக்கப்பெற்றுத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளன. இப்படி ஒன்றாகச் சேர்க்குங்கால் அளவைகளினிடையே அதிகமாகச் சமூகப் பொருளாதார வித்தியாசங்கள் இருக்கும்படியாக அமைந்தவைகளையே சேர்த்துள்ளார்கள். இதனால் ஒவ்வொரு முமாஅ-வினுள்ளும்

வேற்றுமையை எவ்வளவு அதிகமாக்கலாமோ அவ்வளவு ஆக்கினாற் போலாகிறது. (இதற்குக் காரணத்தையும் கூறுவோம். எந்தப் படுகையிலிருந்து இந்த 'முமாஅ' தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதோ, அந்தப் படுகையின் பிரதிநிதியாக இது மொத்த மாதிரியில் இடம் பெறுகிறது. ஆதலால், அந்தப் படுகையிலுள்ள வேற்றுமைகள் முடிந்த அளவில் இந்த 'முமாஅ'விலும் இடம் பெறுதல் நன்று.) ஆக, ஒவ்வொரு 'முமாஅ'விலும் கிராம, நகர மக்களும், குறைந்த சம்பளம் பொறுவோர், அதிகச் சம்பளம் பெறுவோர்களும், பலவகைப்பட்ட தொழிற்சாலைப் பணியாளர்களும், பலவகைப்பட்ட தொழில்களில் அமைந்தவர்களும் இடம் பெறுவர்.

இந்த 2,000 'முமாஅ'க்களைப் படுகையாக அமைத்தல் இரண்டாவது காரியம். இப்பொழுது நாம் நினைவிற் கொள்ள வேண்டியது—படுகைகளினிடையே வேற்றுமை அதிகமாயும், படுகைகளுக்குள்ளே வேற்றுமை குறைவாயும் இருத்தல் வேண்டும் என்பதாகும். (ஏனென்றால், படுகை முறையில் திகழும் மாதிரிப் பிழைகள் படுகைகளுக்குள் உள்ள மாறுபாட்டைப் பொறுத்திருக்கும்.) பல விதிகளை மனத்தில்கொண்டு இவைகள் 230 படுகைகளாகத் தொகுக்கப்பெற்றன. அவைகளில் சில—மக்கள் நெருக்கம் (population density), தொழிற்சாலைகளின் வகைகள், (கிராமங்களில்) பண்ணைவகைகள், சென்ற பத்தாண்டில் மக்கள் தொகை வளர்ச்சி (population growth), நிலப்பரப்பு இடம் (geographical location) முதலியன. ஒரு படுகையினுள் அமையும் 'முமாஅ'க்களில் பெரும்பாலானவைகள் மேற்கூறியவற்றில் மாற்றல் அதிகமில்லாதனவாகப் பார்த்துச் சேர்க்கக் கவனம் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. 'முமாஅ'-க்களில் பல நகரத் தரப் பரப்புகளுள் பெரிதான 44-ம், மற்றும் சில பெரிதான 'முமாஅ'-க்களும் தனிப் படுகைகளாகவே கருதப்பட்டுள்ளன. ஆனால், 230-ல் பெரும்பாலான படுகைகளில் பல 'முமாஅ'-க்கள் இடம்பெற்றுள்ளன. இந்த 230 படுகைகளிலும், 1950 கணக்குப்படிக்கு மக்கள் தொகை ஏறத்தாழச் சமமாகவிருக்கும்.

மாதிரிப் பரப்புகளான 230 முமாஅ-க்களும் கீழ்க்கண்டவாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன :

60 முமாஅ-க்கள் பெரிதாக இருந்தமையால் அவைகள் தனிப் படுகைகளாகக் கருதப்பட்டுவந்தன என்பதனைப் பார்த்தோம். இந்த 60 முமாஅ-க்களும் இயல்பாகவே மாதிரிப் பரப்புகளில் இடம்பெற்றன.

மற்ற 170 முமாஅ-க்களை, படுகைக்கு ஒன்றுவீதம் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்தார்கள். தேர்ந்தெடுக்கும் ஊக

27

அளவை அந்தப் படுகையிலுள்ள மக்கள்தொகைக்கு (1950 கணக்குப்படி) நேர்விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பரப்புகளிடையே மாதிரி ஆய்வு—வாழுமிடங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல் (Sampling within selected sample areas : the selection of sample households) : இறுதி நிலையில் நாம் ஆராயப்போகும் அலகுகள் பலவற்றைக் கொண்டது ஒரு முமாஅ என்பது வெளிப்படை. இவைகளிலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமானவை ; ஆதலால், இவைகளில் சிலவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டியதாயிற்று. இதைப் பரப்பு மாதிரி முறைகளைக்கொண்டு செய்துள்ளார்கள். 1950, மக்கள் கணக்கெடுப்பில் சில ஆட்சிமுறைப் பரப்புப் பகுதிகளை வகுத்திருந்தார்கள்—அவைகளைக் ‘கணக்கெடுப்பு மாவட்டங்கள்’ (enumeration districts) என்றும், அவைகளின் சிறு பிரிவுகளைத் ‘துண்டங்கள்’ (segments) என்றும் வழங்கினர். இத் தகவல்களை எல்லாம் பயன்படுத்தியே மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. முதற்கண், 1950-ன் மக்கள் தொகைக்கு நேர்விகிதமாய் அமைந்த ஊக அளவை வைத்து, கணக்கெடுப்பு மாவட்டங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பெற்றன. இவைகளிலிருந்து ‘துண்டங்கள்’ பொறுக்கப்பெற்றன. இந்த நிலையில் தேர்ச்சி ஊக அளவைகள் துண்டங்களிலிருந்த இருப்பிடங்களின் எண்ணிக்கையின் மதிப்போடு நேர்விகிதமாக அமைந்தன. ஒவ்வொரு ‘துண்ட’த்திலும் உள்ள எல்லா இருப்பிடங்களுமே சாதாரணமாக மாதிரியில் இடம் பெற்றன. தோராயமாக, ஒரு துண்டத்தில் 6 இருப்பிடங்கள் இருந்தன. (சில துண்டங்கள் மிகப் பெரியன ஆகையால், அவைகளினின்றும் சில இருப்பிடங்களைப் பொறுக்கி எடுக்க வேண்டியிருந்தது.)

இந்த விசாரணைத் திட்டம் அமைக்கும்பொழுதே, முதலாவதாக 25,000 இருப்பிடங்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்று முடிவு செய்தாயிற்று. (1954-ல்) இந்தக் கணக்கு வர முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள 2,250 இருப்பிடங்களுக்கு ஓர் இருப்பிடத்தை மாதிரியாகப் பொறுக்க வேண்டும். இதுதான் முழுமைதாங்கி (over-all) மாதிரி பின்னம். படுகைகளுக்கு இந்த பின்னத்தைப் பயன்படுத்தும் பொழுது அந்தப் படுகையிலுள்ள ‘முமாஅ’-க்களின் மக்கள் எண்ணிக்கையையும் கருத்தில் கொண்டே திருத்தப்பெற்றது (adjusted). ஒரு படுகையிலிருந்து $\frac{1}{9}$ பங்கு மக்கள் தொகையைத் தன்னுள் அடக்கிய ஒரு முமாஅ-வுக்கு இந்த பின்னம் பொறுத்தப்பட்டால், அந்த முமாஅ-விலுள்ள 250 இருப்பிடங்களுக்கு ஒன்றாக, நாம் இருப்பிடங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். ஏனென்றால், $\frac{1}{250} = \frac{1}{2250} \div \frac{1}{9}$. ஒரு முமாஅ-வில் படுகையில் 9-ல் ஒரு பங்கை

விடக் குறைவாக மக்கள் எண்ணிக்கை இருந்தால், அந்த மூமாஅ-வின் மாதிரி பின்னம் இதைவிடப் பெரிதாக அமையும்; மூமாஅ பெரிதாக இருப்பின், பின்னம் சிறியதாகும் என்பது தெளிவாகிறது. இந்த பின்னம் மாதத்திற்கு மாதம் வேறுபடுவதில்லை. அதாவது, மக்கள்தொகை அந்த மூமாஅ-வில் மாறினால், அதனின்று பொறுக்கி எடுக்கப்படும் மாதிரி இருப்பிடங்களின் எண்ணிக்கையும் மாறும்.

பல ஆண்டுகளுக்கு இந்த அடிப்படைச் செய்முறைகள் மாறாதிருக்குமாதலால், இவைகளை விளக்குங்கால் பெரும்பாலாக இறந்தகால நடையிலேயே எழுதினேன். ஆனால், மாதிரி இருப்பிடங்களில் வேற்றுமை உண்டு. மக்கள் கணிப்புச் செயலகம் ஒரு வரிசைப்படி வரும் (rotation) முறையைக் கையாளுகிறது. இதன்படி ஒரு குறிப்பிட்ட இருப்பிடமானது நான்கு, நான்கு மாதங்களாக இரு காலங்களில்—அதாவது, மொத்தம் 8 மாதங்களில்—மாதிரியில் இடம் பெற்றிருக்கும். இந்த இரண்டு நான்கு மாத காலங்களும் அடுத்தடுத்த வருடங்களில் அதே மாதங்களாக அமையுமாறு வகுக்கப்படும். இருப்பிடங்களைக் கூட்டமாக இந்த முறையில் வரிசைப்படுத்துவதால், மாதத்திற்கு மாதம் 75 சதவீதம் இருப்பிடங்கள் ஒன்றாக இருக்கும்; வருடாவருடம் கணக்கிட்டால் 50 சதவீதம் இருப்பிடங்கள் ஒன்றாகவே அமையும்.

விசாரணை முறைகள் (Survey techniques): தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இருப்பிடங்களின் பிரதிநிதிகளைக் கள ஏஜெண்டுகளால் பேட்டி கண்டு விவரங்கள் திரட்டுதல் மாதிரி முறையின் முக்கிய கட்டங்களிலொன்றாம். ஒருவகைச் சார்புற்ற அல்லது செயல் நயமில்லாத (tactless) பேட்டி காண்பவர்கள் (interviewers), சரிவர அமையாத அல்லது ஒருபுறம் சார்ந்த கேள்விகள், தவறாக விவரங்களை அறிவித்தல், அதிக அளவு பதிலின்மை[9] (non-response) முதலானவைகள் இருந்தால், முறைகள் எவ்வளவு விழுமியதாக இருப்பினும், விசாரணையின் நோக்கங்கள் வெற்றிபெறாமல் போகக் கூடும். பாட்டாளிப் படை விசாரணையின் துவக்க நிலையில் ஒரு

[9] மாதிரி விசாரணைகளில் இந்தப் பதிலின்மை யென்பது ஒரு சிக்கலான பிரச்சினையாகும். பதிலின்மை அதிகமாக இருந்தால் கிடைக்கும் மாதிரியானது ஒரு சார்புற்றதாக அமைந்துவிடலாம். ஏனென்றால், பதில் கூறுபவர்கள், பதில் கூறாதவர்களைவிடப் பல விதங்களில் வித்தியாசப்பட்டிருக்கக்கூடும். குடும்ப வருமானத்தைப்பற்றிய ஒரு விசாரணையில் நடுத்தர அல்லது உயர்தரச் சம்பளம் (middle and higher income groups) பெறுவோர்களிடையிலிருந்து பதில் கிடைக்கலாம். குறைந்த சம்பளம் பெறுவோர்களில் பலர் பதில் கூறாமல் இருக்கலாம். ஓர் அலகை மாதிரியில் சேர்த்தபிறகு, அந்த அலகின் முழு விவரங்களையும் அதனின்று தெரிந்துகொள்ள முயற்சிகள், செலவினங்கள் பெருகினாலும்கூட எடுத்துக்கொள்ளப்படும். இந்த விசாரணை முறையில் 3-லிருந்து 5 சதவீதம்வரைதான் பதிலின்மை இருந்தது. தவிர்க்கமுடியாத காரணங்களினால் சிலரைப் பேட்டி கண்டு விவரங்கள் திரட்ட முடியாதபோது அதற்குத் தகுந்தவாறு இந்த விசாரணையிலும் திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டன.

வியக்கத்தகுந்த எடுத்துக்காட்டுள்ளது; அது கேள்விகள் கேட்கப்பட வேண்டிய முறையின் முக்கியத்துவத்தை நன்கு வெளிப்படுத்து கிறது. மார்ச்சு 1942-ல் பாட்டாளிப் படையைச் சாராத ராணுவத்தா ரல்லாதவர்களில் சிலர் வேலையில்லாதவர்கள், வேலையிலுள்ளவர்கள் என்ற இரு பிரிவுகளிலும் சேர்க்கப்படாமலிருந்தனர். இவர்கள் மேலும் இரண்டு கேள்விகள் கேட்கப்பட்டனர்—ஒன்று, 30 நாட் களுக்குள்ளாக ஒரு முழுநேர வேலை கிடைத்தால் ஒத்துக்கொண்டு வேலையில் அமர்வீரா? இரண்டு, முழுநேர வேலையில் கடைசியாக எப்பொழுது இருந்தீர்? இந்தக் கேள்விகளுக்குக் கிடைத்த விடை களின் பயனாக ராணுவத்தாரல்லாத பாட்டாளிப் படையின் எண்ணிக் கையின் மதிப்பீடு 1 மிலியனளவு உயர்ந்துவிட்டது. மாதிரியில் பல பேர்கள் வீட்டுத் தலைவிகளென்றும் (housewives) மாணாக்கர்கள் என்றும் வகைப்படுத்தப்பட்டிருந்தார்கள்; இவர்களில் பல பேர்கள் வேலை கிடைத்தால் போகத் தயாராக இருந்தனர்; ஆனால், அவர்களுக் குத் தகுந்த கேள்விகள் கேட்கப்படாமையால் அவர்களுடைய விருப் பத்தைத் தெரிவிக்க முடியாமல் போயிற்று. அவர்களும் பாட்டாளிப் படையைச் சேர்ந்தவர்களென்பது நம் விளக்க உரைப்படி தெளிவு. இதுபோன்ற மற்றும் பல நிகழ்ச்சிகளின் பயனாக வினாத்தாளைத் தயாரிக்கும் பணிக்கு முன்பைவிட அதிகக் கவனம் செலுத்தப் பட்டுவருகிறது. அதுபோலவே, பேட்டி காணும் முறைகளிலும். இக் கலைகள் மிக முக்கியமானவைகளாயினும், இந்த நூலில் இடம்பெற முடியாது.

மக்கள் கணிப்பின் கள விசாரணைகளைக் குறைநேர வேலை செய்து வந்த 350 பேட்டி காண்போர் (interviewers) செய்தனர். இவர்களை மேற்பார்வை பார்க்க அமர்த்தப்பட்ட சூபர்வைஸர்கள் (supervisors) முழுநேர உழைப்பாளிகள். இருப்பிடங்களின் பிரதிநிதிகளை மாதந் தோறும், 15ஆம் தேதி சேர்ந்த வாரத்தில் பேட்டி காண்பார். விசா ரணை வாரத்தில் (மாதத்தின் 8ஆம் தேதி நிகழும் வாரம்) இருப்பிடத் தில் வாழ்வோர்களின் செயல்களைப் (activities) பொறுத்து அவர் களை வேலையிலுள்ளோர், வேலையற்றவர், பாட்டாளிப் படையில் சேரா தோர் என்று பிரிவாக்குவார்கள். இதுபோன்ற பல துணைக்கேள்வி களுக்கு அவர்கள் அளிக்கும் பதில்களைப் பேட்டி காண்பவர்கள் பதிவு செய்துகொள்வார்கள். அந்த விவரங்களைத் துளை-அட்டை (punch card) களுக்கு மாற்றுதல், பிறகு பாகுபடுத்துதல் முதலான வேலைக ளெல்லாம் பொறிகளால் (machines) செய்யப்பட்டுவிடும். மின்சார டிஜிட்டல் கம்ப்யூடர் (electric digital computer) என்ற கருவி இந்த வேலைகளையெல்லாம் விரைவில் செய்வதால், விசாரணையைப்பற்றி மதிப்பீடுகளை விசாரணை தொடங்கி மூன்று வாரங்களுக்குப் பிறகு நாட்டிற்கே பொதுவாக வெளியிடுவது சாத்தியமாகிறது.

மதிப்பீடுகளும் மாதிரிப் பிழைகளும் (Estimates and Sampling Errors)

மாதிரி முடிவுகளிலிருந்து மாதாமாதம் நாடு முழுவதும் பொருந்து பவையான மதிப்பீடுகளைக் கணிப்பதில் பல படிகள் உள்ளன; அவற்றைப்பற்றி இங்கு விவரிக்கவில்லை. ஒவ்வொரு முடிவான (final) மதிப்பீடும் இரண்டு தனி மதிப்பீடுகளைக் கொண்டது என்பதனைமட்டும் கூறுவோம். இவைகளில் முதலானதை விகிதமதிப் பீடு (ratio-estimate) என்போம். மாதிரியானது முழுமைத் தொகுதி யின் பல பண்புகளை—குறிப்பாக இனம், வயது, நிறம் (colour), பண்ணைவாசியா இல்லையா என்பதனைப் போன்றவைகளை—ஒத்து அமைதல் வேண்டுமல்லவா; அதற்காக மாதிரியின் முடிவுகளை முழு மைத் தொகுதியின் முடிவுகளாகப் பெருக்குவதற்கான (inflate) செய்முறைகளைக்கொண்டு கணக்கிடப்படுவது இந்த விகிதமதிப்பீடு. குறித்த ஒரு பண்பிற்கு (எடுத்துக்காட்டு, வேலை) சென்ற மாதத்திய மதிப்பீட்டிலிருந்து முன்னோக்கியாகக் (projection) கணக்கிடப்படுவது இரண்டாம் மதிப்பீடு. இரண்டு மாதங்களுக்குப் பொதுவான அலகுகள் 75 சதவீதமிருக்கும் என்பதனை முன்பே பார்த்தோம். இந்தப் பொதுவான அலகுகளில் இரண்டாவது மாதம் ஏற்பட்டுள்ள மாறுபாட்டை ஒட்டி இரண்டாம் மதிப்பீடு கணிக்கப்படும். இவைக ளிரண்டிற்கும் சரிநிறை கொடுத்த சராசரியே அந்த மாதத்தின் இறுதியான நாட்டு மதிப்பீடாகும் (national estimate). சராசரி யாக்கு முறையினால் இந்த நாட்டு மதிப்பீட்டின் மாதிரிப் பிழையானது விகித மதிப்பீட்டின் பிழையைவிடக் குறைவாகவே அமையும்.

1954ஆம் ஆண்டு ஜனவரியில் மக்கள் கணிப்புச் செயலகத்தார் ஒரு புதிய விசாரணை அமைப்பை நிறுவினார்கள். பாட்டாளிப் படையின் மற்றும் அதன் பிரிவுகளின் மதிப்பீட்டின் மாதிரிப் பிழைகளைக் குறைப்பதே புதிய அமைப்பின் முக்கிய நோக்கமாகும். இம் முறையைப் பின்பற்றி வெளியிடப்படும் மதிப்பீடுகளின் ஒப்புமை மாதிரிப் பிழையானது (relative sampling errors) சுமாராக 0·6 சதவீதம் என்று கணக்கிட்டுள்ளனர். இது ஒரு மாறுபாட்டுக் கெழு; சதவீத அளவில் சொல்வதற்காக 100ஆல் பெருக்கப்பட்டது. இந்தப் பிழை அளவு முக்கிய மதிப்பீடுகளான—ராணுவமல்லாத பாட்டாளிப் படை, வேலையுள்ளவர்களின் மொத்தம், விவசாயம் தவிர இதர வேலையுள்ளவர்களின் மொத்தம்—முதலியவற்றிற்குப் பொருந்தும். இதனைக் கணக்கிடத் தரப்பிழை—அதாவது, தரவிலக்கம்—தான் மொத்த அளவாகப் (absolute measure) பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது. ஆதலால், சாதாரணமாக நார்மல் மாறிப் பரவல்க ளுடைய ஊக அளவைகள் இதற்கும் பொருத்தமாக அமையும். உதாரணமாக, மொத்த ராணுவத்தைச் சாராத பாட்டாளிப் படையின்

மதிப்பீடு குறித்த மாதத்தில் 65 என்று கொள்வோம். அப்பொழுது ·68 ஊக அளவை நிலையில் இம் மதிப்பீட்டின் நம்பிக்கை எல்லைகள் 65—(65 × ·006), மற்றும் 65+(65 × ·006), அல்லது 64·61-லிருந்து 65·39 மிலியன் வரையாகும். ·95 ஊக அளவை நிலையில் இதே எல்லைகள் 65 ± 1·176 சதவீதம், அல்லது, 64·24-லிருந்து 65·76 மில்லியன் வரையாகும். (எடுத்துக்காட்டிற்காகத்தான் தேவைக்கு அதிகமான தசமஸ்தானங்களுக்கு விடை கூறப்பட்டுள்ளது. இம் மதிப்பீடுகளின் தன்மை அவ்வளவு தசமஸ்தானங்களுக்குப் பொருந்தாது.) சிறிய அளவுடைய மற்ற மதிப்பீடுகளுக்கு வேலையின்மை, விவசாய வேலை முதலியவைகட்கு, ஒப்புமை மாதிரிப் பிழையின் அளவு அதிகமாகவிருக்கும்—தற்சமயம் சுமார் 4 சதவீதம். அதாவது, குறித்த ஒரு மாதத்தில் வேலையின்மை 3 மில்லியனை மதிப்பிடப் பட்டால், அதன் (·95 ஊக அளவு நிலை) நம்பிக்கை எல்லைகள் 3 ± 7.84 சதவீதமாகும். ·95 ஊக அளவு நம்பிக்கையுடன், நாம் முழுமைத் தொகுதியின் வேலையில்லாதோரின் எண்ணிக்கை 2·76-லிருந்து 3·24 மில்லியன் வரைஇருக்கும் என்று துணியலாம்.

பாட்டாளிப் படை விசாரணை தொடங்கி 15 ஆண்டுகள் சென்று விட்டன. (1955-ல், இப் புத்தகம் வெளிவந்தபொழுது) இதனிடையில் இதன் பயனுடைத்தன்மை பெரும்பாலும் பெருக்கப்பட்டுவந்துள்ளது. அடிப்படையான கருத்துகளையும் செய்முறைகளையும் நன்கு அறுதியிட்டுள்ளார்கள். விசாரணையின் நோக்கம் விரிவடைந்துள்ளது. மற்றும் மதிப்பீடுகளின் பிழையும் குறைக்கப்பட்டுள்ளது. எனினும், இப்பொழுது நேர்ந்துள்ள மாறுதல்தான் இறுதியானதாகும் என்று எண்ணிவிடக்கூடாது. இந்த மதிப்பீடுகளை வெளியிடுவோரும், இவைகளைப் பயன்படுத்துவோரும், இவைகளை மற்றும் செம்மையாகக் கணக்கிடலாம் என்பதனை நன்கு உணர்ந்துள்ளனர். தற்சமயம் செயல்பட்டுவரும் முறைகளை விரிவுடையனவாகச் செய்து பெருக்கலாம்; செய்முறைகளை மேன்மேலும் திருத்தமாக அமைக்கலாம்.

இரண்டு குறிக்கோள்களுக்கும், மாதிரியை இன்னமும் பெரிதாக எடுத்தலும் மாதிரியின் பரப்பை அதிகமாக்குதலும் வேண்டும் என்று சிபாரிசு செய்துள்ளார்கள். இந்த மாறுதல்களினால் வேலையில்லாதோரின் மதிப்பீடுகளைத் திருத்தமாக வெளியிட முடியும். இந்த மதிப்பீடு பாட்டாளிப் படை மதிப்பீட்டின் (controversial) கருத்து வேறுபாட்டுடன் அமைந்த ஒரு பகுதியாகும். இந்த முறையில் சார்பற்றதும் திருத்தமானதுமான பேட்டி காணுதலே அடிப்படை. ஆதலால், களமுறையில் பேட்டி காணுபவர்களுக்கு நல்ல பயிற்சி தரவேண்டுமென்பதும், அவர்கள் வேலைகளை நன்கு கண்காணித்து வருதல் வேண்டுமென்பதும் வலியுறுத்தப்பட்டுள்ளன. இவைகளால்,

தற்சமயம் 3-லிருந்து 5 சதவீதம் வரையுள்ள பதிலின்மையானது மற்றும் குறையும்; ஒரு சார்பற்ற பதில்கள் கிடைப்பதும் குறையும் என்று எதிர்பார்க்கிருர்கள்.

விளக்கவுரைகள் (definitions) பாகுபாடுகள் (classifications) முதலியவைகளைப்பற்றிய பிரச்சினைகள் மற்ருெரு வகையைச் சார்ந்தவை. இவைகளைப்பற்றி—வேலையிலுள்ளோர், வேலையில்லாதோர்—பல ஆண்டுகளாக விவாதங்கள் நடந்தும் இறுதியான இலக்கணம் அமைக்க முடியவில்லை. ஒருவன் தற்காலிகமாக வேலை நிறுத்தம் செய்துள்ளான்—ஆனல், அவனுக்கு மறுபடியும் போய்ச் சேரக்கூடிய வேலை ஒன்று உள்ளது. அவனை வேலையுள்ளவன் என்று கூறுவதா? குறைநேர வேலை செய்து வேலையிலிருப்பவனுக்கும், வேலையில்லாதவனுக்கும் உள்ள பாகுபாட்டை எப்படி வகுப்பது? முழு நேரமும் வேலையில்லாமல், அரைகுறையான வேலையில் அமர்ந் திருப்பவர்களுக்கென்றே (partially employed) ஒரு தனிப் பிரிவு தேவையா? இதுபோன்ற சிக்கல்கள் தொடர்ந்து வந்துகொண்டே இருப்பதால், பாட்டாளிப் படையில் பல பாகுபாடுகளின் சில பிரிவுகள் நடுநிலைமையில் (எந்தப் பகுதியில் சேரவேண்டும் என்பது முடிவாகாமல்) நிற்கத்தான் செய்யும். முக்கியப் பகுதிகளை நன்கு வரையறுத்துக் கூறிவிட்டால் இதுபோன்ற பிரிவுகளைத் தனியே குறிப்பெடுத்து வைக்கலாம். தேவைப்பட்டோர் அவரவர் தேவைக் கேற்ப அவைகளைச் சேர்த்துக்கொண்டு புதிதாக மதிப்பீடுகளைப் பெறுதல் முடியும். இந்தத் துறையில்தான் தற்கால மக்கள் கணிப்பு விசாரணை முன்செல்கிறது.

பொதுவாக நாட்டிலுள்ள வேலையின்மையை மதிப்பிடத்தான் முதலில் பாட்டாளிப் படை விசாரணை துவக்கப்பட்டது என்பது முன்பே குறிப்பிடப்பட்டது. இப்பொழுது மற்றும் பல குறிக்கோள் களுக்கும் விரிவுகளுக்கும் இதே விசாரணை பயன்பட்டுவருகிறது என்பதனையும் கண்டோம். இதுபோன்ற விரிவுகள் பிற்காலத்தில் அதிகமாகுதல் இயல்பே. சிறிய நிலப்பரப்புகளுக்குத் தனியாக மதிப்பீடுகள் கிடைத்தாலும், பலவகைப்பட்ட தொழில்களுக்குத் தனியே மதிப்பீடுகள் கிடைத்தாலும், வேலையில்லாதோரின் பல பிரிவுகளைப்பற்றிய விவரங்கள் கிடைத்தாலும், ஆட்சியாளர் களுக்கும் நுண் ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கும் (analytical needs) பெரிதும் பயன்படும். மேலும்மேலும் விவரங்கள் தேவை. மொத்தத்தின் பல பிரிவுகளுக்குத் திருத்தமான மதிப்பீடுகள் அவசியம். நல்ல அமைப்பு முறையும், திட்டமுடன் செயல்படுத்து தலும் இந்த நோக்கங்களை ஓரளவிற்குப் பூர்த்தி செய்யும். ஆனல், இவைகளுக்குச் செலவு அதிகம் பிடிக்கும். ஆதலால் ஆட்சிமுறை, விஞ்ஞானமுறைத் தேவைகளையும் வரிகொடுப்போரின் நலத்தையும்

சீர்தூக்கிப் பார்த்து ஒரு முடிவு காணுதல் வேண்டும். இதுபோன்ற ஒரு முடிவு சாத்தியமா, நடைமுறையில் கிட்டுமா என்பது புள்ளியியல் முறையைச் சார்ந்த பிரச்சினை அன்று.[10]

துணைநூல்கள்

Cochran, W. G., 'Sampling Techniques', Chaps. 1-5.

Deming, W. E., 'Some Theory of Sampling', Chaps. 1, 2, 4, 9, 10.

Federal Reserve System, Board of Governors, '1954 Survey of Consumer Finances,' Federal Reserve Bulletin, March, June, July 1954.

Festinger, L. and Katz, D., ed., 'Research Methods in the Behavioral Sciences.

Hansen, M. H., Hurwitz, W. N. and Madow, W. G., 'Sample Survey Methods and Theories,' Vol. I, Chaps. 1-5, 12; Vol. II, Chaps. 1-5.

Katona, G. and Mueller, E., 'Consumer Attitudes and Demand'.

Klein, L. R., 'Contributions of Survey Methods to Economics'.

Mosteller, F. and others, 'The Pre-Election Polls of 1948,' Social Science Research Council, Bulletin 60, 1949.

Neyman, J., 'Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability', 2nd ed., Chap. 3, part 1.

Neyman, J., 'On the Two Different Aspects of the Representative Method,' Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 97, 1934.

Parten, M. B., 'Surveys, Polls, and Samples', Chaps. 2, 3, 7, 9.

[10] வணிகத் துறையிலும், சமூகவியல் துறையிலும் ஈடுபட்டுள்ளவர்களுக்குப் பயன்தரக்கூடிய மாதிரி விசாரணைகள் பல உள்ளன. முக்கியமாக ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டம் (Federal Reserve System) என்ற நிறுவனத்தின் ஆணையாளர் குழுவினால் (Board of Directors) துவக்கப்பட்டு, மிச்சிகன் பல்கலைக்கழக சமூகவியல் ஆராய்ச்சிக் குழுவின் விசாரணைப் பகுதியினரால் (Survey Research Centre of the Institute of Social Research of the University of Michigan) செயல்பட்டுவரும் நுகர்போர் நிதிகளைப் (Consumer Finances) பற்றிய வருடாந்தர விசாரணையைக் குறிப்பிட வேண்டும். இந்த விசாரணைபற்றிய அறிக்கைகள் ஃபெடரல் ரிஸர்வ் புல்லெட்டின் (Federal Reserve Bulletin) என்ற ஏட்டில் வெளிவருகின்றன. செய்முறைகளைப்பற்றிய விளக்கம் ஜூலை 1950ஆம் இதழில் உள்ளது. மற்றும் பல முறைகளைப்பற்றிய விரிவான குறிப்புகளுக்குக் கீழ்க்கண்ட நூல்களைப் பார்க்க: கடோனாவும் முல்லரும் எழுதிய நூல் (து.நூ.ப. 75); ஃபெஸ்டிங்கரும், காட்சும் (Festinger and Katz) எழுதிய நூல் (து. நூ. ப. 45).

Sukhatme, P. V., 'Sampling Theory of Surveys', Chaps. 1-3.

United Nations Statistical Office, 'The Preparation of Sampling Survey Reports,' Statistical Papers Series C, No. 1 (revised), Feb. 1950.

U. S. Bureau of the Census, 'Concepts and Methods Used in the Current Labour Force Statistics Prepared by the Bureau of the Census,' Current Population Reports, Series P-23, No. 2, July 30, 1954.

Yates, F., 'Sampling Methods for Censuses and Surveys', 2nd ed., Chaps. 1-3, 6, 7.

Yule, G. U. and Kendall, M. G., 'An Introduction to the Theory of Statistics', 14th ed., Chaps. 16, 23.

இந்த அதிகாரத்தின் முடிவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள துணை நூல்களைப் பதிப்பித்தோர் பெயரையும், பதிப்பித்த ஆண்டையும், நூலின் இறுதியில் உள்ள துணைநூல் பட்டியலில் காணலாம்.

பின் இணைப்பு A

புள்ளியியல் விவரங்கள் : ஆய்வு முறையின் கச்சாப் பொருள்கள்

கடைசி அதிகாரத்தைத் தவிர மற்ற அதிகாரங்களில் நாம் புள்ளியியலில் பல முறைகளைக் கவனித்துள்ளோம்; அப்பொழுது கண்டறிந்த விவரங்கள் நம்மிடையே இருந்தன என்று கருதியுள்ளோம். அப்படி விவரங்கள் கிடைத்த பிறகு அவைகளை எப்படித் தொகுப்பது, ஆய்வது, ஆய்ந்த முடிவுகளைப் பொதுப்படையாக்குவது (generalise) என்ற பிரச்சினைகளைப்பற்றிப் படித்தோம். கடைசி அதிகாரத்தில் (19-ல்) மாதிரி உருவமைப்பைப் பற்றியும் (sample design), கள விசாரணைகளை நிகழ்த்துவதுபற்றியும் விளக்கியுள்ளோம். புள்ளியியல் விசாரணைகளில் கச்சாப் பொருள்களாகத் (raw materials) திகழும் விவரங்களைப்பற்றிய பொதுவானதும் சுருக்கமானதுமான விளக்கத்தை இந்தப் பின் இணைப்பில் தருவோம். இந்தப் பகுதியைப் பயிற்சியின் முதல் நிலைகளிலேயே, சமூகவியல் அறிஞர்களும் தொழில் நிர்வாகத்தாரும் படிப்பது நல்லது. அப்படிப் படிப்பது, அவர்களுக்குச் சரியான நோக்கம் ஏற்படக் காரணமாகலாம்; மற்றும், புள்ளியியல் விவரங்களைக் கூர்ந்து ஆராயும் மனப்பான்மையும் அவர்களுக்கு உண்டாகும். கண்டறிந்த விவரங்கள் பிற்பாடு செய்யப்படும் ஆய்வு முறைகளுக்கு அடிப்படையானவை; எனவே, அவைகளை நன்கு சோதித்து, ஆராய்ந்து, அறிந்துகொள்ள வேண்டியது மிக அவசியமாகும். இது எளிதாகப் புலப்படும் ஒரு செய்தியானாலும், பல நிலைகளில் அசட்டை செய்யப்பட்டுள்ள ஒன்றாகும்.[1]

புள்ளியியல் அறிஞர் கையாளும் விவரங்கள் பல்வேறுபட்ட முறைகளில் கிடைப்பவை. இவைகளையெல்லாம்பற்றிக் கூறவேண்டு

[1] இந்தப் பிரச்சினையைப்பற்றிய ஆழமான கருத்துகளைக் காணவேண்டுமானால், மஹலானோபிஸ், பி. ஸி. (Mahalanobis, P. C.) என்பவரின் ஆராய்ச்சிக் கட்டுரையான 'Professional Training in Statistics' என்பதைப் பார்க்கவும். இது, 'Indian Statistical Institute' நிறுவனத்தார் வெளியிட்டுள்ள 'Bulletin,' வால்யூம் 33, பகுதி V-ல் உள்ளது.

மானல், அது மிக விரிவாக அமைந்துவிடும். அந்த விளக்கம் கீழ்க்கண்ட செய்திகள் எல்லாவற்றையும்பற்றியதாக இருக்க வேண்டும்: சோதனைகளின் உருவமைப்பு முறைகள், பேட்டி காணும் கலைகள், கேள்வித் தாள்களைத் (questionnaires) தயாரித்தல், அவைகளுக்கு விடைகள் பெறுதல், மாதிரிகளைத் திட்டமிட்டுத் தேர்ந்தெடுத்தல், கள விசாரணை முறைகளை அமைத்தல், மத்திய, ராஜ்ஜிய, மாவட்ட சர்க்கார் அலுவலகங்களால் திரட்டப்படும் விரிவான தகவல்கள், சர்வதேச நிறுவனங்களால் திரட்டப்படும் விவரங்கள், தொழில் நிலையங்களின் கணக்குப் புத்தகங்களிலிருந்து (Books of Account) கிடைக்கும் அத் தொழில்களைப்பற்றிய செய்திகள், தனியார் துறைகளிலும் ஆராய்ச்சியாளர்களாலும் திரட்டப் பட்டுப் பெருகிவரும் விவரங்கள் முதலியன. சுருங்கக் கூறின், புள்ளியியல் விவரங்களின் மூலங்கள் மனிதனின் எல்லாச் செயல் களுடனும் தொடர்புற்று இருப்பவைகளாகும். எனவே, இவை யெல்லாவற்றையும் ஒருங்கே ஆராய்வது இயலாத காரியம். இங்கு நாமாகவே நேராக முதனிலை விவரங்களைத் திரட்டுவதற்கும் பிறரால் திரட்டப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்துவதற்குமுள்ள வித்தியாசங்களைப்பற்றிமட்டும் கூறுவோம். அதுகால், அத்துடன் தொடர்புள்ள மற்றச் சில பிரச்சினைகளைப்பற்றியும் கூறுவோம்.

நேராக விவரங்களைப் பெறுதலும் பிறரால் திரட்டப்பட்டுப் பதிவு செய்யப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தலும்

குறித்த பிரச்சினைகளுக்குத் தற்சார்பற்ற முறையில் முடிவு காண வேண்டிய நிலை, ஓர் ஆராய்ச்சியாளருக்கோ நிர்வாகிக்கோ ஏற் படும். அப்பொழுது அவர் அந்தப் பிரச்சினைக்கென்றே தனியான ஒரு திட்டமிட்டு, விவரங்களைத் திரட்டி முடிவு காணக்கூடும். பருப்பொருள் (physical) ஆராய்ச்சியாளர் ஒரு சோதனையை நிகழ்த்திப் பார்க்கலாம்; சமூகவியல் விஞ்ஞானி ஒரு கள விசாரணை நடத்தலாம்; துய்ப்போரின் தேவைகளை அறிவதற்காகத் தொழி லதிபர் ஒரு மார்க்கட் விசாரணையை நிகழ்த்தலாம்; அல்லது, இந்த எல்லா நிலைகளிலுமே, பிறரால், வேறு நோக்கத்தோடு திரட்டப் பட்ட விவரங்களையும் பயன்படுத்தலாம். பருப்பொருள் விஞ்ஞானி இதேபோன்ற பிரச்சினைக்கு உதவக்கூடிய மற்ற விஞ்ஞானி களின் விவரங்களைப் பார்க்கலாம்; சர்க்கார் நிலையங்களால் திரட்டப் பட்ட பிறப்பிறப்பு விவரங்களையோ (vital statistics), கூலி செலுத்தின (payment of wages) விவரங்களையோ சமூகவியல் விஞ்ஞானி பயன்படுத்தலாம்; துய்ப்போரின் நிதிகளின் தன்மை களைப்பற்றியும், அவர்களின் விருப்பங்களைப்பற்றியும் முன்பே திரட்டப்பட்ட விவரங்களும், சர்க்காரால் திரட்டப்பட்ட சம்பள விவரங்களும், தனக்குத் தேவையான எல்லா அத்தாட்சிகளையும்

தருவதை, ஒரு தொழிலதிபரும் காணக்கூடும். எனவே, ஒரு புறம் நேராக விவரங்களைப் பெறுதலும், மற்றொருபுறம் பிறரால் திரட்டப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்துதலும் உள்ளன. இவைகளில் எது சிறந்தது என்று கூறிவிடுவது முடியாது. ஆராய்ச்சித் துறைகளையும், முடிவு காணவேண்டிய முறைகளையும் பொறுத்து எந்த முறையும் நல்லதாக அமையும் என்று கூறலாம். பொதுவாகப் பருப்பொருளறிஞர், சோதனை முறையையே அதிகமாகக் கையாளுகிறார் என்று கூறலாம்.[2] பொதுவாகச் சமூகவியல் விஞ்ஞானி பொதுப்படையாகப் பதிவு செய்யப்பட்ட விவரங்களையும், தனித்துறையாரால் பதிவு செய்யப்பட்ட விவரங்களையும் ஆராய்கிறார்; அண்மையில் அவரும் நுட்பமான விசாரணைகளை நிகழ்த்தி முதனிலை விவரங்களைப் பெற்றுவருகிறார். தொழிலதிகாரி சாதாரணமாகத் தொழில் விவரங்களின் பதிவு நூல்களையும், சர்க்காரால் வெளியிடப்படும் விவரங்களையும் பயன்படுத்துவார்; அண்மையில் துய்ப்போர் விருப்பங்களை ஆராய்வதற்கான விசாரணைகளைத் திட்டமாக்கி, அதிகமாக அவைகளை நடத்தி, நேரிடையாகவே விவரங்களைத் திரட்டியும் வருகிறார்.

சமூகவியல் துறைகளிலும் நிருவாகத்துறைகளிலும் (பொது, அல்லது தனியார்) உள்ள ஓர் பொதுவான சிறப்பியல்பு, அவர்கள், மற்றவர்கள் சேகரித்த விவரங்களையும், தனியான ஆராய்ச்சிகளை நடத்தித் தாமே பெறும் விவரங்களையும் பயன்படுத்துவதேயாகும். சமூகம் முழுவதற்கானதோ, அல்லது பெரிய பகுதிகளின் பொருளாதார நிலைக்கோ உரியதான விவரங்கள் தேவைப்படுமாயின், அவ்வகை ஆராய்ச்சிகளுக்கு அரசாங்கத்தாரால் வெளியிடப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தியேதான் ஆகவேண்டும். பொது நிறுவனங்களிலிருந்து விவரங்களைப் பெற்றுத்தான் ஆகவேண்டும் என்பது போன்ற நிலை பருப்பொருள் ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கு என்றும் ஏற்படாது எனலாம். சமூகவியல் துறையிலும், பொருளாதாரத் துறையிலும் ஏற்படும் நடவடிக்கைகளை அறிந்துகொள்வதற்காக ஆவலுடன் ஆராய்ச்சியில் ஈடுபடும் ஆய்வாளர்களின் பற்பல தேவைகளுக்கு முழுவதும் உதவுவதாக அரசாங்கத்தார் விவரங்கள் அமைந்ததில்லை என்றே கூறவேண்டும். சமூக விஞ்ஞானத் துறைகளில் அண்மையில் ஏற்பட்டுள்ள முன்னேற்றங்களில் மிக முக்கியமானதொன்று—குறித்த பிரச்சினைகளுக்கு

[2] இப்படிக் கூறுவதன் முழுப்பொருளையும் அறிதல் மிக அவசியம். தனக்கு முன்னோர்களும், தன்னுடன் வாழ்பவர்களும் திரட்டி வைத்துள்ள விவரங்களை என்றும் பருப்பொருள் விஞ்ஞானி பயன்படுத்தித்தான் வந்துள்ளார் என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டும். பலரால் திரட்டப்பட்டுச் சரிபார்க்கப்பட்ட விவரக் குவியல்களிலிருந்துதான் முன்னேற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது எனலாம். என்றாலும், குறித்த பிரச்சினைகளுக்கு நேர்முகமான தகவல்களைத் திரட்டுவது, எல்லை-நிலை ஆராய்ச்சிகளில் (Borderline Studies) இன்றியமையாததாகும். பருப்பொருள் ஆராய்ச்சியில் தகுந்த சோதனைகளை அமைத்தல் ஒரு முக்கிய முறையாகும்.

முடிவு காண்பதற்கான விவரங்களை மாதிரி முறைகளால் பெறுவதே. இது குறிப்பாகச் சமூகவியல், சமூக உளவியல் துறைகளுக்கு மிக்க பொருத்தமானதாகும். பொருளாதார விஞ்ஞானி அன்றும், இன்றும், என்றுமே, அரசாங்கப் புள்ளிவிவரங்களைப் பெரிதும் பயன்படுத்துபவராகவே உள்ளார். ஆனால், இத் துறையிலும் முதனிலை விவரங்களைத் திரட்டுவதற்கான விசாரணைகள் அதிகமாகவும், பயன் பெருக்குபவையாகவும் செயல்பட்டுவருகின்றன. மார்க்கட் தேவைகளைச் செவ்வனே அளவிடுவதற்காகத் தொழிலதிபரும் இன்று, பிரதிநிதியான மாதிரிக் குழுக்களை ஆராய்ந்து நேராக விவரங்களைத் திரட்டுவதில் அதிகமாக ஈடுபட்டுவருகிறார்.

இந்த நூலைப் படிப்போர்க்கு மேலே கூறப்பட்ட இருவகை வழி விவரங்களையும் பயன்படுத்தவேண்டிய நிலை ஏற்படும். அதாவது, முதனிலையாகத் திரட்டப்பட்ட விவரங்கள்; தனியார் அல்லது பொதுத்துறை நிறுவனங்களிலிருந்து திரட்டப்பட்ட விவரங்கள். முதனிலை விவரங்களை ராண்டம் மாதிரிகளிலிருந்து பெறுவதற்கான முறைகள் 19ஆம் அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளன; ராண்டம் மாதிரிகளானல்தான் அவைகளிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளைப் புள்ளியியல் முறையில் பொதுப்படையாக்கிக் கூறுவது சாத்தியம். முன்பே படித்திராவிட்டால், இப்பொழுதாவது அந்த அதிகாரத்தின் துவக்கப் பகுதியைப் படிக்கலாம். ஆனால், அங்கும் நாம் நுணுக்கமான பல செய்திகளைப்பற்றிக் கூறவில்லை—தனிமனிதர்களின் நடத்தையையும், கூட்டாக அவர்கள் நடத்தையையும் கவனித்தல், அவர்களின் பண்புகளையும் செயல்களையும் அளவிடுதல், அவர்களின் அனுபவங்களைப்பற்றியும் கருத்துகளைப்பற்றியும் மனப்பாங்குகளைப்பற்றியும் விவரங்களைத் திரட்டுதல்—முதலியனவற்றைப்பற்றிக் கூறவில்லை. அண்மையில் இக் கலைகளில் நிகழ்ந்துள்ள முன்னேற்றங்கள் வியக்கத்தக்கவையாகவும், பிற்காலத்துக்குப் பெரும் உதவி புரிபவையாகவும் உள்ளன. இதற்கு முன்பு தாமாக நிகழ்ந்த சந்திப்புகளாலும், சொந்தமான, சார்புற்ற மதிப்பீடுகளாலும் மட்டுமே மனிதர்களுடைய பொருளாதார, சமூகவியல் தொடர்புகளின் விவரங்கள் திரட்டப்பட்டுவந்தன; சமீப காலங்களில் அம் முறைகள் நீக்கப்பெற்று மனிதர்களின் நடத்தை, மனப்பாங்குகள், குறிக்கோள்கள் முதலியவற்றை ஆராய்வதற்குச் சார்பற்ற முறைகள் பல வகுக்கப்பட்டுள்ளன.

பேட்டி காண்பதற்கும், கேள்வித்தாள் தயாரிப்பதற்குமான முறைகளை விளக்குவதற்காக நான் ஒருசில எளிதான விதிகளைக் குறிப்பிடுவேனாகில், இந் நூலைப் படிப்பவர்களுக்கு நான் எவ்வகைப் பயனையும் ஈந்தவனாகமாட்டேன். அவைகள் எளிதானவைகளே அல்ல. 'நல்ல முறையில் அமைக்கப்பெற்ற எடுகோள்களிலிருந்து

தான் நல்ல கேள்வித்தாள் வளரும்......ஆராய்ச்சிக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட பொருளில் ஆழ்ந்த அனுபவம் தேவை ; எழும் பிரச்சினைகளைக் கூட்டாளிகளுடன் கலந்தாராயவேண்டும் ; ஊன்றிப் பல நூல்களைப் படிக்கவேண்டும். இவற்றையெல்லாம் சரிவரச் செய்தாலன்றிக் கேள்வித்தாள் நல்ல முறைல் அமையும் என்பதற்கில்லை' என்று கூட் மற்றும் ஹாட் (Goode and Hatt) என்பவர்கள் கூறுவது மிகப் பொருத்தமானதாகும். இது பற்றிய தொழில்நுட்பமான பற்பல வெளியீடுகள் இப்பொழுது கிடைக்கின்றன.[3] அவைகளை நன்கு படித்து ஆராய்ந்த பிறகே, முதனிலை விவரங்களைத் திரட்டத் தொடங்க முயல்வது நல்லது.

பிறரால் திரட்டப்பட்டுப் பதிவாயுள்ள விவரங்களைப் பயனுக் குதல்

சமூகவியலறிஞரோ, அல்லது தொழிலதிபரோ தமக்குத் தேவையான விவரங்களைப் பெறுவதற்குப் பற்பல திரட்டுகளைக் கவனிக்கவேண்டி யிருக்கும் ; அவைகளின் ஏற்புடைமை (reliability) அளவுகளும் வேறுபட்டிருக்கும். அவைகளில் பலவற்றை இங்குக் குறிப்பிடுகிறோம் : தொழில் நிறுவனங்களின் கணக்குகள் முதலியன ; தொழிலாளர்கள் சங்கங்களின் கணக்குகள் ; நிருவாக வழியில் சர்க்காரால் திரட்டப்பட்ட விவரக் குவியல்கள் [இன்டர் ஸ்டேட் காமர்ஸ் கமிஷன், பியூரோ ஆஃப் இன்டர்னல் ரெவின்யூ (Inter-state Commerce Commission, Bureau of Internal Revenue) போன்றவைகள்]; பிறப்பிறப்பு விவரங்கள், கல்வித் துறை விவரங்கள், மோட்டார் கார்களின் எண்ணிக்கைபோன்று சர்க்காரால் பதிவு செய்யப்படும் திரட்டுகள் ; பொதுத்துறை நிறுவனங்களின் வெளியீடுகள் (பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ், பியூரோ ஆஃப் லேபர் ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ்—Bureau of Census and Bureau of Labour Statistics போன்றவைகள்); ஆய்வுக் காகவும் ஆராய்ச்சிக்காகவும் ஏற்பட்ட பொது நிறுவனங்களின்

[3] பிளான்கென்ஷிப், எ. பீ. (Blankenship, A. B.) 'How to Conduct Consumer and Opinion Research' (New York, Harpers, 1946); ஃபெஸ்டிங்கர் எல்., மற்றும் காட்ஸ், டீ. (Festinger, L. and Katz, D.), 'Research Methods in the Behavioral Sciences.' (New York, Dryden Press, 1953), முக்கியமாக 8ஆம் அதிகாரமும் உடனுள்ள துணை நூல் பட்டியலும்; கூட், டபிள்யூ. ஜெ. மற்றும் ஹாட், பி. கே. (Goode, W. J. and Hatt, P. K.), 'Methods in Social Research' (New York, McGraw-Hill, 1952), அதிகாரம், 11-13; யஹோதா, எம். டாய்ஷ், எம். மற்றும் குக், எஸ். டபிள்யூ. (Jahoda, M., Deutsch, M. and Cook, S. W.), 'Research Methods in Social Relations' (New York, Dryden Press, 1951); கடோனு, ஜி. மற்றும் முல்லர், ஈ. (Katona, G. and Mueller, E.), 'Consumer Attitudes and Demand' (Survey Research Center, University of Michigan, 1953); லைகர்ட், ஆர். (Likert, R.) 'The Sample Interview Survey' என்ற கட்டுரை. இது, டென்னிஸ், டபிள்யூ. (Dennis, W.) என்பவரால் பதிப்பிக்கப் பட்ட 'Readings in General Psychology' என்ற நூலில் உள்ளது. (New York Prentice - Hall, 1949); பார்டென், எம். பி. (Parten, M. B.), 'Surveys, Polls and Samples' (New York, Harpers, 1950), இவைகளையும் மற்ற நூல்களையும் பார்க்க.

நாட்டின் பொருளாதார விவரங்களைத் தரும் தொடர்ச்சியான வெளியீடுகள் (ஆஃபீஸ் ஆஃப் பிஸினஸ் எக்கனுமிக்ஸ் ஆஃப் தி டிபார்ட்மென்ட் ஆஃப் காமர்ஸ், டிவிஷன் ஆஃப் ரிஸர்ச் அண்டு ஸ்டாடிஸ்டிக்ஸ் ஆஃப் தி போர்ட் ஆஃப் கவர்னர்ஸ் ஆஃப் தி ஃபெடரல் ரிஸர்வ் ஸிஸ்டம்—(The Office of Business Economics of the Department of Commerce, The Division of Research and Statistics of the Board of Governors of the Federal Reserve System) போன்றவைகள்;[4] ஐக்கிய நாட்டு நிறுவனம் மற்றும் பல சர்வதேச நிறுவனங்களின் புள்ளிவிவரத் திரட்டுதல்கள்; தனியார் ஆராய்ச்சித் துறையைச் சார்ந்த நிறுவனங்களின்—தி நேஷனல் பியூரோ ஆஃப் எக்கனுமிக் ரிஸர்ச் (The National Bureau of Economic Research), தி ப்ரூக்கிங்க்ஸ் இன்ஸ்டிட்யூஷன் (The Brookings Institution), தி நேஷனல் இண்டஸ்ட்ரியல் கான்ஃபரன்ஸ் போர்ட் (The National Industrial Conference Board), தி ட்வென்டியத் ஸெஞ்ச்சுரி ஃபண்ட் (The Twentieth Century Fund) முதலானவைகள்—வெளியீடுகள்; மற்றும் பல தனிப்பட்ட பிரச்சினைகளுக்கான விவரங்களைத் தரும் நிறுவனங்கள்.

விவரங்கள் கிடைக்கக்கூடிய எல்லா மூலங்களைப்பற்றியும் சுருங்கக் குறிப்பிடுவதென்பது முடியாத ஒன்று; இருப்பினும், சமூக, பொருளாதார, தொழில் துறைகளுக்கான புள்ளிவிவரங்களைத் திரட்டி வெளியிடுகிற நூல்கள், நிறுவனங்களைப்பற்றிய சில தகவல்களைத் தருவது பயனளிக்கும்; இவை பெரும்பாலும் எளிதாகக் கிடைக்கக்கூடியவை, விரிவானவைகளுங்கூட. இவற்றில் பெரும்பாலானவை அரசாங்க வெளியீடுகளே; இவைகளில் பல இரண்டாம் நிலை விவரங்களைத் தரும் மூலங்கள் என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும்; என்றாலும், ஏற்புடைமையுள்ள மூலங்களே. (இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் எவை என்பதைப் பற்றிய விளக்கம் அடுத்த பகுதியில் உள்ளது.)

அமெரிக்க நாடுகள்

பத்தாண்டுக்கொருமுறை, ஐந்தாண்டுக்கொருமுறை, ஆண்டறிக்கை, அல்லது எப்பொழுதாவது வெளிவருபவை

Agricultural Statistics, U.S. Bureau of Agricultural Economics (Annual)

[4] மத்திய சர்க்காரால் வெளியிடப்படும் புள்ளிவிவரங்களைப்பற்றிய விளக்கமான ஆராய்ச்சியை, ஹாஸர், பி. எம். மற்றும் லியோனர்ட், டபிள்யூ. ஆர். (Hauser, P. M. and Leonard, W. R.) என்பவர்களின் நூலான 'Government Statistics for Business Use' (New York, Wiley, 1946) என்பதிலும்; மில்ஸ், எஃப். ஸி. மற்றும் லாங்க், ஸி. (Mills, F. C. and Long, C.) என்பவர்களின் நூலான 'The Statistical Agencies of the Federal Government' (New York, National Bureau of Economic Research, 1949) என்பதிலும் காணலாம். மத்திய சர்க்காரின் புள்ளிவிவரத் திரட்டு முறைகளைப்பற்றிய முக்கியமான குறிப்புகளை மில்ஸ் மற்றும் லாங் (Mills & Long) நூலின் 9-15 பக்கங்களில் காணலாம்,

Annual Report, U.S. Comptroller of the Currency

Annual Report, U.S. Treasury Department

Annual Survey of Manufactures, U.S. Bureau of the Census

Census of Agriculture, U.S. Bureau of the Census (Quinquennial)

Census of Business, U.S. Bureau of the Census (Quinquennial)

Census of Manufactures, U.S. Bureau of the Census (Quinquennial)

Census of Population, U.S. Bureau of the Census (Decennial)

Economic Almanac, National Industrial Conference Board, New York, Crowell (Annual)

Economic Report of the President, U. S. Council of Economic Advisers (Annual)

Foreign Commerce and Navigation of the United States, U.S. Bureau of the Census (Annual)

Handbook of Labour Statistics, U.S. Bureau of Labour Statistics

Historical Statistics of the United States, 1789—1945, U.S. Bureau of the Census, Washington, Government Printing Office, 1949

Minerals Yearbook, U. S. Bureau of Mines

National Income, 1954 edition, U.S. Office of Business Economics (Supplement to the *Survey of Current Business*)

Statistical Abstract of the United States, U.S. Bureau of the Census (Annual)

Statistics of Income, U. S. Bureau of Internal Revenue (Annual)

Vital Statistics of the United States, National Office of Vital Statistics (Annual)

அமெரிக்க நாடுகள்

மூன்று மாதத்திற்கொருமுறை அல்லது மாதந்தோறும் வெளிவருபவை

Abstract of Reports of Condition of National Banks, U.S. Comptroller of the Currency (Quarterly)

Construction Review, U.S. Departments of Labor and Commerce (Monthly)

Current Population Reports, U.S. Bureau of the Census (Monthly)

Economic Indicators, U. S. Council of Economic Advisers (Monthly: *Historical and Descriptive Supplement*, prepared by the Staff of the Joint Committee on the Economic Report and the U.S. Office of Statistical Standards, 1953)

Federal Reserve Bulletin, Board of Governors, Federal Reserve System (Monthly)

Monthly Labor Review, U.S. Bureau of Labor Statistics (Monthly)

Monthly Vital Statistics Report, National Office of Vital Statistics

Survey of Current Business, U.S. Office of Business Economics (Monthly; biennial supplement)

சர்வதேச வெளியீடுகள்

Commodity Trade Statistics, United Nations Statistical Office (Quarterly)

Demographic Yearbook, United Nations Statistical Office

Monthly Bulletin of Statistics, United Nations Statistical Office

Statistical Yearbook, United Nations Statistical Office

Woytinsky, W. S. and Woytinsky, E. S., *World Population and Production*, New York, The Twentieth Century Fund, 1953

Yearbook of Food and Agricultural Statistics, United Nations Food and Agricultural Organization

Yearbook of International Trade Statistics, United Nations Statistical Office

முதனிலை, இரண்டாம் நிலை மூலங்கள் (Primary and Secondary sources) : பதிவு செய்யப்பட்ட விவரங்களைப்பற்றிக் கூறும்பொழுது, அவை முதனிலை விவரங்களா, அல்லது இரண்டாம் நிலை விவரங்களா என்பதை அறிந்துகொள்ளவேண்டும். தன் பொறுப்பில் முதலில் திரட்டப்பட்ட விவரங்களை வெளியிடுபவைகளை (அல்லது கிடைக்கும்படி செய்பவை) 'முதனிலை மூலங்கள்' என்போம். ஒரு முதனிலை மூலத்தினின்று விவரங்களை மறுபடியும் வெளியிடுபவைகளை 'இரண்டாம் நிலை மூலங்கள்' என்போம்; இங்கு வெளியிடுபவர் விவரங்களைத் திரட்டுவதற்கு பொறுப்பாளிகள் அல்லர். பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ் என்ற நிறுவனத்தின் பல வெளியீடுகள் முதனிலை மூலங்களே; 'தி ஸ்டாடிஸ்டிகல் அப்ஸ்ட்ராக்ட்' (The Statistical Abstract), நேஷனல் இண்டஸ்ட்ரியல்

கான்ஃபரென்ஸ் போர்டாரின் 'தி எகனமிக் ஆல்மனக்' (The Economic Almanac of the National Industrial Board), ஐக்கிய நாடுகளின் 'தி ஸ்டாடிஸ்டிகல் இயர்புக் (The Statistical Year-book) என்பவை இரண்டாம் நிலை மூலங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள். முதனிலை மூலங்களிலுள்ள விவரங்களின் ஏற்புடைமை அதிகம்தான் என்பது தெளிவு ; ஏனென்றால், பார்த்தெழுதுவதால் (copying) நேரும் பிழைகளுக்கு இடமிருக்காது : கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின் திட்டமான பொருள்கள், அவைகளைத் திரட்டுங்கால் இருந்த சூழ்நிலை, அவைகளை விளக்கும்பொழுது நாம் மனத்தில் வைக்கவேண்டிய விதிகள் முதலியவைகளெல்லாம் பதிப்பாசிரியர்கள் நன்கு உணர்ந்திருப்பார்கள்; எனவே, படிப்பவர்களுக்கும் அவற்றை விளக்கியிருப்பார்கள். ஆக, விவரங்களின் மூலம், முதனிலையானதா, இரண்டாம் நிலையானதா என்று அறியவேண்டிய அவசியமுள்ளது ; மற்றும் விவரங்களைத் தொகுத்த நிறுவனத்தின் பொதுவான ஏற்புடைமை என்னவென்பதையும் அறிந்துகொள்ளவேண்டும். தெரிந்தோ, தெரியாமலோ நிறுவனத்திலேயே இருக்கக்கூடிய ஒரு சார்புத் தன்மையும் விவரங்களை ஏற்புடைமையற்றதாகச் செய்யக் கூடும் ; மற்றும் தேர்ச்சியற்ற முறைகளில் திரட்டப்பட்டாலும் விவரங்கள் ஏற்புடைமையற்றனவாகப்போகலாம். அதுபோன்ற ஏற்புடைமையற்ற நிலை இருப்பின், அதனையும் அறியவேண்டும்.

வெளியிடப்பட்ட விவரங்களின் பொருள்களைப்பற்றி: பதிவு செய்யப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்துவதற்கு முன்பு முதலாவதாக அவைகளின் திட்பமான பொருளை அறியவேண்டும்; அதற்கு எந்த அலகுகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளார் என்பதனையும், விவரங்களின் ஏற்புடைமை அளவையும் அறியவேண்டும்.

(க) **அலகின் விளக்கம்:** ஒன்று, இரண்டு என்று எண்ணுவதைப் போன்ற அடிப்படை, அளவின வேலைகளிலெல்லாம் நிகழக்கூடியது; எதை நாம் எண்ணுகிறோம் என்பதை நன்கு அறியவேண்டுமாதலால், அலகின் திட்பமான விளக்கம் அவசியமாகிறது.

ஜி. பி. வாட்கின்ஸ் (G. P. Watkins) என்பவர் அலகுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பிரிவுகளாகவும் உட்பிரிவுகளாகவும் வகுத்துள்ளார். இந்த முறைதான் புள்ளியியல் அலகுகளைப் பிரிவுபடுத்துவதில் மிகுதியாகப் பயனளிக்கக்கூடியது.

புள்ளியியலலகுகளின் பாகுபாடு

(1) தனிப்பொருள்கள் :

(அ) இயற்கையானவை—மனிதன், பன்றி, கோழி இவை போன்ற இயற்கையலகுகளை அடையாளம் காணுதல்

எளிது; செயற்கை முறை அலகுகளின் பொருள் வழக்கத்தை (convention) ஒட்டியதாகுமாதலால், அவைகளை எண்ணுதல் இயற்கை அலகுகளை எண்ணுவதைப்போல் அவ்வளவு திருத்தமாக இராது.

(ஆ) தயாரிக்கப்பட்டவை — பொறிசெய் பொருள்களும் கருவிகளும். எடுத்துக்காட்டுகள்—செருப்பு, கதவு, நாற்காலி.

(2) அளவை அலகுகள் (Units of measurement):

(அ) பௌதீக அளவை அலகுகள். எடுத்துக்காட்டு—டன், காலன், கிலோவாட் ஹவர் (kilowatt hour).

வழக்கத்தையொட்டியே இவைகள் பயன்படுகின்றன. ஒரே சொல்லைப் பல பொருள்களைக் குறிக்கப் பயனுக்குவதும் உண்டானதால், முடிவுகளைத் திட்டவட்டமாக விளக்கிக் கூற முடிவதில்லை.

(ஆ) பண சம்பந்தமான அலகுகள் (Pecuniary units): வியாபார மதிப்புகளான டாலர், பௌண்ட், ஃபிரான்க் போன்றவை. இவைகள் அவ்வளவு திருப்திகரமானவையல்ல என்ருலும், புள்ளியியலறிஞர் இவைகளைப் பொதுவான வியாபார ஆய்வுகளுக்கும் பொருளாதார ஆராய்ச்சிகள் பலவற்றிற்கும் பயன்படுத்தியே ஆக வேண்டும். பொதுவான விலைவாசிகளின் மாறுதல்களால் இந்த அலகின் மதிப்பும் மாறுபடுவது இந்த அலகின் ஒரு பெரும் குறைதான். விலைகளின் குறியீட்டெண்கள் பணம் சம்பந்தமான அலகுகளின் மாறும் தன்மையைத் திருத்துவதாக அமைகின்றனவென்பது உண்மையே; ஆனுலும், இவ்வகை அலகுகளின் எல்லாக் குறைகளையும் அவைகள் நீக்கிவிடுவதில்லை.

தொடக்கநிலை ஆய்வாளர்களால் எந்தப் பொருளில் ஓர் அலகு குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதோ, அதே பொருளிலேயே, நாம் பின்பும் அதனைப் பயன்படுத்தவும் விவரிக்கவும் வேண்டுமென்பதைக் கவனித்தல் நல்லது. குறிப்பிட்ட ஒரு சமயத்தில் அமெரிக்காவிலிருக்கும் பொறிவழித் தொழிற்சாலைகளின் (manufacturing establishments) எண்ணிக்கையை, சென்ஸஸ் தகவல்களிலிருந்து எடுத்தோம் என்போம்; அப்பொழுது, அதன் திருத்தமான பொருளை நன்கு கவனிக்கவேண்டும். ஏதாவது சந்தேகம் இருப்பின், தொடக்க ஆய்வாளர் தந்துள்ள விளக்கங்களையும் உடன் வெளியிடுவது நல்லது.

(ங) விவரங்களிலுள்ள பிழை அளவை அறிதல்: எந்த விவரத் தொகுப்பும் பிழைகளற்று இருக்கும் என்று கூற முடியாது. பிழைகள் பல வழிகளில் நேரலாம்—திருத்தமற்ற தொகுப்பு முறைகளாலும், பதிவு செய்யுங்கால் ஏற்படும் பிழைகளாலும், சந்தேகமான மற்றும் ஒருபுறச் சார்புற்ற கேள்விகளாலும், அல்லது பட்டியல் அமைத்தல், கணக்கிடுதல் முறைகளாலும்—பிழைகள் ஏற்படக்கூடும். நான்கு அல்லது ஐந்து ஸ்தானங்களுக்குத் திருத்தமாக இருப்பதாகக் காணப்படும் விவரங்கள் உண்மையில் தோராயமான மதிப்பீடுகளாகவே இருக்கலாம். இதுபோன்ற பிழைகள் விவரங்களில் இருப்பதை அறியாமல் அவைகளைப் பயன்படுத்திப் பொதுப்படை முடிவுகளை நிறுவுதல் ஆபத்தாக முடியலாம்; அவைகளை வைத்துக்கொண்டு எடுகோள்களைச் சோதிப்பதும், முடிவுகளை அமைப்பதும் திருத்தமற்ற ஆராய்ச்சி செய்வதுபோலாகும். சாதாரணமாக, முதனிலை மூலத்தில், அதன் விவரங்களின் ஏற்புடைமையைப்பற்றிய குறிப்பொன்றிருக்கும்; அதனை இரண்டாம் நிலையிலும் அப்படியே கூறிவிடவேண்டும். இயன்ற அளவிற்கு ஏற்புடைமையை அளவின வழியாகக் கூறுவது நல்லது; ஆனால், இது ஊக அளவை மாதிரிகளிலிருந்து கிடைத்த விவரங்களுக்குமட்டுமே சாத்தியம். பிழையின் அளவைக் குறிப்பிட முடியாமல் போயினும், பண்பின வழியில் (quantitative terms) விவரங்களில் வைக்கக்கூடிய நம்பிக்கையைப்பற்றிக் குறிப்பிடலாம்.[5]

இன்றைக்குப் புள்ளியியல் தொகுப்புகள் ஏராளமாக உள்ளன; அவைகளின்மேல் நமக்கு நம்பிக்கையும் அதிகமாயுள்ளது. எனவே, இந்த நிலையில், வெளியிடப்படும் விவரங்கள் ஏற்புடையனவாக இருக்கவேண்டியதும் மிக்க அவசியமே. இன்று எந்தத் துறையிலும் 'அளவிட வேண்டும்' என்ற அவா—எண்ணிப்பார், அளந்து பார், அளவின வழியில் பதிவு செய் என்ற அவா—மிகுதியாகப் பரவியுள்ளது. தனித்துறையாரும் அரசாங்கத்தாரும் இந்த அவாவினால்

[5] சில புள்ளிவிவரங்களுக்கு ஏற்புடைமை அளவுகளை அமைக்க முயல்வது தவறான வழியில் செல்வதாகலாம். வருமானம், சொத்து முதலிய புள்ளிவிவரங்களைப்பற்றி எர்ல் ஆர். ரால்லீப் (Earl R. Rolph) என்பவர் கீழ்வருமாறு கூறியுள்ளார்: 'நாட்டு வருமானத்தின் ஒரு பிரிவின் (national income component) ஏற்புடைமையை அறியவேண்டுமானால், தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மூலங்களையும், மதிப்பிடப் பயன்படுத்திய முறைகளையும் நன்கு ஆராயவேண்டும் என்று மில்டன் கில்பர்ட் (Milton Gilbert) கூறியுள்ளார். யானும் அது நம்பக்கூடியதே என்கிறேன்.' இது மற்றப் பல புள்ளிவிவர வெளியீடுகளுக்கும் பொருந்தும் என்பது தெளிவு. அதுபோன்ற நிலைகளில், மூலங்களையும் முறைகளையும்பற்றிய முழு விவரங்களையும் வெளியிட்டிருக்கவேண்டும்.

இந்தப் பகுதியைப்பற்றிப் பொருளாதார, வியாபாரத்துறை மாணவர்கள், பேராசிரியர் ஆஸ்கர் மார்க்கென்ஸ்டர்ன் (Professor Oskar Morgenstern) அவர்களின் 'On the Accuracy of Economic Observations' என்ற நூலைப் (Princeton University Press, 1950) பயனுறப் படிக்கலாம்.

தூண்டப்பட்டுச் செயலாற்றி வருகின்றனர். அவைகளின் விளைவாக ஒரு பகுதியில் ஏற்கக்கூடியதான, நன்கு விளக்கப்பட்ட விவரங்களும் கிடைக்கின்றன; மற்றொரு பகுதியில் ஏற்கமுடியாத, திருத்தமற்ற முடிவுகளாகவும் கிடைக்கின்றன. இதுபோன்ற விரிவான அளவின விவரத் திரட்டுகளைப் பார்ப்பது புள்ளியியல் ஆய்வாளருக்கு மிக மகிழ்ச்சியுண்டாக்கும்; என்றாலும், அவைகள் நன்கு பயன்பட வேண்டுமாயின், அவைகளைப்பற்றிய முழுத் தகவல்களும் உடன் கொடுக்கப்படுதல் மிக அவசியம். அப்பொழுதுதான், விவரங்களைப் பயன்படுத்துவோர், அவைகளின் ஏற்புடைமையை நன்கு அறிய முடியும்.

வெளியிடப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தும்பொழுது மற்றும் பல தகவல்கள் தேவைப்படலாம். சதவீதங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; ஆனால், எந்த அடிப்படையில் அவைகள் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன என்ற விவரம் இராது! காலவழியில் நிகழும் ஒரு மாறியின் மதிப்பு விவரம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; ஆனால், அது எந்தக் கால அளவிற்குப் பொருத்தமானது—மாதத்தில் ஒரு குறித்த நாளிற்கா, சாதாரண ஆண்டிற்கா, அல்லது நிதியாண்டிற்கா (fiscal year) அல்லது எல்லா நாட்களின் சராசரிக்கா—என்ற விளக்கம் இராது. ஒரு குறித்த விலை (price quotation) கிடைக்க மார்க்கெட்டில் நிகழ்ந்த வியவகாரங்களைப் பற்றிய (transactions) குறிப்புகள் இல்லாமலிருக்கும். இவை போன்ற எளிதான செய்திகளும் குறிப்பிடப்படாமல் விட்டுப்போயிருக்கலாம். ஆனால், பொதுவாகவே, எல்லாத் துறைகளிலும் வெளியிடுதலுக்கும் விளக்கம் தருதலுக்குமான முறைகள் மேன்மையாக்கப்பட்டு வருகின்றன. மேலும், முன்னேற்றங்கள் ஏற்படுவதற்குப் பொறுப்பான நிறுவனங்களை நல்ல முறையில் விவரங்களை வெளியிடுமாறு செய்ய வேண்டியது பகுத்தறிகிற ஆராய்ச்சியாளர்களுடைய மற்றும், உரிமையோடு கேட்கக்கூடியவர்களுடைய கடமையும் ஆகும்.

பின் இணைப்பு B

புள்ளியியல் கணக்கிடுதல்களைப்பற்றிய குறிப்புகள்[1]

புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகளில் கணக்கிடுதல் மிக அதிகமாகவே இருக்கும் என்பது வெளிப்படை. இவைகளை விரைவாகவும் பிழையில்லாமலும் குறித்த ஒரு பிரச்சினையில் செய்யவேண்டுமென்றால், அதற்காக நல்லதொரு திட்டமிட்டு, முறை விவரங்களை நன்றாக வகுக்கவேண்டும். இதனைச் செயலாக்க ஆராய்ச்சியைத் தொடங்கும் முன்பே, செய்ம்முறைகளை நன்கு கவனித்து, தகுந்த வேலைத் தாள்களைத் (worksheets) தயாரித்துக்கொள்ளுதல் இன்றியமையாதது; செய்ம்முறையின் பற்பல கட்டங்கள் ஒன்றோடொன்று தொடர்புற்றிருத்தலும், அடிக்கடி நம் கணக்கு முடிவுகளைத் தணிக்கை செய்ய (check) வசதிகளை ஏற்படுத்திக்கொள்ளுதலும் அவசியம். கவனமற்ற ஏற்பாடு, கணக்கிடுதல்களின் வேகத்தையும் பிழையின்மையையும் நாசமாக்கிவிடும். முதல் நிலையிலேயே நன்றாகக் கவனித்து செய்த ஏற்பாடு, கணக்குகளின் திருத்தத்தை அதிகமாக்குவதோடு, அதற்காகச் செலவிடவேண்டிய காலத்தையும் குறைக்கும்; எனவே, முடிவில் மிக்க பயன் தரும்.

வேலையின் அமைப்பு ; வேலைத்தாள் (The Lay-out of Work ; the Worksheet)

பிற்பாடு செய்யவேண்டிய கணக்குகளுக்கு ஏற்றவாறு, கண்டறிந்த விவரங்களை அமைத்துக்கொள்வதே முதற்படியாகும். விவரங்களைப் பதிவாக்குவதற்கு முன்பே, அல்லது அவைகளை வேறு முதன்மையான அட்டவணைகளிலிருந்து எடுத்து மாற்றி அமைக்குமுன்பே, நாம் ஒரு பொதுவான செய்முறையை வகுத்திருக்கவேண்டும் ; அந்தச் 'சட்டத்'திற்குள் (framework) பிற்பாடு வரப்போகும் கணக்குப் படிகளுக்கும் இடம் இருக்கவேண்டும்.

[1] எஃப். ஸி. மில்ஸ், மற்றும் டீ. எச். டேவன்போர்ட் (F. C. Mills and D. H. Devenport) என்பவர்களால் எழுதப்பட்ட 'A Manual of Problems and Tables in Statistics' என்ற நூலிலிருப்பதையும் பயன்படுத்தி இந்தக் குறிப்பு எழுதப்பட்டுள்ளது. இந்த நூல் இப்பொழுது அச்சிலில்லை.

ஆராய்ச்சிக்குரிய நோக்கங்களையும், கண்டறிந்த விவரங்களின் தன்மையையும் பொறுத்தே இந்தச் செய்முறை இருக்கும். நோக்கம் எதுவானாலும், விவரங்கள் எவ்வகையாயினும், ஒரு நல்ல செய்முறை அமைத்தல் இன்றியமையாததே. 'சட்டம்' முன்பே தயாரிக்கப் பட்டிருந்தால், விவரங்களை முதல் நிலையிலேயே பட்டியல்களில் நேராக எழுதிவிடுவதும் எளிதாகும்; தனியே குறிப்பிட்டுப் பிறகு அட்டவணை அமைக்கவேண்டியிராது.

விரிவான கணக்கிடுதல்களுக்கு ஏற்பாடு செய்து, அவைகளை நன்கு செயலாக்க வேலைத் தாள்களைத் தயாரிப்பது மிக அவசியம். பிரச்சினையின் அளவையும், அதேபோன்ற மற்றச் சில பிரச்சினை களையும் ஆராயவேண்டுமா என்பதனையும்பொறுத்து வேலைத் தாள்கள் தயாரிப்பதில் நம் கவனமும் செல்லும். செயற் கழகத்தில் (organisation) ஒரே வகையான வேலைத் தாள்கள் தேவைப்படு மாயின் (ஒரே வகைப் பிரச்சினைகள் பலவற்றை ஆராயும்பொழுது) அவைகளுக்காக ஒரு தகுந்த மாடலைத் (model) தயாரித்து, தனியாக அச்சுத் தகடுகளைச் (plates) செய்துவைக்கலாம். இவ்வாறான தனி முறை தேவைப்படாதிருந்தால், சந்தையில் (market) கிடைக்கும் வேலைத் தாள்களை அப்படியே வைத்துக்கொண்டோ, அல்லது அவை களைச் சற்று மாற்றியோ பயன்படுத்தலாம். பற்பல பிரச்சினை களுக்குப் பயன்படக்கூடியதும், சாதாரணமாகப் பழக்கத்திலுள்ளதும் ஆன வேலைத் தாள்களைப் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிக்கூடத்தில் (laboratory) நிறைய வாங்கிவைத்தல் அவசியம். மூன்றாவதாக, வேலைத் தாள்களைத் தயாரிக்க, தனித்தாள்களில் நம்முடைய தேவைக் குத் தக்கவாறு கோடுகளைப் போட்டுப் பட்டியல்கள் அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

வரிசைகளையும் பத்திகளையும் சரிவர நம் தேவைக்கு ஏற்றவாறு கவனமாக அமைக்கவேண்டும். எல்லாப் பத்திகளுக்கும் திட்டமான, ஐயப்பாட்டிற்கிடமில்லாத தலைப்புகளைக் கொடுக்கவேண்டும்; இதைக் கவனமாகச் செய்தால், பிற்பாடு அந்தப் பட்டியல்களில் குறிக்கப் படும் தகவல்களைப்பற்றியோ பொருளைப்பற்றியோ சந்தேகம் ஏற் படாது. பிற்பாடு, குறிப்புகளை இவைகளிலிருந்து தேடவேண்டி யிருக்குமாதலால், பத்திகளை 1, 2, 3...என்று அடையாளமிடுவது நல்லது. கூட்டல் யந்திரத்தில் (Adding Machine) இந்த வேலைத் தாள்களை அப்படியே உள்ளுக்குள் பொருத்தமுடிகிற நிலைகளும் உண்டு; அப்பொழுது, அத் தாளின் மேலேயே அச்சிடப்பட்ட விவரங்கள் இடம் பெறும். இது பிற்பாடு செய்யவேண்டிய கணக்கு களுக்கும் தணிக்கைகளுக்கும் பயன்படும். கூட்டல் யந்திரத்தைப் பயன்படுத்தப்போவதானால், வேலைத் தாள்களை அதற்கேற்றவாறு மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். முதல்நிலை (primary)

புள்ளியியல் அளவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கான வேலைத் தாள்களின் அமைப்பைப்பற்றி முன்பே விளக்கியுள்ளோம்.

கணக்கிடு முறைகளும் திருத்தமும் (Methods and Accuracy of Calculations)

வேலையமைப்பிற்கும் வேலைத் தாள்களுக்குமான திட்டத்தை வகுக்குமுன், கணக்கிடுதல் முறைகளைப்பற்றிச் சிந்தித்து முடிவுக்கு வருதல் வேண்டும். பொதுவாகக் கண்டறிந்த விவரங்கள் பெரிய அளவில் இருக்கும் எந்த நிலையிலும், விவரங்களையும் பிற்பாடு செய்ய வேண்டிய கணக்குகளையும் பட்டியல்களாக அமைத்தல் நல்லது. மற்ற எந்த முறையையும்விட, அட்டவணை முறையே மிகச் சிறப்புடையதும் ஒழுங்கானதுமாகும். அதிகப்படியான விவரங்களைக் கையாளுவதற்கு இம் முறையே தேவை.[2] இதுபோன்ற ஒரு செய்ம்முறையை நிறுவிவிட்டால், பிறகு, கணக்கிடுதல் எளிதாய்விடும். நம் வேலைகளைக் குறைக்கக்கூடிய சாதனங்களேதும் இருப்பின், அவைகளையும் செய்ம்முறையில் சேர்த்துக்கொள்ளவேண்டும். இங்கு அதுபோன்ற வேலை குறைக்கும் சாதனங்களெல்லாவற்றையும் குறிப்பிடமுடியாதென்றாலும், பொதுவான சிலவற்றைக் கூறுவோம்.

1. கணக்கிடுதலுக்குத் துணைபுரிபவை (Aids to Calculations)

எண்வழி (numerical) கணக்குகள் செய்ய உதவும் தரமான (standard) அட்டவணைகளைப்பற்றி எல்லா மாணவர்களும் அறிந்திருப்பர்; எனினும், அவைகளைத் திருத்தமாகவும் சீக்கிரமாகவும் பயன்படுத்துமளவிற்கு அவை பலருக்குத் தெரிந்திருப்பதில்லை. லாகிருதம்களின் அட்டவணை இன்றியமையாதது என்று கூறத் தேவையில்லை. பெருக்கல், வகுத்தல்களைப் போடக்கூடிய பொறி யந்திரங்கள் கிடைக்கும் இந்த நாளில், இவைகளுக்கு லாகிருதம்களைப் பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை; ஆனாலும் அடுக்குகள் (powers) கணக்கிடுவதற்கும், அடுக்கு மூலங்கள் (roots) கணக்கிடுவதற்கும் லாகிருதம் அட்டவணைகளே எளிதாகப் பயன்படுபவை. சில அட்டவணைகள் அடுக்குகளையும் மூலங்களையும் தருகின்றன. பெருக்குச் சராசரியைக் (geometric mean) கணக்கிட லாகிருதம்களே பயன்படும் (பாகம் I, அதிகாரம் 4-ஐப் பார்க்க). இணைக்கவேண்டிய

[2] 3ஆம் அதிகாரத்தில் அட்டவணைகளை அமைக்கப் பல முறைகளும், இலக்கணங்களும் சிறப்பாக அலைவெண் பரவலைத் தொடர்புபடுத்திச் சுருக்கமாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவான பட்டியல் அமைப்பு முறைகளையும், அட்டவணைகளில் விவரங்களைத் தேர்ச்சியாகக் காட்டுவதற்கான முறைகளையும் கீழ்க்கண்ட நூல்களில் காணலாம். (1) 'Statistical Tables and Graphs', எழுதியவர் மட்ஜெட், புரூஸ், டி. (Mudgett, Bruce, D.). வெளியிட்டோர் 'Boston, Houghton Mifflin', 1930. (2) 'Manual of Tabular Presentation', தயாரித்தவர் பி. எல். ஜென்கின்ஸன் (B.L. Jenkinson). வெளியிட்டோர்: Bureau of the Census, Washington, Government Printing Office, 1950).

சமன்பாடுகளில், x அல்லது y ஆனது லாகிருதமாக அமையும் நிலைகளிலும் (பாகம் I. அதிகாரம் 10-ஐக் காண்க) லாகிருதம் அட்டவணை பயன்படும். வரைபடம் அமைக்கும் சமயங்களில், லாகிருதத் தாள்களைப் (logarithmic paper) பயன்படுத்துவதால், லாகிருதம் அட்டவணை தேவைப்படாது. பின் இணைப்பு அட்டவணை XII-ல், 5-ஸ்தானங்களுக்கான லாகிருத அட்டவணையுள்ளது.

வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், ரெஸிப்ரோக்கல்களைக் கொண்ட அட்டவணைகள்: இவைகளும் மிகுதியாகப் பயன் தருபவை. பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்பட்டு வரும் அட்டவணைகளை பார்லோ (Barlow) என்பவர், 10,000 வரை வெளியிட்டுள்ளார். (நூலின் பெயர் "Barlow's Tables of Squares, Square Roots, Cubes, Cube Roots and Reciprocals.") இவைகளின் உபயோகங்களைப்பற்றித் தனியே விளக்கிக் கூற வேண்டியதில்லை. ஒரே ஒரு செய்தியைமட்டும் குறிப்பிடலாம்—ரெஸிப்ரோக்கல்களைக் கணக்கிடும்பொழுது கவனிக்க வேண்டியது. ஒரு தொடர்ச்சியிலுள்ள ஒரே எண்ணால் வகுக்கவேண்டியிருக்கும்பொழுது (உதாரணம், சதவீதங்களைக் கணக்கிடும்பொழுது), அந்த ஒற்றை எண்ணின் ரெஸிப்ரோக்கலைக் கணக்கிட்டு, தொடர்ச்சியிலுள்ள எண்களால் இதைப் பெருக்குதல் எளிதாகும். அதாவது, வகுத்தல் பெருக்கலாக மாற்றப்பட்டுள்ளது. ($6 \div 3$ என்பதும், $6 \times \frac{1}{3}$ என்பதும் சமமே.) இந்த ரெஸிப்ரோக்கலைப் பெருக்கல இயந்திரத்தின் ஓர் இடத்தில் அமைத்து, தேவைப்பட்ட பெருக்கல்களையெல்லாம் எளிதில், விரைவில் கணக்கிடலாம். 1-லிருந்து 1,000 வரையுள்ள எண்களின் வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், ரெஸிப்ரோக்கல்களைப் பின் இணைப்பு அட்டவணை X-ல் காணலாம்.

குறித்த பரவல்களின் தனிப் பண்புகளைக் குறிக்கும் அட்டவணைகளைப்பற்றியும், சோதனைகளைச் செய்ய உதவும் அட்டவணைகளைப் பற்றியும் நூலிலேயே கூறப்பட்டது. இவைகளை வெளியிடும் நூல்களில், புள்ளியியல் கணக்குகளுக்குத் தேவைப்படும் மற்ற அட்டவணைகளும் இடம் பெற்றிருக்கும். குறிப்புக் காட்டுவதற்காகவே, கீழே புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகளில் பெரிதும் பயன்படும் பல அட்டவணைகளைக்கொண்ட நூல்களின் பட்டியல் உள்ளது.

குளோவர், ஜெ. டபிள்யூ. (Glover, J. W.), *Tables for Applied Mathematics*, வெளியிட்டோர்: Ann Arbor, Michigan, George Wahr, 1923.

கெல்லி, டி. எல். (Kelley, T. L.) *The Kelley Statistical Tables*, திருத்தப்பட்ட பதிப்பு, Harvard University Press, 1948.

பியர்ஸன், ஈ. எஸ். (Pearson, E. S.), ஹார்ட்லி, எச். ஓ. (Hartley, H. O.), *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I. Cambridge University Press, 1954.

இந்த நூலின் முதற்பகுதியிலும், மற்றும் பின்னர் வெளிவரவிருக்கும் பகுதிகளிலும், முன்பு கார்ல் பியர்ஸனல், பயோமெட்ரிக் லாபோரேடரி (Biometric Laboratory)யில் தொடங்கப்பட்ட அட்டவணை வேலைகளின் முற்பகுதிகளைக் காணலாம். கார்ல் பியர்ஸனல் முன்பு வெளியிடப்பட்ட பல அட்டவணைகள், தங்கள் முதல் உருவத்திலோ, அல்லது சிறிது மாற்றப்பட்டோ, இந்தப் பகுதிகளை (volumes) அமைக்கப் பெறும். அடுத்துக் கூறப்படும் இரண்டு முற்பகுதிகளில் தற்கால ஆராய்ச்சிகளுக்குத் தேவையான, வேறெங்கும் கிடைக்காத, பல அட்டவணைகள் உள்ளன.

பியர்ஸன், கார்ல் (Pearson, Karl) *Tables for Statisticians and Biometricians*, பகுதி I (1914, 1930), பகுதி II (1931). Cambridge University Press.

∴ பிஷர், ஸர் ரோனல்டு (R. A. Fisher) மற்றும் யேட்ஸ், எஃப். (Yates, F.), *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 3ஆம் பதிப்பு. New York, Hafner, 1948.

மைனர், ஜே. ஆர். (Miner, J.R.), *Tables of* $\sqrt{1-r^2}$ *and* $1-r^2$ *for Use in Partial Correlation and in Trigonometry*, Baltimore, The Johns Hopkins Press.

இன்று புள்ளியியல் துறைக்கு மிகவும் பயன்படுபவை கணக்கிடும் யந்திரங்களே ; இவைகளில் பல்வேறு வகைகள் சந்தையில் குறைந்த விலைக்குக் கிடைக்கின்றன. அளவின வேலைகளில் (quantitative work) வரும் பெரும்பாலான கணக்கிடுதல்களை இவைபோன்ற யந்திரங்களே—கையால் சுற்றப்படுவது, அல்லது மின்சாரத்தால் இயக்கப்படுவது—செய்துவிடுவதால், கணக்கிடும் தொல்லைகள் வெகுவாகக் குறைகின்றன. இந்த யந்திரங்களுக்கு ஏற்ற வகையில் புள்ளியியல் முறைகளும் மாற்றப்பட்டு வருகின்றன; பின்னரும் மாற்றப்படவிருக்கின்றன. விரிவான விவரங்களுக்கு, துளை அட்டைக் கருவிகள், பொறியியல் அட்டவணை அமைப்பிகள் (mechanical tabulators), பண்பினவாரியாகப் பிரிக்கும் யந்திரங்கள் (sorters) முதலியவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். இவைகளெல்லாம் போதாது என்பதுபோல், மின்சாரப் பகுப்பியல் கணிகள் (electronic computers) பலவும் இப்பொழுது புள்ளியியலறிஞருக்குப்

புதுப்புதுத் தோற்றங்களைக் காட்டுவதாகக் கிடைத்துள்ளன. நூலின் உட்பகுதியில் குறிப்பிட்டதுபோல், பியூரோ ஆஃப் ஸென்ஸஸ் (Bureau of Census) என்ற நிறுவனம், காலவரிசைகளுக்குப் பருவத் திருத்தங்களை (seasonal corrections) அமைக்க 'UNIVAC' என்ற மின்சாரப் பகுப்பியல் கணியைப் பயன்படுத்துகிறது. பத்து ஆண்டுகளுக்கு மாதவாரியாக உள்ள விவரங்களை, விகித முறையிலிருந்து நகரும் சராசரி முறைக்கு மாற்றி அமைப்பதற்கான எல்லாக் கணக்குகளையும் இந்த யந்திரம் ஒரு நிமிஷத்திற்குள் போட்டுவிடுகிறது!

இடையே வைத்தலுக்கான துவக்கநிலைக் கொள்கைகள்: எந்தச் சார்பலனின் மதிப்புகள் அட்டவணையில் உள்ளதோ, அந்தச் சார்பலனின் சில மதிப்புகளை மாத்திரமே அந்த அட்டவணையில் காணமுடியும். குறிப்பாக, லாகிருதம் அட்டவணையை எடுத்துக் கொண்டால் (அட்டவணை XII)

(மாறி) சாதாரண எண்	(சார்பலன்) லாகிருதம்
22·82	1·35832
22·83	1·35851
22·84	1·35870
22·85	1·35889
22·86	1·35908

என்ற விவரங்கள் கிடைக்கும். இப்பொழுது இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட எண்களினிடையே உள்ள ஓர் எண்ணிற்கு லாகிருதம் தேவைப்படுமானால், மாறியின் மதிப்புகளுக்கு இடையே வைத்தல் செய்து (interpolation) சார்பலனின் மதிப்பைப் பெறவேண்டும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனின் மதிப்புகளுக்கு முரண்படாதவாறு மாறியின் இரு மதிப்புகளிடையே உள்ள ஒரு மதிப்பிற்கு, தகுந்த சார்பலனின் மதிப்பைப் பெறுதல்வேண்டும். இந்தப் பிரச்சினை, பல அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தும்பொழுதும், மற்றப் பல புள்ளியியல் கணக்குகளிலும் தோன்றும். இங்கு இடையே வைத்தல் கொள்கையைப்பற்றி (theory of interpolation) விரிவாகக் கூற முடியாதாகையால், விகித சம முறையில் இடையே வைத்தலைச் (proportional interpolation) சிறிது விளக்குவோம்.[3]

மாறிக்கும், சார்பலனுக்கும் உள்ள தொடர்பு ஓர் அடுக்கு வகையைச் (linear i.e. first degree) சேர்ந்தது என்று எண்ணுதல்

[3] ஸ்கார்பரோ, ஜெ. பீ. (Scarborough, J. B.) என்பவரின் நூலிலும் 'Numerical Mathematical Analysis', இரண்டாம பதிப்பு, Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1950. மற்றும், விட்டெகர், ஈ. டி. மற்றும் ராபின்சன், ஜி. (Whittaker, E. T. and Robinson, G.) என்பவர் நூலிலும் 'The Calculus of Observations,' London, Blackie and Son, 1924, பற்பல இடையே வைத்தல் முறைகளைப்பற்றிய விரிவான விளக்கங்களைக் காணலாம்.

இந்த முறையின் அடிப்படைக் கருத்து. இப்பொழுது, மேலே கொடுக்கப்பெற்றுள்ள தகவல்களிலிருந்து 22·834 என்பதன் லாகிருதமைக் கணக்கிடுவோம்,

$$\text{Log } 22{\cdot}840 = 1{\cdot}35870$$
$$\text{Log } 22{\cdot}830 = 1{\cdot}35851$$
$$\text{வித்தியாசம்} = \cdot 00019$$

அதாவது, மாறியில் ·010 வித்தியாசம் ஏற்பட்டால் சார்பலனில் நிகழும் வித்தியாசம் ·00019. தேவைப்பட்ட எண்ணுன 22·834 என்பது, இவைகளில் குறைவானதைவிட ·004 அதிகமாயுள்ளது; எனவே,

$$\text{Log } 22{\cdot}834 = 1{\cdot}35851 + (\tfrac{4}{10} \times \cdot 00019)$$
$$= 1{\cdot}35851 + \cdot 000076$$

= 1·35859 என்று 5ஸ்தானத்திற்குத் திருத்தமாக விடை காணலாம்.

பல லாகிருத அட்டவணைகளின் ஓரத்தில் (margin) விகித சம பங்குகளும் (proportional parts) ஓர் அட்டவணையாக எழுதப் பெற்றிருக்கும்; அவைகளைப் பயன்படுத்தி, இடையே வைத்தலை எளிதாகச் செய்யலாம். மேற்கண்ட கணக்கைப் போடுவதற்கு 19 என்ற எண்ணின் கீழ் உள்ள பட்டியலை (ஐந்துஸ்தான லாகிருதம்களில், இந்த இடத்தில் இரு லாகிருதம்களுக்குள்ள வித்தியாசம்) நோக்கவேண்டும். 19-க்கு அடியிலுள்ள அட்டவணையின் முதலாவது, கருதப்பட்ட எண்ணின் ஐந்தாவது ஸ்தானத்தைக் குறிக்கும். இரண்டாவது ஸ்தானத்தில் இருப்பதைத்தான், கருதப்பட்ட எண்ணிற்குக் குறைவான எண்ணின் லாகிருதத்துடன் கூட்டவேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் ஐந்தாவது எண் 4 ஆனதால் (22·834), நாம் கூட்ட வேண்டியது ·000076.

19	
1	1·9
2	3·8
3	5·7
4	7·6
5	9·5
6	11·4
7	13·3
8	15·2
9	17·1

சாதாரணமான புள்ளியியல் வரிசைகளை ஆராயும்பொழுதும் இந்தப் பிரச்சினை அடிக்கடி எழும். உதாரணமாக, அடுத்துக் காணும் விவரங்களிலிருந்து நமக்கு 1877ஆம் ஆண்டில் எவ்வளவு மைல் ரயில் பாதைகள் இருந்தன என்பதைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும் என்று கொள்வோம்.

அமெரிக்காவில் 1870—1950-ல் இருந்த நீராவி-ரயில் பாதைகள்—மைல்களில் *

1870	52,922
1880	93,267
1890	163,597
1900	193,346
1910	240,439
1920	252,845
1930	249,052
1940	233,670
1950	223,779

* மூலம்: 'Statistics of Railways in the United States' Interstate Commerce Commission. 1920 வரையில் ஜுன் 30-க்கும் 1920-க்கும் பிறகும் டிஸம்பர் 31-க்கும் ஆன விவரங்கள்.

இந்த விவரங்களில் 1870-80 ஆண்டுகளிடையே அதிகமான வளர்ச்சியிருந்தது என்பதையும், 1877ஆம் ஆண்டு இந்தக் காலத்தின் இடையே தான் உள்ளது என்பதையும் கவனிக்க. இந்த இடைவெளியில், ஆண்டுதோறும் நிகழ்ந்த வளர்ச்சி சம அளவுதான் என்று கொண்டால், விகிதசம முறையில், இடையே வைத்தலை நிகழ்த்தலாம் :

$$\begin{aligned} \text{1877-க்கான மைல்கள்} &= 52{,}922 + (\tfrac{7}{10} \times 40{,}345) \\ &= 52{,}922 + 28{,}241{\cdot}5 \\ &= 81{,}163{\cdot}5 \text{ அல்லது } 81{,}164. \end{aligned}$$

மதிப்பிடவேண்டியதற்கு மேலும், கீழும் உள்ள இரண்டே இரண்டு விவரங்களைத்தான் இந்த முறையில் பயனுக்கியுள்ளோம். இந்த இரண்டு விவரங்களிடையே ஒரு நேர்கோட்டை அமைத்து அதன்மூலமாக 'முதல் வித்தியாசங்களைப்' (first differences) பயன்படுத்துகிறோம். நேர்கோட்டு முறையில் அமையாத தொடர்ச்சியான விவரங்களுக்கு இந்த முறை பொருந்தாது; அடுத்தடுத்த விவரங்களிடையேயுள்ள வித்தியாசங்கள் மிக அதிகமாக இருப்பின், ஈரடுக்கு அல்லது அதிகமான 'அடுக்கு'களையுடைய (second or higher degrees) வளைகோடுகளைப் பொருத்தி இடையே வைத்தலை நிகழ்த்துவதுதான் சிறப்பானது. இதற்காக வளைகோடுகளைப் பொருத்திதான் ஆகவேண்டுமென்பதில்லை; தகுந்த இடையே வைத்தல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தலாம். (அவைகள் இரண்டாம், மூன்றும் அல்லது அதிகமான வித்தியாசங்களைப் பயன்படுத்தி நிறுவப்பெற்றவை.) விட்டெகர் மற்றும் ராபின்சன் (Whittaker and Robinson) என்பவர்களின் நூலில் (து.நூ.ப. 190) சூத்திரங்களைப் பற்றிய விளக்கங்களைக் காணலாம்.

2. எண்வழி கணக்குகளைத் தணிக்கை செய்தல்

புள்ளியியல் வேலைகளை நன்கு திட்டமிட்டுச் செயலாக்கும் பொழுது, போடவேண்டிய எண் கணக்குகளையெல்லம் (numerical calculations) அடிக்கடி தணிக்கை செய்வதற்கான முறைகளை அத் திட்டத்திலே அமைப்பது மிகச் சிறந்தது. எந்த ஒரு மனிதனும் பிழை செய்யாமலிருக்கமாட்டான்; எனவே, விரிவாகப் பல எண் கணக்குகளைப் போடும்பொழுது, பிழைகளைக் குறைப்பதற்கு இருக்கும் ஒரே வழி—எல்லாக் கணக்குகளையும் கவனமாகத் தணிக்கை செய்வதுதான். கணக்குகளைப் போட ஆரம்பிப்பதற்கு முன்பே, இந்தத் தணிக்கைத் தேவையை உணர்ந்தால், நல்ல பயன் தரும் முறைகளைக் கையாளலாம்.

அளவினவழி ஆய்வாளருக்கு (quantitative worker) இரு வகையான தணிக்கை முறைகள் உள்ளன. முன்பு செய்த வழியிலேயே மறுமுறை கணக்குகளைப் போடுதல் ஒன்று. இப்படிச் செய்யவேண்டியதானல், முதல் கணக்கிட்டவரே மறு முறையும் செய்யாமல், வேருருவரைச் செய்யச் சொல்வது நல்லதாகும்; அது இயலாததாயின், கணக்கு முறைகளைச் சற்றே மாற்றி அமைத்து முதலாவது நபரே கணக்கிடலாம். அதாவது, இரண்டு எண்களைப் பெருக்கும்பொழுது, இரண்டாம் முறையில், பெருக்கப்படும்—பெருக்கும் எண்களை மாற்றிக் கணக்குப் போடலாம்; ஒரு வரிசை எண்களைக் கூட்டும்பொழுது, முதலில் மேலிருந்து கீழ் கூட்டியிருந்தால், இரண்டாம் முறை கீழிருந்து மேலாகக் கூட்டலாம். இரண்டாம் வகைத் தணிக்கை முறையானது, செய்யப்பட்ட கணக்குகளைச் சரிபார்க்க வேறு சில விவரங்களைத் தருவதாகும்; அதாவது சரிபார்ப்பதற்கென்றே சில அதிகப்படியான கணக்குகளைப் போட்டிருப்பது. 5ஆம் அதிகாரத்தில் (பாகம் I) விளக்கப்பட்ட 'சார்லியர்' (Charlier) தணிக்கை முறை இவ் வகையைச் சார்ந்தது. அதனைத் தரவிலக்கம் கணக்கிடும்பொழுது குறிப்பிட்டுள்ளோம். ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளுக்குத் (simultaneous equations) தீர்வுகள் காணப் பயன்படுத்திய 'டூலிட்டில்' (Doolittle) முறையும் (பின் இணைப்பு C-பார்க்க) இந்த வகையைச் சார்ந்ததே; அந்த முறையில் கணக்கிடுதலின் பற்பல 'கட்ட'ங்களில் (stages) பலவகைத் தணிக்கைகள் அமைந்திருப்பது ஒரு தனிச் சிறப்பு. இதுபோன்ற தணிக்கை முறைகளைக் கையாள முடியுமானல் அது மிக்க பயனளிக்கும்.

முக்கியமான முடிவுகளை அவ்வப்பொழுது தோராயமாகவேனும் சரிபார்க்கும் பழக்கத்தை ஆராய்ச்சியாளர் ஏற்படுத்திக்கொள்ளுவது மிக நல்லது; தணிக்கை முறைகளைக் காட்டிலும் இது சிறந்தது என்றே சொல்லலாம். இரு எண்களைப் பெருக்கவேண்டும் என்போம்;

அப்பொழுது அவைகளின் பெருக்கல் பலனின் தோராயமான மதிப்பையும், அதில் இருக்கக்கூடிய தசமஸ்தானங்களையும், வெறும் ஆய்வு (mere inspection) மூலமே மதிப்பிட முடியும். இதுபோன்ற முறைகளைக் கையாளுவதால் மிக ஆபத்தான பிழைகளை — தசம புள்ளியை 'இடம்' தவருக வைப்பது போன்றவை—தவிர்க்க முடியும். இது போன்ற மற்றப் பல தணிக்கை முறைகளையும் கையாளலாம். தர விலக்கத்தை, வீச்சுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். (சாதாரணமாக, வீச்சு, ஆறு தரவிலக்கங்களுக்குக் குறைவாகவே இருக்கும்.) ஒரு கணக்கில் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி (harmonic mean) மூன்றையும் கணக்கிட்டிருந்தால், அவைகளை ஒன்றுக்கொன்று ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். இவை போன்ற முரண்பாடுகள் நிகழாது கவனமாகப் பார்த்துக்கொள்வதால், பல பிழைகளைத் தவிர்க்க முடியும்.

கணக்குகளின் முடிவுகளை வரைபடத்தில் அமைப்பதாலும் சில பிழைகளைக் காணமுடியும். உதாரணமாக, ஒரு நேர்கோட்டைப் பல விவரங்களுக்கு இணைக்கும்பொழுது முக்கியமான பிழையொன்று நேர்ந்திருப்பின், அது வரைபடம் அமைக்கும்பொழுது தெளிவாய் விடும். இணைக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் குத்துக் கோடுகள் (ordinates) சரியாகக் கணக்கிடப்படாவிட்டால், அந்த வளைகோட்டைப் படத்தில் வரையும்பொழுது, அது இழையாக (smooth) வராமல், பிழைகளை எடுத்துக்காட்டும். 'செய்யும் எல்லாக் கணக்குகளைப்பற்றிய முழு விவரங்களையும், கவனமாக, அழகாக அமைத்துக் கொள்'—இந்த விதி மற்றெல்லா விதிகளைவிட மிக அவசியமானது. இது பின்னர் திருத்தம் பார்ப்பதற்கும் உதவும்; மற்றும் பிழையற்ற கணக்கிடுதலுக்கு இது இன்றியமையாததுங்கூட. முறையற்ற, கவனமின்றிச் செய்யப்படும் கணக்குகளில் பிழைகள் நேர்வது இயல்பே; ஒழுங்காக, முறையுடன் வகுத்துப் போடப்பட்ட கணக்குகளில் பிழை நேர்வது மிக்க அரிதே.

3. அளவைகளின் திருத்தமும் கணக்கிடுதல்களின் திருத்தமும்

தம் கணக்கு முறைகளில் எவ்வளவு திருத்தம் வேண்டும், முடிவுகள் எந்த அளவிற்குத் திருத்தமாக இருக்கவேண்டும் என்பதனை, ஆய்வாளர், திட்டமிடும்பொழுதே தீர்மானிப்பது நல்லது. இப்படி முன்பே எண்ணிப் பார்த்துச் செய்யாமல் போவதால் கணக்கு முறைகளைத் தேவைக்கு அதிகமான அளவிற்குக் கொண்டுபோகவேண்டியிருக்கும். பல தசமஸ்தானங்களுக்குக் கணக்கிட்டுள்ளதால், நம் முடிவுகள் மிகத் திருத்தமானவை என்ற போலி நம்பிக்கையும் ஏற்படும். இந்தப் பிரச்சினையை ஆராயுங்கால், நாம் முதலாவதாகக் கண்டறிந்த விவரங்களிலிருக்கும் திருத்தலளவைகளைக் கவனிக்கவேண்டும்.

அளவிடுவதில் எப்பொழுதுமே ஒப்பிடுதல் நிகழ்வதைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஜான் ஸ்மித் (John Smith) என்பவரின் உயரம் என்பது, அறிந்துள்ள நீட்டலளவை மதிப்புகளான அடி, அங்குலங்களுடன் ஒப்பிடப்படுகிறது. அப்படி ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதால், முழுமையான (absolute) திருத்தம் என்பது வரவே வராது. அவர் உயரம் 5 அடி 8 அங்குலம் என்ருல், அவர் உயரம் 5 அடி 7·5 அங்குலங்களிலிருந்து 5 அடி 8·5 அங்குலங்கள் வரையிலுள்ள இடைவெளியில் உள்ளது என்பதே பொருள். இங்கு முழுமையான பிழை (absolute error—அதாவது, உண்மை மதிப்பிற்கும், கண்டறிந்த மதிப்பிற்குமுள்ள வித்தியாசம்) 0·5 அங்குலங்கள் வரை இருக்கலாம். இன்னமும் திருத்தமாக அளந்து 5 அடி 8·3 அங்குலம் என்று கூறலாம். அப்பொழுது, அவர் உயரம் 5 அடி 8·25 அங்குலங்களிலிருந்து 5 அடி 8·35 அங்குலங்கள் வரை இருக்கலாம் ; இங்கு முழுமையான பிழை 0·05 அங்குலங்கள் வரை இருக்கலாம்.

பதிவு செய்யப்பட்ட அளவைகளைக் கண்டறியும்பொழுது, அவைகள் எந்த அளவிற்குத் திருத்தமாயுள்ளவைகள் என்பதைத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும் ; அதாவது எவ்வளவு ஸ்தானங்கள் சிறப்பானவைகள் (significant figures) என்பதை அறிய வேண்டும். சிறப்பான ஸ்தானங்களை அமைக்கவும் பதிவு செய்யவும், சில முறைகள் தரப்படுத்தப்பெற்றுள்ளன. திருத்தமான ஸ்தானங்களைமட்டுமே பதிவு செய்யவேண்டும் ; அளவையின் முழுமையான மதிப்பைக் காட்டுவதற்காகத் தேவையான சுழிகளைச் (zeros) சேர்த்துக்கொள்ளலாம். உதாரணமாக, ஒரு தூரத்தை அளந்து 4300 அடி என்று குறித்தால் அதில் உள்ள சிறப்பான ஸ்தானங்கள் இரண்டேதான் (4, 3 என்பவை) ; இதன் பொருள் என்னவென்ருல், தூரம் 4250 அடியிலிருந்து 4350 அடி வரையில் உள்ள இடைவெளியில் உள்ளது என்பது. 1952ஆம் ஆண்டில் அமெரிக்காவின் கோதுமை உற்பத்தி 1,291,000,000 புஷல்கள் என்ருல், இந்த அளவையில் உள்ள சிறப்பான ஸ்தானங்கள் நான்குதான். (ஒருகால், நாம் 1,290,000,000 புஷல்கள் என்று கூறியிருந்தோமாஞல், அப்பொழுது 3 ஸ்தானங்களே சிறப்பானவைகளாகும் ; நாம் இதே அளவை, நாலு ஸ்தானங்களுக்கும் சிறப்பாக உள்ளது என்று குறிப்பிடவேண்டுமாஞல், நாலாவது ஸ்தானமான சுழியின்மேல் ஒரு புள்ளியையோ, ஒரு கோட்டையோ போட்டுவைப்பது முறையாகும்—1,290̇,000,000.) இதேபோல், ஓர் அளவை 0·0472 என்ருல், இங்குள்ள சிறப்பு ஸ்தானங்களும் மூன்றுதான் (4, 7, 2) ; சுழிகள் முழுமையான மதிப்பைக் காட்டவே சேர்க்கப்பட்டவை. ஓர் எண்ணில், தசம புள்ளிக்கு வலப் பக்கத்தில் கடைசியாக ஒரு சுழி இருக்குமாயின்,

அதையும் சிறப்பான ஸ்தானமாகக் கொள்ளுவோம்; உதாரணமாக 12·50 என்பதிலுள்ள நாலு ஸ்தானங்களும் சிறப்பானவைகளே; கடைசியில் சுழி சேர்க்கப்பட்டுள்ளதால், அந்த அளவையின் மதிப்பு 12·495—12·505 என்ற இடைவெளியிலுள்ளது என்பது பொருள். அப்படியில்லாமல், முடிவை 12·5 என்றுமட்டும் குறிப்பிட்டால், அதன் மதிப்பு 12·45—12·55 களுக்கிடையே இருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும்.

கணக்கிடுதல்களில் திருத்தத்தின் அளவைக் கண்டுபிடித்தல்: பல விவரங்களைத் தொகுத்துக் கணக்கிடும்பொழுது முடிவாகக் கிடைப்பவைகளின் திருத்தலளவைகளைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகும். ஒவ்வொரு விவரத்தின் திருத்தமும் தெரிந்திருந்தால் இதனைக் கண்டுபிடித்துவிடலாம். கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்ற நான்கு அடிப்படைக் கணக்கு முறைகளில் இந்தப் பிரச்சினையை ஆராய்வோம்.

கூட்டல்: பல எண்களைக் கூட்டுவதனால், மொத்தத்திற்குத் தனி எண்களின் திருத்தத்தைவிட அதிகமான திருத்தம் இருப்பதாகக் காட்டக்கூடாது. தனி எண்களின் திருத்த அளவுகளில் வித்தியாசமிருப்பின், அவைகளில் எதற்குத் திருத்தம் மிகக் குறைவோ, அதன் திருத்தமே, மொத்தத்தினுடையதும் ஆகும். கீழே உள்ள நான்கு எண்களைக் கூட்டுவோம்.

$$
\begin{array}{r}
25{\cdot}23 \\
1610{\cdot}1 \\
17{\cdot}375 \\
2{\cdot} \\
\hline
1654{\cdot}705 \\
\hline
\end{array}
$$

மொத்தத்தை 1655 என்றுதான் முழுமையாகக் குறிப்பிட வேண்டும்; மொத்தம் 1654·705 என்று கூறுவது போலியான (spurious) திருத்தலளவைக் காட்டுவதாகும்.

உண்மையான மொத்தம் எந்த எல்லைகளினிடையே அமையும் என்பதையும் கணக்கிடலாம். இதற்குக் கொடுக்கப்பட்ட எண்களிலிருந்து கிடைக்கக்கூடிய பெருமமான (maximum) மொத்தத்தையும், சிறுமமான (minimum) மொத்தத்தையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் அதன் பெருமமான மதிப்பை வைத்தால், மொத்தத்தின் பெருமம்:

$$
\begin{array}{r}
25{\cdot}235 \\
1610{\cdot}15 \\
17{\cdot}3755 \\
2{\cdot}5 \\
\hline
1655{\cdot}2605
\end{array}
$$

சிறுமமான மதிப்புகளை வைத்தால் :

$$\begin{array}{r} 25{\cdot}225 \\ 1610{\cdot}05 \\ 17{\cdot}3745 \\ 1{\cdot}5 \\ \hline 1654{\cdot}1495 \end{array}$$

என்பது சிறுமமான மொத்தம். எனவே, விடையை மூன்று தசமஸ்தானங்களுக்குத் திருத்தமாக அமைத்தாற்போல் காட்டுவது தவறு என்பது புலனுகிறது. ஒவ்வோர் எண்ணையும் தனித்தனியே குறைந்த திருத்தமுள்ள எண்ணின் திருத்தத்திற்குச் சரிசெய்து விடுவதும் தவருன முறைதான். மொத்தத்தைப் பெற்ற பின்னரே சரிசெய்வதை நிகழ்த்துவதுதான் பொருந்தும்.

தனி எண்களில் இருக்கும் 'பிழை' அளவுகளைக் கூட்டினுல் (அதாவது பெரும மதிப்பிற்கும், சிறும மதிப்பிற்குமுள்ள வித்தியாசம்) அதன் மொத்தம் 1·111 என்ருகும்; இது மேலே கணக்கிடப்பட்ட பெரும மொத்தத்திற்கும், சிறும மொத்தத்திற்குமுள்ள வித்தியாசம் என்பதை எளிதில் அறியலாம். எனவே, ஒரு மொத்தத்தில் ஏற்படக்கூடிய 'பிழை' அளவை, தனி எண்களின் பிழை அளவுகளைக்கொண்டு கணக்கிடலாம். [சிறுமமான, மற்றும் பெருமமான மொத்தங்களின் வீச்சு (range), பெருமமான முழுமைப் பிழையின் இரு பங்காகும்.]

கழித்தல் : முன்பு செய்ததுபோலவே செய்து, இந்த நிலையிலும் தனி உறுப்புகளின் பிழைகளைக் கூட்டினுல் முடிவில் பிழை எல்லைகள் வருவதைக் காட்டலாம். கழிக்கும் இரண்டு எண்களில் எது குறைவான திருத்தமுள்ளதோ அந்தத் திருத்தமே கழித்துக் கிடைக்கும் விடையின் திருத்தலளவும் ஆகும். எந்த ஸ்தானத்தில் (ஒன்ருவது, பத்தாவது, நூருவது, அல்லது ஒரு தசமஸ்தானம், இரண்டு தசமஸ்தானம் போன்றது) குறைவான திருத்தலளவு அமைந்துள்ளதோ, அதே ஸ்தானத்திற்குதான் கழித்தல் பலனின் திருத்தலளவும் இருக்கும்.

பெருக்கல் : இப்பொழுது ஓர் எண்ணை மற்ருேர் எண்ணுல் பெருக்கும்பொழுது, பெருக்கற்பலனின் திருத்தலளவை அமைப்பதைப்பற்றிக் கூறுவோம். முன்பு செய்ததுபோலவே இங்கும் பெருமமான, சிறுமமான பெருக்கற்பலன்களைக் கணக்கிடலாம். ஆக 11·30 என்பதையும் 2·3 என்பதையும் பெருக்கவேண்டும் என்று கொள்வோம். அப்பொழுது பெருமமான பெருக்கற்பலன் $=11{\cdot}305\times2{\cdot}35$ அல்லது 26·56675. சிறுமமானது $=11{\cdot}295\times2{\cdot}25$ அல்லது 25·41375. இரு எண்களையும் அப்படியே பெருக்கினுல்

$11{\cdot}30 \times 2{\cdot}3 = 25{\cdot}990$ என்றுகிறது. இதை, மேற்கண்ட இரு எல்லைகளுடன் ஒப்பிட்டால், பெருக்கற்பலன் 26 என்பதைக் காணலாம்; அதாவது, அதன் சிறப்பான எண்கள் இரண்டுதான். பெருக்கலில், கீழ் வகுத்துள்ள விதியைப் பொதுவாகப் பின்பற்றலாம்: சிறப்பு ஸ்தானங்கள் குறைவாயுள்ள எண்ணின் சிறப்பு ஸ்தானங்கள் n என்றால், பெருக்கற்பலனின் சிறப்பு ஸ்தானங்களும் n தான். இந்த எடுத்துக்காட்டில் அது இரண்டேதான்.

வகுத்தல்: இதற்கான விதியும் பெருக்கலுடையதைப் போன்றதே. சிறப்பு ஸ்தானங்கள் குறைவாக உள்ள எண்ணின்—வகுக்கும் எண், அல்லது வகுபடு எண்—சிறப்பு ஸ்தானங்கள் n என்றால், ஈவின் சிறப்பு ஸ்தானங்களையும் n ஆகவே கணக்கிட வேண்டும்.

பருப்பொருளியல் துறைகளிலும் பொறியியல் துறைகளிலும் முடிவுகளைப் பதிவுசெய்ய முறைகள் தரப்படுத்தப்பட்டுள்ளன; எனவே, வெளியிடப்படும் விவரங்களைப் பயன்படுத்துவோருக்கு அவைகளின் திருத்தலளவை நன்கு புரிகிறது. பருப்பொருளியல் துறையில், எண் முடிவுகளைச் சிறப்பு ஸ்தானங்களுக்கு ஒரு ஸ்தானம் அதிகமாக வெளியிடும் மரபு உள்ளது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்களில் கடைசி எண்ணிற்கு முந்தினதைச் சிறப்பான ஸ்தானமாகக் கருதலாம். பொறியியல் துறையில் சிறப்பு ஸ்தானங்களைமட்டுமே வெளியிடுவதுதான் மரபு. எனவே, அந்த முடிவுகளை, மேலே செய்ததுபோல், $\frac{1}{2}$ அலகு அளவிற்குள், அவ்வெண்களைத் திருத்தமாகக் கருதலாம். புள்ளியியல் முறையில் இன்றுவரை ஒரு முறையும் தரப்படுத்தப்படவில்லை. பொதுவாகப் பொறியியல் முறையைப் பின்பற்றி, சிறப்பான ஸ்தான எண்களைமாத்திரமே வெளியிடுவது ஒரு நல்ல முறை என்று தோன்றுகிறது. அப்பொழுது முடிவுகள், கருதப்பட்ட அலகுகளின் அரைப் பங்கு அளவிற்குமட்டுமே பிழையுடனிருக்கக்கூடும். கணக்கிடுதல்களிடையே இரண்டு ஸ்தானங்கள் அதிகமாக வைத்துக்கொண்டு, முடிவில் அவைகளை நீக்கிவிடலாம்.

புள்ளியியல் அளவைகளை—கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கம் போன்றவை—வெளியிடும்பொழுது டி. எல். கெல்லி (T. L. Kelley, 7ஆம் அதிகாரத்தில் குறிப்பிட்டுள்ளது) என்பவர் கூறியுள்ள விதியைப் பின்பற்றுவது நல்லது. தரப் பிழையின் மூன்றில் ஒரு பங்கு என்னவென்பதைக் கணக்கிட்டு அதன் முதல் ஸ்தானத்தால் குறிப்பிடப்பட்ட ஸ்தானங்களைச் சிறப்பானவைகளாகக் கொள்ளலாம். ஒரு பரவலின் சராசரி 36.5321 என்றும், அதன் தரப்பிழை 0.963 என்றும் கொள்வோம். தரப் பிழையின் மூன்றில் ஒரு பங்கு 0·321, இதில் முதல் ஸ்தானம் 3 என்பது தசம புள்ளிக்கப்பால் ஒன்றுவது

ஸ்தானத்தில் (பத்தில் ஒரு பங்கில்) உள்ளது. எனவே, பதிவு செய்யப்படுவதற்கான சராசரியின் மதிப்பு 36·5 என்பதே. இந்தத் தரப்பிழை மதிப்பிருக்கும்பொழுது, சராசரியை, முதல் தசம ஸ்தானத் திற்கப்பால் கணக்கிடுவதில் பயனில்லை. முடிவில் ஒரே தசம ஸ்தானத்திற்கு எழுதினாலும், நடுவே வரும் கணக்கிடுதல்களில் மேலும் இரண்டு தசம ஸ்தானங்களை வைத்துக்கொள்வது நல்லது.

4. கால வரிசைகளை ஆராயும்போது பயன்படுத்தவேண்டிய அட்டவணைகளும் சூத்திரங்களும்

காலவரிசைகளுக்கு நெடுங்காலப் போக்குக் கோடுகளைப் பொருத்தும்பொழுது, சில எண்களின் அடுக்குகளையும் (powers), அது போன்ற அடுக்குகளின் மொத்தங்களையும் கணக்கிடவேண்டிய தாகிறது. பார்லோவின் அட்டவணைகள் எண்களின் இரண்டு, மூன்று அடுக்குகளைத் தருகின்றன. பியர்ஸனின் (Pearson) நூலில் 'Tables for Statisticians and Biometricians' (பகுதி I) என்பதில் 1-லிருந்து 100 வரையுள்ள எண்களின் 7ஆவது அடுக்குவரை அட்டவணை XXVII-ல் காணலாம். அதே நூலின் XXVIIIஆவது அட்டவணையில் முதல் நூறு முழு எண்களின் 7ஆவது அடுக்கு வரை வரும் எண்களின் மொத்தங்களைக் காணலாம். போக்குக் கோடுகளைப் பொருத்தும் பொழுது, x என்பது 'கால'த்தைக் குறிக்கும்; எனவே, அதன் அடுக்கு களும் அடுக்குகளின் மொத்தங்களும் தேவைப்படும்பொழுது, இந்த அட்டவணைகள் பெரிதும் பயனுகின்றன. நம் நூலின் பின் இணைப்பு அட்டவணை VIII-ல், இரண்டிலிருந்து 6ஆவது அடுக்குவரை கொடுக் கப்பட்டுள்ளது. பின் இணைப்பு அட்டவணை IX-ல் முதல் 50 முழு எண்களின் முதல் ஆறு அடுக்குகளின் மொத்தங்களைக் காணலாம்.

இதுபோன்ற அட்டவணைகள் எளிதில் கிடைக்காத சமயங்களி லும், எண்களின் பற்பல அடுக்கு மொத்தங்களைக் கணக்கிட முடியும்.[4] 1, 2, 3, 4,......என்ற வரிசையில் t என்பது கால வரிசையில் உள்ள எண்களைக் குறிப்பதாகவும், S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 என்பவை அந்த வரிசை எண்களின் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்கா வது, ஐந்தாவது, ஆருவது அடுக்குகளின் மொத்தங்களைக் குறிப்ப தாகவும் கொண்டால், அடுத்துக் காணும் சூத்திரங்களால் அவை களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

[4] ஃபிராங்க் எ. ராஸ். (Frank A. Ross) என்பவரின் 'Formulae for Facilitating Computations in Time Series Analysis', என்ற ஆராய்ச்சி குறிப்பைப் பார்க்கவும். இது 'Journal of the American Statistical Association' என்பதின் மார்ச்சு 1925 இதழில் வெளிவந்துள்ளது. இந்தச் சுருக்கத்திலிருந்துதான் இந்தப் பகுதியிலும், பின்வரும் பகுதியிலும் உள்ள சூத்திரங்கள் எடுக்கப்பெற்றன.

$$S_1 = \frac{t(t+1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{2t^3 + 3t^2 + t}{6} = S_1\left(\frac{2t+1}{3}\right)$$

$$S_3 = \frac{t^4 + 2t^3 + t^2}{4} = (S_1)^2$$

$$S_4 = \frac{6t^5 + 15t^4 + 10t^3 - t}{30} = S_2\left(\frac{3t^2 + 3t - 1}{5}\right)$$

$$S_5 = \frac{2t^6 + 6t^5 + 5t^4 - t^2}{12} = (S_1)^2\left(\frac{2t^2 + 2t - 1}{3}\right)$$

$$S_6 = \frac{6t^7 + 21t^6 + 21t^5 - 7t^3 + t}{42} = S_2\left(\frac{3t^4 + 6t^3 - 3t + 1}{7}\right)$$

கால வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்ணாக (odd number) இருந்தால், கணக்கிடுவதற்கான மூலத்தை (origin) வரிசையின் நடுவில் எடுப்போம். அப்பொழுது t என்பது $\frac{n-1}{2}$ என்றாகும்; n என்பது வரிசையிலுள்ள எண்களைக் குறிக்கும். (விவரங்கள் 11 ஆண்டுகளுக்குக் கிடைத்தால், மூலத்தை ஆறாவது ஆண்டில் அமைப்போம்; அப்பொழுது மூலத்திற்கு மேலும், கீழும் 5 விவரங்கள் இருக்கும். இங்கு $n = 11$, எனவே $t = 5$.) இந்த நிலைக்குப் பயன்படுவதற்காகப் பேராசிரியர் ராஸ் (Professor Ross) மேற்கண்ட சூத்திரங்களை மாற்றிக் கீழ்வருமாறு நிறுவியுள்ளார். இங்கு x என்பது மூலத்திலிருந்து வரும் விலக்கங்களைக் குறிக்கும்.

$$\Sigma x = 0$$

$$\Sigma x^2 = \frac{n^3 - n}{12}$$

$$\Sigma x^3 = 0$$

$$\Sigma x^4 = (\Sigma x^2)\left(\frac{3n^2 - 7}{20}\right)$$

$$\Sigma x^5 = 0$$

$$\Sigma x^6 = (\Sigma x^2)\left(\frac{3n^4 - 18n^2 + 31}{112}\right)$$

கால வரிசை விவரங்களைக் கையாளும்பொழுது, சில வேளைகளில், கால அளவை $\frac{1}{2}$ ஆண்டாகக் கருதுவது எளிதானதாகும்; அப்பொழுது x-ன் மதிப்புகள் 1, 3, 5, 7, 9......என்றவாறு அமையும். அதுபோன்ற

எண்களின் அடுக்குகளின் மொத்தங்களைக் கணக்கிடக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயனுக்கலாம். இங்கு t என்பது 1, 3, 5, 7......என்ற தொடரில் உள்ள எண்களைக் குறிப்பிடும்; ${}_0S_1$, ${}_0S_2$,......${}_0S_6$ என்பவை இதே எண்களின் அடுக்குகளின் மொத்தங்களை முறையே குறிப்பிடும்.

$${}_0S_1 = t^2$$

$${}_0S_2 = \frac{4t^3 - t}{3}$$

$${}_0S_3 = 2t^4 - t^2 = {}_0S_1(2t^2 - 1)$$

$${}_0S_4 = \frac{48t^5 - 40t^3 + 7t}{15} = {}_0S_2\left(\frac{12t^2 - 7}{5}\right)$$

$${}_0S_5 = \frac{16t^6 - 20t^4 + 7t^2}{3} = {}_0S_1\left(\frac{16t^4 - 20t^2 + 7}{3}\right)$$

$${}_0S_6 = \frac{192t^7 - 336t^5 + 196t^3 - 31t}{21} = {}_0S_2\left(\frac{48t^3 - 72t^2 + 31}{7}\right)$$

குறித்த ஒரு கால வரிசையில், விவரங்களின் எண்ணிக்கையான n-என்பது இரட்டை எண்ணுகவும் (even number) இருக்கலாம். அப்பொழுது மூலத்தை வரிசையின் நடு மத்தியில் அமைத்து, அரை ஆண்டை ஓர் அளவாகக் கொண்டால், $t = \frac{n}{2}$ ஆகும். முன் போலவே, x-ஐ மூலத்திலிருந்து வரும் விலக்கங்களைக் குறிப்பிடுமாறு கொண்டால், கீழ்க்காணும் சூத்திரங்களை நிறுவலாம்.

$$\Sigma x = 0$$

$$\Sigma x^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{3}$$

$$\Sigma x^3 = 0$$

$$\Sigma x^4 = (\Sigma x^2)\left(\frac{3n^2 - 7}{5}\right)$$

$$\Sigma x^5 = 0$$

$$\Sigma x^6 = (\Sigma x^2)\left(\frac{3n^4 - 18n^2 + 31}{7}\right)$$

வேறு சில போக்குச் சார்பலன்களைக் கால வரிசைகளுக்குப் பொருத்தும்பொழுது, x-ன் லாகிருதம்களின் மொத்தமும், அவைகளின் வர்க்கங்களின் மொத்தமும் தேவையாக இருக்கும். பர்ல் (Pearl) என்பவரின் 'Introduction to Medical Biometry and Statistics' (வெளியிட்டோர், Saunders, Philadelphia, 1930) நூலின் பின் இணைப்பு V-ல், இதுபோன்ற மொத்தங்களைக் காணலாம். அங்கு

x என்பது 1-லிருந்து 100 வரையிருக்கும்பொழுது log x-ன் முதலடுக்கு, இரண்டாமடுக்கு மொத்தங்கள் உள்ளன.

சாதாரணமாக எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டை $y=ab^x$ பொருத்தும்பொழுது, அந்தச் சமன்பாட்டை லாகிருதம்கள் எடுத்து நேர்கோடாக அமைப்போம். இணைப்பு குறைந்த வர்க்க முறையில் இருக்குமாயின், அது விலக்கங்களின் லாகிருதம்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் சிறுமமாக அமையுமாறு இருக்கும். நூலின் இடையே சுட்டிக்காட்டியதைப்போல், பேராசிரியர் ஜேம்ஸ் டபிள்யூ. குளோவர் (Professor James W. Glover) என்பவர் இதே வளைகோட்டை இணைப்பதற்கு மற்றொரு முறையைத் தந்துள்ளார்; அந்த முறைக்குத் தேவையான ஒரு பட்டியலையும் தந்துள்ளார். நன்கு இணைக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் மாறிலிகளைக் கண்டுபிடிப்பதை இந்த அட்டவணை எளிதாக்கும். இந்த அட்டவணை குளோவரின் 'Tables of Applied Mathematics' என்ற நூலின் (வெளியிட்டோர்: Ann Arbor, Michigan, George Wahr, 1923) 468–481 பக்கங்களில் உள்ளது.

பொதுவாக, அதிக அடுக்குகளுள்ள வளைகோடுகளைப் பொருத்தும்பொழுதும், முக்கியமாக ஒரே விவரங்களுக்குப் பல வளைகோடுகளைப் பொருத்தும்பொழுதும், நம் வேலைப் பளுவைக் குறைப்பதற்குப் பற்பல முறைகள் உள்ளன. இவைகள் வேலையை எளிதாக்கிக் கூட்டும் யந்திரங்களில் செய்துவிடுமாறு அமைந்தவை; ஆனால், அவற்றை ஆராய்ச்சியாளர்களே பயன்படுத்த முடியும். ஒரே வகையான பற்பல வேலைமுறைகளைச் செய்யவேண்டியிருந்தாலன்றி, இம் முறைகளைக் கையாளுவது நல்லதன்று. முதற்கண் அடிப்படையான குறைந்த வர்க்க முறையை நன்கு கற்றுத் தேர்ந்த பிறகே, பெருவாரியான கணக்கிடுதல்களுக்கான மற்ற முறைகளைக் கையாளவேண்டும்.

ஒழுங்கானதும், விரிவான கணக்கிடுதல்களுக்கு ஒத்ததுமான முறைகளை, ஃபிஷர் என்பவரின் நூலிலும் (து.நூ.ப. 50), ஸாஸுலி (Sasuly) என்பவரின் நூலிலும் (து.நூ.ப. 134) காணலாம். ஃபிஷர் என்பவரால் நிறுவப்பட்ட ஆர்தாகொனல் பாலிநோமியல்ஸ் (orthogonal polynomials) முறையைக் கொண்டால் அதற்கான அட்டவணைகளையும் பயன்படுத்தவேண்டும். ஃபிஷர் மற்றும் யேட்ஸ் (து.நூ.ப. 51), அட்டவணை XXIII-ஐப் பார்க்க.

பின் இணைப்பு C

சில புள்ளியியல் பிரச்சினைகளில் குறைந்த வர்க்க முறை

பல கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து, ஒரே ஒரு மதிப்புத் தெரியாத (unknown) அளவையை மதிப்பிடுவதற்குக் குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்துவது, அதன் பெரும்பாலும் நிகழக் கூடிய மதிப்பைக் (most probable value) கண்டுபிடிப்பதாகும். விலக்கங்களின் (அல்லது மீதிகளின்) வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எந்த மதிப்பிற்கு மிகக் குறைவாக (minimum) உள்ளதோ, அந்த மதிப்பே பெரும்பாலும் நிகழக்கூடியதாகும். இது, விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியேதான்.

ஒரே ஒரு மதிப்புத் தெரியாத அளவையின் விவரங்களாக இல்லாமல், பல மதிப்புத் தெரியாத அளவைகளின் சார்பலன்களாகக் குறித்த கண்டறிந்த விவரங்கள் இருப்பது வேறு பிரச்சினையாகும். முதலில் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு கண்டறிந்த விவரமும் ஒரு தனித்த அளவையாகவே இருக்கும். இங்கு ஒவ்வொரு கண்டறிந்த விவரமும் ஒரு சமன்பாட்டு வடிவில் அமையும்; இதில் இணைப்பான மாறிகளின் கண்டறிந்த விவரங்களும் இடம் பெறும். மாறிகளிடையே உள்ள சார்பலன்-தொடர்பைக் (functional relationship) குறிப்பிடும் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளேதான், நமக்குத் தெரியாதவைகள். இந்த மாறிலிகளின் உண்மை மதிப்புகள் (true values) தெரியாதாகையால், அவைகளின் பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகளைப் பெறுவதே நமது நோக்கம்.

எளிதான முதல் நிலையைப்போலவே, இதிலும், மீதிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை மிகக் குறைவாக்குமாறு அமையும் மதிப்புகளே பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகளாம். இங்கு விலக்கங்கள் ஒரு தனி அளவையிலிருந்து நிகழாமல், சார்பலத் தொடர்பை விவரிக்கும் கோட்டிலிருந்து நிகழுபவை. சார்புடை

மாறியின் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளுக்கும் கண்டறிந்த மதிப்பு களுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களே இந்த விலக்கங்கள்.

நார்மல் சமன்பாடுகள்

Y என்பது மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்பையும், Y_c என்பது அதே மாறியின் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பையும், ν என்பது Y, Y_c இரண்டிற்குமுள்ள வித்தியாசமான மீதியையும், W_1, W_2, W_3, W_4 என்பவை தனித்த மாறிகளையும் குறிப்பிடும் என்று கொள்வோம். (W-க்கள் ஒரே தனித்த மாறியின் வெவ்வேறு சார்பலன்களாகவும் இருக்கலாம்.) அப்பொழுது, நாம் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$Y_c = f(W_1, W_2, W_3, W_4)$$
$$\nu = Y_c - Y = f(W_1, W_2, W_3, W_4) - Y$$
$$\Sigma(\nu^2) = \Sigma[f(W_1, W_2, W_3, W_4) - Y]^2$$

சார்பலன்

$$Y_c = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4$$

என்று இருக்கிறது என்றால்,

$$\Sigma(\nu^2) = \Sigma[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y]^2$$

சார்பலனை விளக்கும் மாறிலிகளின் பெரும்பாலும் நிகழக் கூடிய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்தலே நமது நோக்கம். இங்கு அந்த மாறிலிகள் a, b, c, d என்பவை. (கண்டறிந்த சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டபின், W-க்களின் மதிப்பு தெரிந்தது தான் என்பதை கவனிக்கவும். சாதாரணமாக, W-க்கள் எல்லாம் ஒரே மாறியின் வெவ்வேறு சார்பலன்களாக இருக்கும்; ஆனால், இப்படித்தான் இருக்கவேண்டும் என்ற விதியில்லை.) கண்டறிந்த விவரங்களி லுள்ள பிழைகள் எல்லாம் நார்மல் பரவல் நிலையில் அமைந்தவை என்று எண்ணுவோம். அப்பொழுது, a, b, c, d-யின் பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகள் $\Sigma(\nu^2)$ என்ற கோவையைச் சிறுமம் (minimum) ஆக்குபவை என்பதைக் காட்டலாம்.

அதாவது $\Sigma[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y]^2 =$ சிறுமம் (A)

இந்தக் கோவையின் ஒருசிறை நுண்வகைக் கெழுக்களை— a, b, c, d என்ற மதிப்புத் தெரியாத மதிப்புகளுக்கானவைகளைச் (partial derivatives) சுழிக்குச் சமமாக்கினால், நமக்கு நார்மல் சமன்பாடுகள் வரும். அவைகளின் தீர்வுகளே நமக்கு வேண்டிய பெரும்பாலான மதிப்புகளாகும். அதாவது a மாறியினால் நுண் கலனம் (differentiable) செய்யும்பொழுது, b, c, d என்பவைகளை மாறிலிகளாகக் கருதியும், b-யினால் நுண்கலனம் செய்யுங்கால்

a, c, d என்பவைகளை மாறிலிகளாகக் கருதியும், பிறகு c-யினுல் நுண்கலன் செய்ய a, b, d-களை மாறிலிகளாக எண்ணியும், கடைசியாக a, b, c-களை மாறிலிகளாக எண்ணி d-யினுல் நுண்கலனமும் செய்யவேண்டும். a-க்கான இம் முறையைச் செயற்படுத்தினுல் :

$$\frac{\delta}{\delta a}\Sigma[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y]^2 = 0$$

அதாவது

$$\text{I} \quad \Sigma W_1[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4)-Y] = 0$$

(A) என்ற சமன்பாட்டை b-யினுல் நுண்கலனம் செய்ய

$$\frac{\delta}{\delta b}\Sigma[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4) - Y]^2 = 0$$

அதாவது

$$\text{II} \quad \Sigma W_2[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4) - Y] = 0$$

c-யினுல் (A) ஐ நுண்கலனமாக்கினுல் :

$$\frac{\delta}{\delta c}\Sigma[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4)-Y]^2 = 0$$

அதாவது

$$\text{III} \quad \Sigma W_3[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4) - Y] = 0$$

கடைசியாக, d-யினுல் நுண்கலனம் செய்ய

$$\frac{\delta}{\delta d}\Sigma[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4) - Y]^2 = 0$$

அதாவது

$$\text{IV} \quad \Sigma W_4[(aW_1+bW_2+cW_3+dW_4) - Y] = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

a, b, c, d என்பவைகளில் பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகளைப் பெற, இந்த நான்கு நார்மல் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் (மேலே I, II, III, IV என்று குறிக்கப்பட்டவை) தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

நார்மல் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல் : கண்டறிந்த சமன்பாடுகள் எல்லாம், (a, b, c, d என்ற மதிப்புத் தெரியாதவைகளைப் பொறுத்தமட்டில்) ஓர் அடுக்குச் சமன்பாடுகளானுல், கீழ்க்கண்ட முறைகளைப் பின்பற்றி நார்மல் சமன்பாடுகளை அமைத்துவிடலாம்.

1. எண்ணப்பட்ட தொடர்புச் சமன்பாட்டை எழுது ; இதில் இணைந்துள்ள மாறிகளின் கண்டறிந்த விவரங்களைப் பொருத்தினுல் கிடைப்பவைதான் கண்டறிந்த சமன்பாடுகள்.

2. மதிப்புத் தெரியாத முதல் அளவையின் கெழுவினுல், (coefficient) அந்தச் சமன்பாட்டைப் பெருக்கு; வரும் எல்லாச்

சமன்பாடுகளையும் கூட்டினால் நிகழுவதே நமக்கு வேண்டிய முதல் நார்மல் சமன்பாடு.

3. மதிப்புத் தெரியாத இரண்டாம் அளவையின் கெழுவினால் அந்தச் சமன்பாடுகளைப் பெருக்கு; வரும் சமன்பாடுகளைக் கூட்டினால் நிகழுவதே இரண்டாவது நார்மல் சமன்பாடு.

இதே முறையை, எவ்வளவு மதிப்புத் தெரியாத அளவைகள் உள்ளனவோ அவ்வளவு நார்மல் சமன்பாடுகள் வரும் வரையில் பின்பற்றவும்.

தனித்தனியே கண்டறிந்த சமன்பாடுகளை எழுதுவதைத் தவிர்த்து, நார்மல் சமன்பாடுகள் அமைக்க எளிதான முறையொன்றைக் கையாளலாம். கீழே வளைகோட்டு இணைப்புக்கு (curve fitting) அந்த முறைக்கான பொது விதிகளைக் கூறியுள்ளோம் :

1. இணைக்கவேண்டிய வளைகோட்டிற்கான சமன்பாட்டை எழுதவும். விளக்கத்திற்காகக் கீழ்க்கண்ட பொதுவான சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$Y = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4 + \ldots \qquad (1)$$

இங்கு Y என்பது சார்புடை மாறியையும், a, b, c, d...என்பவை (இவைகளே மதிப்புத் தெரியாதவைகள்) சமன்பாட்டின் மாறிலிகளையும், W_1, W_2, W_3, W_4... என்பவை மதிப்புத் தெரியாத இந்த மாறிலிகளின் கெழுக்களையும் குறிக்கும். இதனை (1) என்று குறிப்பிடவும்.

2. சமன்பாடு (1)-ல் உள்ள மதிப்புத் தெரியாத முதல் மாறிலியின் கெழுவினால் (அதாவது W_1-ஆல்) (1)ஐப் பெருக்கு; ஒவ்வொரு மாறிலியின் முன்பும் Σ-குறியைப் பொருத்து. இதுவே முதல் நார்மல் சமன்பாடு.

3. சமன்பாடு (1)-ல் உள்ள இரண்டாவது மதிப்புத் தெரியாத மாறிலியின் கெழுவினால் (அதாவது W_2-ஆல்) (1)ஐப் பெருக்கு ; ஒவ்வொரு மாறியின் முன்பும் Σ-குறியைப் பொருத்து. இதுவே, இரண்டாம் நார்மல் சமன்பாடு.

4. சமன்பாடு (1)-ல் உள்ள மூன்றாவது மதிப்புத் தெரியாத மாறிலியின் கெழுவினால் (அதாவது W_3-ஆல்) (1)ஐப் பெருக்கு ; ஒவ்வொரு மாறியின் முன்பும் Σ-குறியைப் பொருத்து. இதுவே மூன்றாவது நார்மல் சமன்பாடு.

5. சமன்பாடு (1)-ல் உள்ள நான்காவது மதிப்புத் தெரியாத மாறிலியின் கெழுவினால் (அதாவது W_4-ஆல்) (1)ஐப் பெருக்கு;

ஒவ்வொரு மாறியின் முன்பும் Σ-குறியைப் பொருத்து. இதுவே நான்காம் நார்மல் சமன்பாடு.

இதே முறையை, தெரியாதவைகளின் எண்ணிக்கையும், நார்மல் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாகும் வரை, தொடர்ந்து செயற்படுத்தலாம்.[1]

தரப்படுத்தப்பட்ட நார்மல் சமன்பாடுகளின் ஒரு வரிசை : பொதுப்படையான நார்மல் சமன்பாடுகளை மேற்கூறிய முறையினால்,

$$Y = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4 + \ldots$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தினால், கீழ்க்கண்ட நார்மல் சமன்பாடுகள் வரும்:

$$\text{I} \quad \Sigma(W_1 Y) = a\Sigma(W_1^2) + b\Sigma(W_1 W_2) + c\Sigma(W_1 W_3) + d\Sigma(W_1 W_4) + \ldots$$

$$\text{II} \quad \Sigma(W_2 Y) = a\Sigma(W_1 W_2) + b\Sigma(W_2^2) + c\Sigma(W_2 W_3) + d\Sigma(W_2 W_4) + \ldots$$

$$\text{III} \quad \Sigma(W_3 Y) = a\Sigma(W_1 W_3) + b\Sigma(W_2 W_3) + c\Sigma(W_3^2) + d\Sigma(W_3 W_4) + \ldots$$

$$\text{IV} \quad \Sigma(W_4 Y) = a\Sigma(W_1 W_4) + b\Sigma(W_2 W_4) + c\Sigma(W_3 W_4) + d\Sigma(W_4^2) + \ldots$$

குறிப்பிட்ட நிலையிலுள்ள சார்பலன்களை $W_1, W_2, W_3, W_4 \ldots$ என்பவைகளுக்குப் பதிலாக வைத்தால், இதே முறையைக் குறைந்த வர்க்க முறைக்குப் பொருந்திய எந்த வகை வளைகோட்டு இணைத்தலுக்கும் பயனாக்கலாம்.

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

என்ற சமன்பாட்டை இணைக்கவேண்டுமானால், மேற்கண்ட தரப்படுத்தப்பட்ட நார்மல் சமன்பாடுகளில் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளைப் பொருத்தவேண்டும் :

$$W_1 = 1$$
$$W_2 = X$$
$$W_3 = X^2$$
$$W_4 = X^3$$

[1] ரேமண்ட் பர்ல் (Raymond Pearl) என்பவர் தம் நூலில் ' Medical Biometry and Statistics, 341 ' தந்துள்ள விதித்தொடரைச் சற்றே மாற்றியமைத்து, இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இவைகளுக்கான மாறுதல் எப்படிப்பட்டவை என்று காண்பது எளிது. ($\Sigma W_1 Y$) என்பது $\Sigma(Y)$ ஆகும் ; $\Sigma(W_1^2)$என்பது $\Sigma(1^2)$ அல்லது N, கண்டறிந்த விவரங்களின் மொத்தமாகும். எனவே, முதல் நார்மல் சமன்பாடு

$$\Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X) + c\Sigma(X^2) + d\Sigma(X^3)$$

என்று அமையும். இதைப்போலவே மற்றவைகளையும் மாற்றி அமைக்கலாம்.

இப்பொழுதுதான் கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில், W_2, W_3, W_4 என்ற மூன்றும் X என்ற ஒரே மாறியின் சார்பலன்களே. ஆனால், குறைந்த வர்க்க முறைக்கு இப்படித்தான் இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை. W_1, W_2, W_3......என்பவை பல தனித்த மாறிகளையும் —பல்தரத் தொடர்புக் கணக்குகளிலுள்ளதைப்போல்—குறிப்பிடலாம்.

குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, அந்த முறையின் வரம்புகளையும் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டும். இணைக்கவேண்டிய சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகள் எல்லாம் ஓர் அடுக்கு (first degree) உறுப்புகளாக இருந்தால்தான், இந்த முறை நேராகப் பயன்படும். அதாவது கண்டறிந்த சமன்பாடுகளிலெல்லாம், மதிப்புத் தெரியாத a, b, c......என்பவை ஓர் அடுக்கு (first degree, linear) உறுப்புகளாகவே இருக்கவேண்டும். (இப்படிக் கூறுவதால், இணைக்கவேண்டிய வளைகோடும் ஒரே அடுக்குக் கோவையாக இருக்கவேண்டு மென்பதில்லை.) இந்த வரம்பினை விளக்க, ஓர் எடுத்துக்காட்டாக $y = ab^{cx}$, என்ற சமன்பாட்டை இணைத்தலைக் கவனிக்கலாம். இதை நேராகக் குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி நார்மல் சமன்பாடுகளை அமைத்து இணைக்க முடியாது. கண்டறிந்த சமன்பாடு ஓரடுக்கு அல்லாத நிலைகள் சிலவற்றில், லாகிருதம்களை எடுப்பதால் அவைகளை ஓர் அடுக்குடையவைகளாக மாற்றமுடியும் ; பிறகு குறைந்த வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

மதிப்பீட்டின் தரப்பிழைக்கான சூத்திரத்தை வருவித்தல்

நூலின் உட்பகுதிகளில், மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையைக் குறைந்த வர்க்க முறையின் ஒரு பக்கவிளைவாகப் (by-product) பெறலாம் என்று குறிப்பிட்டுள்ளோம். அந்த முறையின் முழுமையான விளக்கத்தை இங்குக் காணலாம்.

$$\Sigma[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y]^2$$

என்ற கோவையின் a-க்கான ஒருசிறை நுண்கலனக் கெழுவைக்

கணக்கிட்டு, அதைச் சுழிக்குச் சமமாக்கும்பொழுது

$$\Sigma W_1[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y] = 0$$

என்று வருகிறது. ஆனால்,

$$aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4 - Y = \nu$$

என்பது நாம் அறிந்ததே. எனவே, இணைப்பிற்கான முதல் அவசிய விதி

$$\Sigma(\nu W_1) = 0$$

என்றாகிறது.

அதே கோவையின் b-க்கான ஒருசிறை நுண்கலனக் கெழுவைச் சுழிக்குச் சமமாக்க,

$$\Sigma W_2[(aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4) - Y] = 0$$

என்பதும், முன்போலவே

$$\Sigma(\nu W_2) = 0$$

என்பதும் கிடைக்கும். c, d-களுக்கும் இதே முறையைக் கையாண்டால்

$$\Sigma(\nu W_3) = 0$$

மற்றும்

$$\Sigma(\nu W_4) = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் வரும்.

சுருங்கக் கூறின் : குறைந்த வர்க்க முறையையொட்டி சில மதிப்புத் தெரியாத அளவைகளின் பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கும்பொழுது, W_1, W_2, W_3, W_4 என்பவைகளைத் தெரிந்த கெழுக்களாகக் கொண்டால், அந்தக் குறைந்த வர்க்க முறையின் அவசியமான விதிகளாகக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் வரும் :

$$\Sigma(\nu W_1) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_2) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_3) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_4) = 0$$

இந்தச் சமன்பாடுகளை வைத்துக்கொண்டு $\Sigma(\nu^2)$-யும், மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையையும் கண்டுபிடிக்க முடியும். குறைந்த வர்க்க முறையையொட்டி மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து விட்டோம் என்று கருதுவோம். அப்பொழுது

$$Y_c = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4$$

எனவே, ஒவ்வொரு மீதியும்

$$\nu = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4 - Y \qquad (1)$$

என்றாகிறது. இந்தச் சமன்பாட்டை ν-ஆல் பெருக்கி மொத்தமாக்கினால்

$$\Sigma(\nu^2) = a\Sigma(\nu W_1)+b\Sigma(\nu W_2)+c\Sigma(\nu W_3)+d\Sigma(\nu W_4)-\Sigma(Y\nu) \quad (2)$$

என்பது வரும்.

ஆனால்,

$$\Sigma(\nu W_1) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_2) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_3) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_4) = 0$$

ஆனதால்,

$$\Sigma(\nu^2) = -\Sigma(Y\nu) \quad (3)$$

(1)-ல் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் Y-ஆல் பெருக்கி மொத்தமாக்கினால்

$$\Sigma(Y\nu) = a\Sigma(W_1 Y)+b\Sigma(W_2 Y)+c\Sigma(W_3 Y)+d\Sigma(W_4 Y) -\Sigma(Y^2) \quad (4)$$

எனவே,

$$\Sigma(\nu^2) = \Sigma(Y^2)-a\Sigma(W_1 Y)-b\Sigma(W_2 Y)-c\Sigma(W_3 Y) -d\Sigma(W_4 Y) \quad (5)$$

இந்தச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $\Sigma(\nu^2)$ என்பதனைக் கண்டுபிடித்துவிடலாம் ; ஒவ்வொரு மீதியையும் தனித்தனியே கணக்கிட வேண்டியதில்லை. இணைக்கப்படவேண்டிய வளைகோடு

$$Y = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4$$

என்ற அமைப்பில் இருந்தாலும், அல்லது லாகிருதங்களை எடுப்பதாலோ ரெஸிப்ரோக்கல்களை எடுப்பதாலோ, இந்த அமைப்பில் வந்தாலும் இந்த முறை பயனளிக்கும்.

குறித்த ஒரு நிலையில் இந்த முறையைச் செயற்படுத்த, நாம் W_1, W_2, W_3, W_4...போன்றவைகளுக்குத் தகுந்த கோவைகளை (கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் மதிப்புத் தெரியாதவைகளின் கெழுக்களாக வருபவை) பொருத்த வேண்டும் ; அவ்வளவுதான்.

ஆக,

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

என்ற வளைகோட்டை இணைக்கும்பொழுது, முன்பே பார்த்ததுபோல்

$$W_1 = 1$$
$$W_2 = X$$
$$W_3 = X^2$$
$$W_4 = X^3$$

ஆனதால், (5)-ல் இவைகளைப் பொருத்த,

$$\Sigma(\nu^2) = \Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) - c\Sigma(X^2 Y) - d\Sigma(X^3 Y) \qquad (6)$$

என்ற விடை வருகிறது.

தரப்பிழையான $s_{y \cdot x}$ என்பது கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின்படி

$$s^2_{y \cdot x} = \frac{\Sigma(d^2)^*}{N}$$

என்றாகும்.

இங்கு d என்பது இணைக்கப்பட்ட கோட்டிலிருந்து வரும் ஒரு விலக்கம். எனவே, ν-என்ற மீதிக்கு d-என்பது மற்றொருவகை அடையாளமே ஆகிறது. ஆக, Y-ன் தரப்பிழைக்கான பொதுப் படையான ஒரு கோவை

$$s^2_{y \cdot x} = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(W_1 Y) - b\Sigma(W_2 Y) - c\Sigma(W_3 Y) - d\Sigma(W_4 Y)}{N} \qquad (7)$$

என்பதாகும். இங்கு W_1, W_2, W_3, W_4 என்பவை தனித்த மாறிகள். இதே சூத்திரத்தைக் குறித்த ஓர் உதாரணத்திற்கும், W_1, W_2, W_3, W_4...என்பவைகளுக்கு, சமன்பாட்டிலுள்ள மதிப்புத் தெரியாதவற்றின் கெழுக்களைப் பொருத்திப் பயன்படுத் தலாம்.

நார்மல் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதலுக்குத் தணிக்கைகள் (Checks on the Formation of the Normal Equations)

நார்மல் சமன்பாடுகளை உருவாக்குவதிலும், அவைகளுக்குத் தீர்வு காணுவதிலும் பற்பல கணக்குவழிப் பிழைகள் நேரக்கூடும்; எனவே, எப்பொழுது தணிக்கை செய்ய முடிகிறதோ, அப்பொழு தெல்லாம் தணிக்கை செய்வது (checking) மிக அவசியம். ஒரு சமன்பாட்டிலுள்ள தெரிந்த எல்லா எண்களின் மொத்தம்

* இணைக்கப்பட்ட வளைகோட்டை ஒட்டிய 'சிதறல்'களை அளப்பதுதான் நம் நோக்கம்; எனவே, $\frac{\Sigma(d^2)}{N}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்; $\frac{\Sigma(d^2)}{N - N_c}$ (N என்பது விவரங்களின் எண்ணிக்கையையும், N_c என்பது சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிடும்) என்பதனை அல்ல.

s என்போம்; இந்த மதிப்பை ஒவ்வொரு கண்டறிந்த சமன் பாட்டிலும் புகுத்துவதால், நார்மல் சமன்பாடுகளை நிறுவுவதில் ஒரு தணிக்கை முறையைக் கையாள முடியும்.

எடுத்துக்காட்டாகக் கீழுள்ள பல புள்ளிகளிடையே ஒரு நேர் கோட்டை இணைக்கவேண்டியிருக்கிறது என்று கொள்வோம்: **1, 3; 2, 4; 3, 6; 4, 5; 5, 10; 6, 9; 7, 10; 8, 12; 9, 11.** அப்பொழுது கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் s-ன் மதிப்புகள் உள்ளன.

	s
$3 = a + 1b$	5
$4 = a + 2b$	7
$6 = a + 3b$	10
$5 = a + 4b$	10
$10 = a + 5b$	16
$9 = a + 6b$	16
$10 = a + 7b$	18
$12 = a + 8b$	21
$11 = a + 9b$	21

(ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலும், a-ன் கெழு ஒன்றுதான்; இது மற்ற இரண்டுடனும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.)

$$Y = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4$$

என்ற சமன்பாட்டால் குறிப்பிடப்படும் வளைகோட்டைப் பொருத்தும் அல்லது இணைக்கும்பொழுது, கீழ்க்கண்ட சமன் பாடுகள், s, மற்றும் ஏனைய அளவைகளிடையே நிகழும்.

ஒவ்வொரு கண்டறிந்த சமன்பாட்டிற்கும்

$$Y + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = s$$

நார்மல் சமன்பாடுகளுக்கு:

$$\Sigma(W_1 Y) + \Sigma(W_1^2) + \Sigma(W_1 W_2) + \Sigma(W_1 W_3) + \Sigma(W_1 W_4) = \Sigma(W_1 s)$$
$$\Sigma(W_2 Y) + \Sigma(W_1 W_2) + \Sigma(W_2^2) + \Sigma(W_2 W_3) + \Sigma(W_2 W_4) = \Sigma(W_2 s)$$
$$\Sigma(W_3 Y) + \Sigma(W_1 W_3) + \Sigma(W_2 W_3) + \Sigma(W_3^2) + \Sigma(W_3 W_4) = \Sigma(W_3 s)$$
$$\Sigma(W_4 Y) + \Sigma(W_1 W_4) + \Sigma(W_2 W_4) + \Sigma(W_3 W_4) + \Sigma(W_4^2) = \Sigma(W_4 s)$$

எந்தக் குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்கும் இந்த அமைப்பு பயனளிக்கும். ஒவ்வொரு நிலையிலும், s-சமன்பாடுகளும், நார்மல் சமன்பாடுகளைப் போலவே உருவாக்கப்படுகின்றன.

இந்தத் தணிக்கைகளைச் செயற்படுத்துவதற்குக் கணக்குப் போடும் பட்டியலில் (working table) பல கூடுதலான பத்திகளை

அமைக்கவேண்டியதாகும். இதனுல் ஏற்படும் அதிகமான சிரமம், ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் (stage) தணிக்கை செய்யும் வாய்ப்பு ஏற்படுவதால் ஈடுகட்டினுற்போல் ஆகும். கீழ்க்கண்ட பட்டியலில்

$$Y = a + bX + cX^2$$

என்ற ஈரடுக்குச் சமன்பாட்டை இணைப்பதற்கான கணக்குகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கண்டறிந்த விவரங்கள், 1, 2; 2, 6; 3, 7; 4, 8; 5, 10; 6, 11; 7, 11; 8, 10; 9, 9 என்ற 9 புள்ளிகளே.

அட்டவணை A

நார்மல் சமன்பாடுகள் அமைப்பதில் தணிக்கை செய்வதற்கான முறைகள்

Y	X	X^2	XY	X^2Y	s	Xs	X^2s
2	1	1	2	2	5	5	5
6	2	4	12	24	13	26	52
7	3	9	21	63	20	60	180
8	4	16	32	128	29	116	464
10	5	25	50	250	41	205	1,025
11	6	36	66	396	54	324	1,944
11	7	49	77	539	68	476	3,332
10	8	64	80	640	83	664	5,312
9	9	81	81	729	100	900	8,100
74	45	285	421	2,771	413	2,776	20,414

X^3, X^4-களுக்கான பத்திகள் இங்கு இல்லை; ஏனென்றுல் $\Sigma(X^3)$, $\Sigma(X^4)$ என்பவைகளைத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல்களிலிருந்து பெறலாம்.

s என்று தலைப்புத் தரப்பட்டுள்ள பத்தியில் உள்ள மதிப்புகள், கண்டறிந்த சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைப்பவை. எடுத்துக்காட்டாக, முதல் கண்டறிந்த சமன்பாடான

$$2 = 1a + 1b + 1c$$

என்பதிலிருந்து s-என்பது 5 என்று (2 + மூன்று மாறிலிகளின் கெழுக்கள்) ஆகிறது. s-ன் மற்ற மதிப்புகளை Y, X, X^2 என்ற பத்திகளிலுள்ள எண்களின் மொத்தத்துடன் 1-யும் கூட்டுவதால்—மாறிலியான a-யின் கெழு—எளிதில் கண்டுபிடித்துவிடலாம்.

எல்லாப் பத்திகளேயும் கூட்டிய பிறகு, கீழ்க்கண்ட தணிக்கை முறைகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

$$\Sigma(Y) + N + \Sigma(X) + \Sigma(X^2) = \Sigma(s)$$

இங்கு

$$74 + 9 + 45 + 285 = 413$$

$$\Sigma(XY) + \Sigma(X) + \Sigma(X^2) + \Sigma(X^3) = \Sigma(Xs)$$

இங்கு

$$421 + 45 + 285 + 2{,}025 = 2{,}776$$

$$\Sigma(X^2 Y) + \Sigma(X^2) + \Sigma(X^3) + \Sigma(X^4) = \Sigma(X^2 s)$$

இங்கு

$$2{,}771 + 285 + 2{,}025 + 15{,}333 = 20{,}414.$$

இதுபோன்ற தணிக்கை முறையின் மற்றப் பயன்களேயும், கீழே நார்மல் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் காணும்பொழுது விளக்குவோம்.

மற்றச் சோதனைகள்: முன் சென்ற பகுதிகளில், நம் கணக்குகளே வேறு சில வழிகளில் தணிக்கை செய்யலாம் என்பதும் சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இணைக்கப்பெற்ற சமன்பாட்டிலுள்ள கெழுக்கள் W_1, W_2, W_3, W_4 ஆனல்,

$$\Sigma(\nu W_1) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_2) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_3) = 0$$
$$\Sigma(\nu W_4) = 0$$

என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

என்ற வளேகோடு இணைக்கப்பெற்றிருந்தால்,

$$\Sigma(\nu) = 0$$
$$\Sigma(\nu X) = 0$$
$$\Sigma(\nu X^2) = 0$$
$$\Sigma(\nu X^3) = 0$$

என்பது தணிக்கை சமன்பாடுகள். இவைகளேயும் வைத்துக்கொண்டு நம் கணக்குகளேச் சரிபார்க்கலாம்.

கடைசியாக, மதிப்பீட்டின் தரப்பிழையை இரு வழிகளில் கணக்கிட்டும், நம் விடையைச் சரிபார்க்கலாம். முதலில், மீதிகளே—கண்டறிந்த மற்றும் கணக்கிட்ட மதிப்புகளின் வித்தியாசங்களே—தனித்தனியே கணக்கிட்டு, அவைகளிலிருந்து S-ஐக் கண்டுபிடிப்போம். இரண்டாவதாக, நாம் மேலே நிறுவியுள்ள தரப்பிழைக்கான பொதுப்படைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடுவோம்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டிலுள்ள விவரங்களுக்கு இணைக்கப்பட்ட ஈரடுக்கு வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$Y = -0.92860 + 3.52316X - 0.267316X^2$$

என்பதாகும். இதற்கான மீதிகளைத் தனித்தனியே கணக்கிட்ட பிறகு,

$$s_{y \cdot x} = \cdot 4941$$

என்று வருகிறது.

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma(Y^2) - a\Sigma(Y) - b\Sigma(XY) - c\Sigma(X^2 Y)}{N}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$s_{y \cdot x} = 0.4947$$

என்று வருகிறது. இது, நாம் போட்ட கணக்குகளுக்கு ஒரு முடிவான தணிக்கையாக அமைகிறது.

பல்தரத் தொடர்புப் பிரச்சினையில் வரும் நார்மல் சமன்பாடுகளை எளிதாக்குதல்.[2]

18ஆம் அதிகாரத்தில், பல்தரத் தொடர்புகளைப்பற்றிக் கூறும் பொழுது, கீழ்க்கண்ட நார்மல் சமன்பாடுகளை முதலில் வருவித்தோம்.

$$\text{I} \quad \Sigma(X_1) = Na + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_4)$$

$$\text{II} \quad \Sigma(X_1X_2) = a\Sigma(X_2) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2^2) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_2X_3) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_2X_4)$$

$$\text{III} \quad \Sigma(X_1X_3) = a\Sigma(X_3) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_3) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3^2) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_3X_4)$$

$$\text{IV} \quad \Sigma(X_1X_4) = a\Sigma(X_4) + b_{12\cdot34}\Sigma(X_2X_4) + b_{13\cdot24}\Sigma(X_3X_4) + b_{14\cdot23}\Sigma(X_4^2)$$

பிறகு, அவைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைத்து மாற்றியமைத்துத் தீர்வுகள் கண்டோம். முறை விளக்கங்களை இங்குக் காணலாம். மாறிகளின் சராசரிகளை A_1, A_2, A_3, A_4 என்றும், அவைகளின் (சராசரியிலிருந்து) விலக்கங்களை x_1, x_2, x_3, x_4 என்றும் குறிப்பிடுவோம். அப்பொழுது X_1, X_2, X_3, X_4 களுக்குப் பதிலாக, அவைகளுக்கு முறையே சமமான $(x_1 + A_1)$, $(x_2 + A_2)$, $(x_3 + A_3)$, $(x_4 + A_4)$

[2] 'Journal of the American Statistical Association' என்ற இதழின் வால்யூம் 18-ல், 993-1003 பக்கங்களில், டோல்லி, எச். ஆர். மற்றும் எஜெகீல் எம். ஜெ. பி. என்பவர்களால் எழுதப்பட்ட 'A Method of Handling Multiple Correlation Problems' என்ற கட்டுரையிலிருந்து எடுத்துச் சிறிது மாற்றப்பட்டது.

என்பவைகளை மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் பொருத்த, அவை இவ்வாருக மாறும்:

$$\text{I} \quad \Sigma(x_1+A_1)=Na+\Sigma(x_2+A_2)\cdot b_{12\cdot34}+\Sigma(x_3+A_3)\cdot b_{13\cdot24} +\Sigma(x_4+A_4)\cdot b_{14\cdot23}$$

$$\text{II} \quad \Sigma[(x_1+A_1)(x_2+A_2)]=\Sigma[(x_2+A_2)\cdot a+\Sigma(x_2+A_2)^2]\cdot b_{12\cdot34} +\Sigma[(x_2+A_2)(x_3+A_3)]\cdot b_{13\cdot24} +\Sigma(x_2+A_2)(x_4+A_4)\cdot b_{14\cdot23}$$

$$\text{III} \quad \Sigma[(x_1+A_1)(x_3+A_3)]=\Sigma(x_3+A_3)\cdot a +\Sigma[(x_3+A_3)(x_2+A_2)]\cdot b_{12\cdot34}+\Sigma(x_3+A_3)^2\cdot b_{13\cdot24} +\Sigma[(x_3+A_3)(x_4+A_4)]\cdot b_{14\cdot23}$$

$$\text{IV} \quad \Sigma[(x_1+A_1)(x_4+A_4)]=\Sigma(x_4+A_4)\cdot a +\Sigma[(x_4+A_4)(x_2+A_2)]\cdot b_{12\cdot34} +\Sigma[(x_4+A_4)(x_3+A_3)]\cdot b_{13\cdot24}+\Sigma(x_4+A_4)^2\cdot b_{14\cdot23}$$

ஆனுல் $\Sigma(x_1+A_1)=\Sigma x_1+NA_1$ ஆதலாலும், $\Sigma x_1=0$ என்பதாலும், $\Sigma(x_1+A_1)$ என்பன போன்ற கோவைகளை NA_1 முதலானவைகளுக்குப் பதிலாக வைக்கலாம்.

மற்றும் $\Sigma(x_2+A_2)^2$ என்பதை விரிவாக்கிஞல் $\Sigma(x_2^2+2A_2x_2+A_2^2)$ என்று வரும். $\Sigma x_2=0$ என்பதஞல் நடுவிலிருக்கும் உறுப்பு மறையும். எனவே, $\Sigma x_2^2+NA_2^2$ என்பதுதான் மீதியாகும். இது போலவே மற்றவைகளுக்கும்.

பெருக்கலை விரிவாக்கிஞல் $\Sigma(x_1+A_1)(x_2+A_2)$ என்பது $\Sigma(x_1x_2+A_1x_2+A_2x_1+A_1A_2)=\Sigma x_1x_2+NA_1A_2$ என்ருகும்; ஏனென்ருல், $\Sigma x_1=\Sigma x_2=0$. மற்றப் பெருக்கல் உறுப்புகளும் இவ்வாறே மாறுதல் அடையும்.

இவற்றையெல்லாம் பொருத்தியபின், நார்மல் சமன்பாடுகளின் உருவம்

$$\text{I} \quad NA_1=Na+NA_2b_{12\cdot34}+NA_3b_{13\cdot24}+NA_4b_{14\cdot23}$$

$$\text{II} \quad \Sigma(x_1x_2)+NA_1A_2=NA_2a+[\Sigma(x_2)^2+NA_2^2]b_{12\cdot34} +[\Sigma(x_2x_3)+NA_2A_3]b_{13\cdot24}+[\Sigma(x_2x_4)+NA_2A_4]b_{14\cdot23}$$

$$\text{III} \quad \Sigma(x_1x_3)+NA_1A_3=NA_3a+[\Sigma(x_2x_3)+NA_2A_3]b_{12\cdot34} +[\Sigma(x_3)^2+NA_3^2]b_{13\cdot24}+[\Sigma(x_3x_4)+NA_3A_4]b_{14\cdot23}$$

$$\text{IV} \quad \Sigma(x_1x_4)+NA_1A_4=NA_4a+[\Sigma(x_2x_4)+NA_2A_4]b_{12\cdot34} +[\Sigma(x_3x_4)+NA_3A_4]b_{13\cdot24}+[\Sigma(x_4)^2+NA_4^2]b_{14\cdot23}$$

இப்பொழுது, ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் உறுப்பையும் N-ஆல் வகுத்து, $\frac{\Sigma x_1 x_2}{N}$ என்பதற்கு p_{12} என்றும் $\frac{\Sigma(x_2^2)}{N}$ என்பதற்கு s_2^2 என்றும், இப்படியே மற்றவைகளுக்கும் பொருத்தினுல்:

$$\text{I} \quad A_1 = a + A_2 b_{12\cdot34} + A_3 b_{13\cdot24} + A_4 b_{14\cdot23}$$

$$\text{II} \quad p_{12} + A_1 A_2 = A_2 a + (s_2^2 + A_2^2) b_{12\cdot34} + (p_{23} + A_2 A_3) b_{13\cdot24} + (p_{24} + A_2 A_4) b_{14\cdot23}$$

$$\text{III} \quad p_{13} + A_1 A_3 = A_3 a + (p_{23} + A_2 A_3) b_{12\cdot34} + (s_3^2 + A_3^2) b_{13\cdot24} + (p_{34} + A_3 A_4) b_{14\cdot23}$$

$$\text{IV} \quad p_{14} + A_1 A_4 = A_4 a + (p_{24} + A_2 A_4) b_{12\cdot34} + (p_{34} + A_3 A_4) b_{13\cdot24} + (s_4^2 + A_4^2) b_{14\cdot23}$$

இப்பொழுது இவைகளை மூன்ருக ஆக்கலாம்: I-ஐ A_2-ஆல் பெருக்கி II-லிருந்து கழித்துவிடவேண்டும்; பிறகு I-ஐ A_3-ஆல் பெருக்கி, III-லிருந்து கழிக்கவேண்டும்; பிறகு I ஐ A_4-ஆல் பெருக்கி IV-லிருந்து கழிக்கவேண்டும். எனவே, A-க்கள் இருக்கும் எல்லா உறுப்புகளும் மறைந்து, கீழ்க்காணும் மூன்று சமன்பாடுகளே நிற்கும்:

$$p_{12} = s_2^2 b_{12\cdot34} + p_{23} b_{13\cdot24} + p_{24} b_{14\cdot23}$$
$$p_{13} = p_{23} b_{12\cdot34} + s_3^2 b_{13\cdot24} + p_{34} b_{14\cdot23}$$
$$p_{14} = p_{24} b_{12\cdot34} + p_{34} b_{13\cdot24} + s_4^2 b_{14\cdot23}$$

இவைகளில், s-களுக்கும், p-களுக்குமான மதிப்புகளைப் பொருத்தி, மூன்று b-கெழுக்களுக்கும் தீர்வுகள் காணலாம். பிறகு அவைகளை

$$A_1 = a + A_2 b_{12\cdot34} + A_3 b_{13\cdot24} + A_4 b_{14\cdot23}$$

என்ற சமன்பாட்டில் பொருத்தி a-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

நார்மல் சமன்பாடுகளின் தேர்வுகள்: டூலிட்டில் முறை (Doolittle Method)

நார்மல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடித்தல் பொருளாதாரப் புள்ளியியலறிஞர்களுக்கு எழும் பிரச்சினைகளில் அவ்வளவு கடினமானதன்று. இரண்டோ, அல்லது மூன்ரே மதிப்புத் தெரியாத அளவைகளிருப்பின், அவைகளை எளிய இயற்கணக்கு முறைகளில் தீர்வாக்கிவிடலாம். எனினும், மூன்று சமன்பாடுகளே இருந்தாலும், ஒழுங்கான ஒரு செய்முறையைக் கையாளுதல் நல்லது; மூன்றிற்கு மேற்பட்ட சமன்பாடுகள் இருப்பின், இது மிக அவசியமாகக் கடைப்பிடிக்கவேண்டியது. ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண, பல ஒழுங்கான முறைகள் வகுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றில் இங்கு 'டூலிட்டில்' என்பவரின் முறையை விளக்குவோம்; இது பொதுவாகப் பயன்தரும் எளிதான ஒரு முறை.

நார்மல் சமன்பாடுகளிலுள்ள மதிப்புத் தெரியாதவைகளின் கெழுக்கள், முக்கிய மூலைவிட்டத்தைப்பொறுத்துச் (principal diagonal) சமச்சீராக அமைந்திருக்கும்.

$$Y = aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4$$

என்ற சமன்பாட்டில், a, b, c, d-க்கான பெரும்பாலும் நிகழக்கூடிய மதிப்புகளைப் பெற, நமக்கு 4 நார்மல் சமன்பாடுகளுள்ளன :

$$a\Sigma(W_1^2) + b\Sigma(W_1 W_2) + c\Sigma(W_1 W_3) + d\Sigma(W_1 W_4) - \Sigma(W_1 Y) = 0$$
$$a\Sigma(W_1 W_2) + b\Sigma(W_2^2) + c\Sigma(W_2 W_3) + d\Sigma(W_2 W_4) - \Sigma(W_2 Y) = 0$$
$$a\Sigma(W_1 W_3) + b\Sigma(W_2 W_3) + c\Sigma(W_3^2) + d\Sigma(W_3 W_4) - \Sigma(W_3 Y) = 0$$
$$a\Sigma(W_1 W_4) + b\Sigma(W_2 W_4) + c\Sigma(W_3 W_4) + d\Sigma(W_4^2) - \Sigma(W_4 Y) = 0$$

Y-வரும் உறுப்புகளை விட்டுவிட்டால், மற்றக் கெழுக்கள் எல்லாம், முக்கிய மூலை விட்டத்தைப்பொறுத்துச் சமச்சீராக அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். இந்த மூலை விட்டத்தில் ஏதாவதோர் உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டால், அதற்குமேலுள்ள கெழுவும், அதற்குப் பக்கத்திலுள்ள கெழுவும் ஒன்றாகவே இருப்பதைப் பார்க்கலாம். $\Sigma(W_3^2)$ என்ற கோவை வரும் உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டோமானால், அதற்கு இடது பக்கத்தில் உள்ள கெழு $\Sigma(W_2 W_3)$, $\Sigma(W_1 W_3)$ என்ற இரண்டும். அதே பத்தியில் $\Sigma(W_3^2)$-க்கு மேலுள்ள இரண்டு உறுப்புகளிலும் உள்ள கெழுக்களும் முறையே $\Sigma(W_2 W_3)$, $\Sigma(W_1 W_3)$ என்பவை. எனவே, தீர்வுகளைக் காண, மூலை விட்டத்தின் இடது புறமுள்ள உறுப்புகளை நீக்கி, மிச்சமானவற்றைமட்டுமே எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} a\Sigma(W_1^2) + b\Sigma(W_1 W_2) + c\Sigma(W_1 W_3) + d\Sigma(W_1 W_4) &- \Sigma(W_1 Y) \\ + b\Sigma(W_2^2) + c\Sigma(W_2 W_3) + d\Sigma(W_2 W_4) &- \Sigma(W_2 Y) \\ + c\Sigma(W_3^2) + d\Sigma(W_3 W_4) &- \Sigma(W_3 Y) \\ + d\Sigma(W_4^2) &- \Sigma(W_4 Y) \end{aligned}$$

கீழ்க்கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளில் 'டூலிட்டில்' முறையை விளக்குவோம்.

$$8.3564a + 2.790b + 2.932c + 47.967 = 0$$
$$2.790a + 6.6645b + 2.063c + 62.039 = 0$$
$$2.932a + 2.063b + 7.7893c + 47.519 = 0$$

முன்பு கூறப்பட்ட சுருக்கமான முறையில் இவைகளை அமைக்கலாம்.

$$\begin{aligned} 8.3564a + 2.790b + 2.932c &+ 47.967 \\ + 6.6645b + 2.063c &+ 62.039 \\ + 7.7893c &+ 47.519 \end{aligned}$$

இவைகளிலிருந்து, a, b, c-களுக்கான தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். கணக்குப் படிகளும், தணிக்கைகளும் அட்டவணை B-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விளக்கம் : மதிப்புத் தெரியாத அளவைகளின் கெழுக்களை அந்தந்தப் பெயருடைய பத்திகளில் காணலாம். ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலுள்ள தெரிந்த உறுப்பு (5)ஆம் பத்தியிலுள்ளது.

அட்டவணை B

‘டூலிட்டில்’ முறையில் நார்மல் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணுதல்

வரிசை	(1) ரெஸிப்ரோக்கல்	(2) a	(3) b	(4) c	(5)	(6) s
I		8·3564	2·790	2·932	47·967	62·0454
II			6·6645	2·063	62.039	73·5565
III				7·7893	47·519	60·3033
1		8·35640	2·790	2·932	47·967	62·0454
2	—0·11966876	—1·00000	—0·333876	—0·350869	— 5·7401 1	— 7·424896 தணிக்கை
3			6·6645	2·063	62 039	73·5565
4			—0·931514	—0 978924	—16·015030	—20·715470
5			5·732986	1·084076	46·023970	52·841030 தணிக்கை
6	—0·17442917		—1·000000	—0·189094	— 8·027923	— 9.217017 தணிக்கை
7				7·7893	47·519	60·3033
8				—1·028748	—16·830133	—21·769807
9				—0.204992	— 8·702857	— 9·991922
10				6.555560	21·986010	28·541571 தணிக்கை
11	— 0.15254227			—1·000000	— 3·353796	— 4·353796 தணிக்கை

பின் தீர்வு

c	b	a
—3·353796	—8·027923	—5·740151
—3·353796	+0·634183	+2·463592
	—7·393740	+1·176743
		—2·094816

$$a = -2.094816$$
$$b = -7.393740$$
$$c = -3.353796$$

தணிக்கை :

சமன்பாடு I :

$$8.3564a + 2.790b + 2.932c = -47.967$$

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பொருத்தினால் :

$$8.3564(-2.094816) + 2.790(-7.393740) + 2.932(-3.353796) = -47.966985$$

[இதன் குறி (sign) யானது, முழுக் கோவையையும் சுழிக்குச் சமமாக்கப்பட்டால், இந்த உறுப்பிற்கு எந்தக் குறி வருமோ அதுதான் என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.] s என்ற பத்தி தணிக்கைக்காக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது. வரிசை I, II, III-களிலுள்ள s-ன் மதிப்பு அந்தந்த வரிசைகளிலுள்ள தெரிந்த உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாகும். இதனைக் கணக்கிடும்பொழுது, மூலை விட்டத்திற்கு இடது பக்கம் விட்டுப்போன உறுப்புகளின் மதிப்புகளையும் சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

கீழே நார்மல் சமன்பாடுகளில் தீர்வு காணும் முறையின் சுருக்கம் உள்ளது :

1. வரிசை 1-ல், I-ம் நார்மல் சமன்பாட்டை எழுதவும்.

2. வரிசை 2-ல், (1)ஆம் பத்தியில், வரிசை (1), பத்தி (2)-ல் உள்ள தன் ரெஸிப்ரோக்கலை, அதனுடைய குறியை (sign) மாற்றி எழுதவும் (இது a-என்ற கெழுவின் ரெஸிப்ரோக்கலாகும்). வரிசை (1)-ல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும், இந்த ரெஸிப்ரோக்கலினால் பெருக்கி, வரும் பெருக்கற் பலன்களை அந்தந்தப் பத்திகளில் வரிசை (2)-ல் எழுதவும். [வரிசை (2)-ன், (2), (3), (4)ஆம் பத்திகளுள்ள எண்களின் இயற்கணக்கு மொத்தம் (algebraic sum) (6)ஆம் பத்தியிலுள்ளதுடன் சமமாகவிருக்கவேண்டும்.] இந்த முறை, a-என்பதனை b, c-களின் மதிப்புகளுள்ளடக்கி, நீக்கிவிடுகிறது. [வரிசை (2)-ல், (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள —1.000 என்பது தணிக்கை முறையை எளிதாக்கவே சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. அதுபோலத்தான் வரிசை (6)-லும், (II)-லும் உள்ள —1.000 என்பவைகள்.] இப்பொழுது (2) ஆம் வரிசைக்குக் கீழே ஒரு தடித்த கோட்டைக் கிழித்துவிடலாம்.

3. (II) ஆம் நார்மல் சமன்பாட்டை (3)ஆம் வரிசையில் எழுதவும்.

4. வரிசை (2)-ல் உள்ள b-ன் கெழுவால் (அதாவது −0.333876), வரிசை (1)-ல் உள்ள (3), (4), (5), (6)ஆம் பத்திகளின் எண்களைப் பெருக்கி, பெருக்கல் பலன்களை வரிசை (4)-ல் அந்தந்தப் பத்திகளில் எழுதுக.

5. வரிசை (3), (4)-களிலுள்ளவைகளை மொத்தமாக்கி வரிசை (5)-ல் எழுதவும். [வரிசை (5)-லுள்ள (3), (4), (5)ஆம் பத்திகளின்

இயற்கணக்கு மொத்தம், அதே வரிசையிலுள்ள (6)ஆம் பத்தியின் எண்ணிற்குச் சமமாயிருக்கவேண்டும்.]

6. (1)ஆம் பத்தி (6)ஆம் வரிசையில், வரிசை (5), பத்தி (3)-ல் உள்ள தன் ரெஸிப்ரோக்கலைக் குறிமாற்றி யெழுதவும். (5)ஆம் வரிசையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் இதனல் பெருக்கி வந்த பலன்களை அந்தந்தப் பத்திகளிலேயே (6)ஆம் வரிசையில் எழுதவும். [(6)ஆம் வரிசையிலுள்ள (3), (4), (5)ஆம் பத்திகளின் மொத்தம் (6)ஆம் பத்தியின் எண்ணுடன் சமம்.] இப்பொழுது b என்பதும் நீக்கப்பட்டுவிட்டது. அட்டவணையில் (6)ஆம் வரிசைக்குக் கீழே ஒரு தடிப்பான கோட்டை வரைந்துவிடலாம்.

7. IIIஆம் நார்மல் சமன்பாட்டை, வரிசை (7)-ல் எழுதவும்

8. வரிசை (2)-ல் உள்ள c-கெழுவினல் (அதாவது −0.350869), வரிசை (1)-ல் உள்ள (4), (5), (6)ஆம் பத்திகளின் எண்களைப் பெருக்கி, பலன்களை அந்தந்தப் பத்திகளிலேயே, வரிசை (8)-ல் எழுதவும்.

9. வரிசை (2)-லுள்ள c-ன் கெழுவினல் (−0.189094) வரிசை (5)-ன் (4), (5), (6)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகளைப் பெருக்கி, பெருக்கற் பலன்களை அந்தந்தப் பத்திகளில் வரிசை (9)-ல் எழுதவும்.

10. வரிசை (7), (8), (9)-ல் உள்ளவைகளைக் கூட்டி, வரிசை (10)-ல் எழுதவும். [(10)ஆம் வரிசையின் (4), (5)ஆம் பத்திகளிலுள்ள எண்களின் இயற்கணக்கு மொத்தம், அதேவரிசையில் (6)ஆம் பத்தியிலிருப்பதுடன் சமம்.]

11. வரிசை 11-ன் பத்தி (1)-ல், வரிசை (10)-ன் (4) ஆம் பத்தியிலுள்ள தன் ரெஸிப்ரோக்கலைக் குறிமாற்றி எழுதவும். (10)ஆம் வரிசையிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் இதனல் பெருக்கி, பெருக்கல் பலன்களை (11) ஆம் வரிசையில் அந்தந்தப் பத்திகளிலேயே எழுதவும். [(11)ஆம் வரிசையில் (4), (5) பத்திகளின் இயற்கணக்கு மொத்தம், அதே வரிசையின் (6)ஆம் பத்தி எண்ணுக்குச் சமம்.] இந்த வரிசையின் (5)ஆம் பத்தியில் c-ன் மதிப்பு உள்ளது. இப்பொழுது (11) ஆம் வரிசைக்கு அடியில் ஒரு தடித்த கோட்டை வரையலாம்.

மற்றும் d, e என்ற மதிப்புத் தெரியாதவைகள் இருப்பின், இந்தப் படியில் (stage or step) c என்பது d, e என்பவற்றின் சார் பலனக வரும்; எனவே, இதே முறையை இன்னமும் செயல்படுத்த வேண்டியிருக்கும். அடுத்து நான்காம் நார்மல் சமன்பாட்டை(12)ஆம் வரிசையில் எழுதவேண்டும். பிறகு (2), (6), (11)-ல் இருந்த d-ன் கெழுக்களினல் முறையான. வரிசை (1), (5), (10)-ல் உள்ள உறுப்புகளைப் பெருக்கி, பெருக்கல் பலன்களை வரிசைகள் (13), (14), (15)-ல் எழுதுவோம். (12), (13), (14), (15)ஆம் வரிசைகளிலுள்ளவைகளின்

மொத்தங்களை (16) ஆம் வரிசையில் எழுதுவோம்; அவைகளை (s)-பத்தியிலுள்ளவற்றைக் கொண்டு சரிபார்ப்போம். (d)-ன் குறி மாற்றப்பட்ட ரெஸிப்ரோக்கலினால் முழுவதும் பெருக்க, d-ன் மதிப்பு e-ன் சார்பலனாக வரும். e-ஐ அதே முறையில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அட்டவணையிலேயே, இந்த முறையில் வரும் தணிக்கைகளைக் குறிப்பிட்டுள்ளோம். ஒவ்வொரு படியிலும், சரிபார்ப்பதால், பிழைகள் நிகழ்தல் அரிதாகிறது.

பின்தீர்வுகள் எளிதாகக் கணக்கிடப்படுபவை. வரிசை (11)-லிருந்து

$$c = -3.353796$$

என்றும், வரிசை (6)-லிருந்து

$$b = -0.189094c - 8.027923$$

என்றும், (2)ஆம் வரிசையிலிருந்து

$$a = -0.333876b - 0.350869c - 5.740151$$

என்றும் வருகிறது.

[(6)ஆம் பத்தியிலுள்ள எண்கள் தணிக்கை செய்வதற்கென்றே எழுதப்பட்டவை. சரிபார்ப்பதை எளிதாக்குவதற்காக -1.000000 என்பது வரிசை (2), (6), (11)-ல் எழுதப்பட்டுள்ளது.

பின்தீர்வுகளுக்கான படிகளும் அட்டவணையின் கீழே உள்ளன.

முடிவாக, இந்த மதிப்புகளை ஏதாவதொரு நார்மல் சமன்பாட்டில் பொருத்தினால், மற்றுமொரு தணிக்கை கிடைக்கிறது. இதுவும், I-ம் சமன்பாட்டைக்கொண்டு கணக்கிடப்பட்டு அட்டவணையின் கீழே உள்ளது.

துணை நூல்கள்

Brown, J. A. C., Houthakker, H. S., and Prais, S.J., 'Electronic Computation in Economic Statistics,' Journal of American Statistical Association, Sept., 1953.

Hartree, D. R., 'Numerical Analysis', Oxford University Press, 1952.

Scarborough, J. B., 'Numerical Mathematical Analysis,' 2nd ed., Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1950.

Tolley, H. R. and Ezekiel, M. J. B., 'A Method of Handling Multiple Correlation Problems,' Journal of the American Statistical Association, Dec., 1923.

Whittaker, E. T. and Robinson, G., 'The Calculus of Observations,' London, Blackie and Son, 1924.

பின் இணைப்பு D

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியையும் தரவிலக்கத்தையும் கண்டுபிடித்தல்[1]

ஈருறுப்புப் பரவலை, நம் வசதிக்காக $(q+p)^n$ என்று வைத்துக் கொள்வோம் : இங்கு $q=$ தோல்விக்கான ஊக அளவை, $p=$ வெற்றிக்கான ஊக அளவை, எனவே $q+p=1$. கோவையை விரிவுபடுத்தினல் :

$$(q+p)^n = q^n + nq^{n-1}p^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-3}p^3 + \ldots\ldots + p^n$$

என்று வரும்.

இந்தத் தொடர்ச்சியிலுள்ள உறுப்புகள் முறையே—சுழி வெற்றி (no success), 1 வெற்றி, 2 வெற்றி, 3 வெற்றிகள்...... n-வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவைகளைக் குறிக்கின்றன. இந்தத் தகவல்களைக்கொண்டு, நமக்குப் பழக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவல் ஒன்றை அமைக்கலாம்.

அட்டவணை C-யின் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள உறுப்புகள்தாம் இந்தத் தொடர்ச்சியிலிருப்பவை. அவைகளின் மொத்தம் $=(q+p)^n = 1$. (3)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகளை மொத்தமாக்கினல் :

$$nq^{n-1}p^1 + n(n-1)q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3 + \frac{n(n-1)(\ -2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4 + \ldots + np^n$$

என்று வருகிறது. இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் n, p என்ற

[1] இங்குக் கொடுத்துள்ள நிறுவல் முறைகள், டி. ஸி. ஜோன்ஸ் (D. C. Jones) என்பவரின் நூலின்— '*A First Course in Statistics,*' லண்டன், பெல் அண்டு ஸன்ஸ், 1925—பக்கங்கள் 143-145-ல் உள்ள நிரூபணத்தை (proof) ஒட்டியவை.

அட்டவணை C

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியையும் தரவிலக்கத்தையும் கண்டுபிடித்தல்

(1) வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை m	(2) அலைவெண் f	(3) fm	(4) fm^2
0	q^n	0	0
1	$nq^{n-1}p^1$	$nq^{n-1}p^1$	$nq^{n-1}p^1$
2	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^{n-2}p^2$	$n(n-1)q^{n2}p^{-2}$	$2n(n-1)q^{n-2}p^2$
3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-3}p^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3$	$\frac{3n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3$
4	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}q^{n-4}p^4$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4$	$\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4$
…………	…………	…………	…………
n	p^n	np^n	n^2p^n
மொத்தம்	1	np	$np[1+p(n-1)]$

இரண்டும் இருப்பதால், இதனை :

$$np\left[q^{n-1} + (n-1)(q^{n-2}p^1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^3 + \ldots p^{n-1}\right]$$

என்று சுருக்கலாம்.

ஆனால் [ ] வளைவுகளுக்கிடையே உள்ள உறுப்புகள் $(q+p)^{n-1}$ என்ற ஈருறுப்புக்கோவையின் விரிவைக் (expansion) குறிப்பிடும். $(q+p)$ என்பது 1 ஆதலால், இதன் மதிப்பு 1. எனவே (3)ஆம் பத்தியின் மொத்தம் : $= np(q+p)^{n-1} = np$

எனவே, இந்தப் பரவலின் சராசரி,

$$M = \frac{\Sigma(fm)}{\Sigma(f)} = \frac{np}{1} = np$$

என்றாகும்.

(4)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகளை மொத்தமாக்கினால் :

$$nq^{n-1}p^1 + 2n(n-1)q^{n-2}p^2 + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3 + \frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4 + \ldots + n^2p^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}p^1 + \frac{3(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2 + \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^3 + \ldots + np^{n-1}\right]$$

என்று வரும்.

வளைவுகளிடையே [ ] உள்ள உறுப்புகளை இரு கூட்டாகப் பிரித்தால் :

$$np\left[\left\{q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^3 + \ldots + p^{n-1}\right\} + \left\{(n-1)q^{n-2}p^1 + \frac{2(n-1)(n-2)}{1.2}q^{n-3}p^2 + \frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^3 + \ldots + (n-1)p^{n-1}\right\}\right]$$

என்பது வருகிறது ; இதில் முதற் பகுதி { } -ன் மொத்தம் $(q+p)^{n-1}$ என்பது தெளிவு. எனவே, அவைகளுக்குப் பதிலாக

இந்தக் கோவையை வைக்கலாம். இரண்டாம் { } வளைவுகளிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளிலும் $n-1$, p, என்ற இரண்டும் உள்ளனவாதலால் :

$$np\left[(q+p)^{n-1} + (n-1)p\left\{q^{n-2} + (n-2)\,q^{n-3}p^{1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\,q^{n-4}p^{2} + \ldots + p^{n-2}\right\}\right]$$

என்றும், இங்குள்ள { } வளைவுகளிடையே உள்ள உறுப்புகள் $(q+p)^{n-2}$ என்பதன் விரிவுகளானதால்,

$$np[(q+p)^{n-1} + (n-1)\,p\,(q+p)^{n-2}]$$

என்பதும் (4)ஆம் பத்தியின் மொத்தமாகும்.

$(q+p)=1$ ஆனதால், $(q+p)^{n-1} = 1$, $(q+p)^{n-2} = 1$.

எனவே, (4)ஆம் பத்தியின் மொத்தம்

$$np[1 + p(n-1)]$$

என்றாகிறது.

தரவிலக்கத்திற்கான சூத்திரம் (வர்க்கமான வடிவத்தில்):

$$\sigma^{2} = \frac{\Sigma fm^{2}}{N} - c^{2}$$

இங்கு c என்பது, தற்செயலாக எடுக்கப்பட்ட மூலத்திற்கும், (origin) பரவலின் சராசரிக்குமுள்ள வித்தியாசம். இந்த எடுத்துக்காட்டில், மூலம் 0-ல்தான் (0-வெற்றியில்) உள்ளது ; எனவே, $c = np$, அல்லது சராசரி. N என்பது $\Sigma(f)$ அல்லது 1. எனவே, தரவிலக்கத்தின் வர்க்கம் :

$$\begin{aligned}\sigma^{2} &= np[1 + p\,(n-1)] - n^{2}p^{2}\\ &= np[np + (1-p)] - n^{2}p^{2}\\ &= n^{2}p^{2} + np\,(1-p) - n^{2}p^{2}\\ &= np\,(1-p)\\ &= npq\end{aligned}$$

முடிவாக, ஈருறுப்புப் பரவலின் தரவிலக்கம் :

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

என்றாகிறது.

பின் இணைப்பு E

கூட்டுச் சராசரியின் தரவிலக்கத்தைக் கண்டுபிடித்தல்

நாம் ஒரு குறித்த மாறியின் ராண்டமான, எனவே, தனித்தவையான (independent), n-கண்டறிந்த விவரங்களைப் பெற்றுள்ளோம். அவைகளை முறையே $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ என்று குறிக்கலாம். இவைகளின் மொத்தத்தை W என்ருல்,

$$W = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \qquad (1)$$

என்ருகிறது. இப்பொழுது, மாதிரிகள் பலவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கிரேம்; X_1 என்ற மதிப்புகள் N எண்ணிக்கை, X_2 மதிப்புகள் N எண்ணிக்கை, இப்படியாகவே X_n மதிப்புகள் N எண்ணிக்கை வரும் வரை. எனவே, நம்மிடம் இப்பொழுது n-எண்ணிக்கை உறுப்புகளைக் கொண்ட N-மாதிரிகள் உள்ளன ; எனவே X என்பதின் N மதிப்புகளும் உள்ளன. சராசரிகளை,—என்ற குறியை, எழுத்துகளின் மேல் பொருத்திக் குறித்தால்.

$$\overline{W} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \ldots + \bar{X}_n \qquad (2)$$

என்று வருகிறது. இந்தச் சராசரிகளிலிருந்து, கண்டறிந்த விவரங்களுக்குள்ள வித்தியாசங்களை...w, x_1, x_2,...x_n என்று குறிப்பிட்டால், குறித்த ஒரு மாதிரிக்கு அல்லது ஒரு தொடர்ச்சியான (series) விவரங்களுக்கு,

$$w = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \qquad (3)$$

என்ற சமன்பாடு வரும். இதன் இரு பக்கங்களையும் வர்க்கமாக்கினுல்,

$$\begin{aligned} w^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots \\ + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + \ldots + 2x_2x_n + \ldots \\ + 2x_3x_n + \ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

என்று வரும்.

அதாவது (3)ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் வர்க்க மாக (4)-ல் அமையும், மற்றும் $2x_1x_2$ என்பது போன்ற பெருக்கல் பலன்களிலும் இடம்பெறும். ஒவ்வொரு மாறியும், மற்ற எல்லா மாறிகளுடனேயும் பெருக்கப்பட வேண்டும்.

அடுத்து, நாம், N-மாதிரிகளுக்கு (4)-ஐப்போல் வரும் N-சமன் பாடுகளைக் கூட்டவேண்டும்; பிறகு Nஆல், எல்லாவற்றையும் வகுக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு பெருக்கல் உறுப்பும், அப்படி மொத்த மாக்கி Nஆல் வகுபட்டால்,

$$\frac{2\Sigma x_1x_2}{N}$$

என்பது போன்றிருக்கும். இது—2 என்ற காரணி நீங்கலாக—நாம் அறிந்த $\frac{\Sigma xy}{N}$ என்ற கோவைபோல் உள்ளது; இந்தக் கோவையை, நாம் தொடர்புப் பிரச்சினைகளில் கண்டிருக்கிறோம்; x, y என்ற இரு மாறிகளும் தொடர்பற்று இருந்தால், இந்தப் பெருக்கற்பலனின் மதிப்பு சுழி என்றும் அறிவோம். இங்கு, நம் கருத்தின்படி x_1, x_2, x_3, ... x_n என்ற மதிப்புகளைத் தந்த விவரங்கள் எல்லாம் தனித்தவை களே (independent) ஆதலால், அவைகளிடையே தொடர்பில்லை. எனவே, ஒவ்வொரு பெருக்கல் உறுப்பும், மொத்தமாக்கப்பட்டு, Nஆல் வகுபட்டால் சுழியே வரும். எனவே,

$$\frac{\Sigma w^2}{N}=\frac{\Sigma x_1^2}{N}+\frac{\Sigma x_2^2}{N}+\frac{\Sigma x_3^2}{N}+\ldots+\frac{\Sigma x_n^2}{N} \tag{5}$$

அல்லது

$$\sigma_w^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\ldots+\sigma_n^2 \tag{6}$$

விவரங்கள் எல்லாம் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தவையானால் (அதாவது, எல்லா மாதிரிகளையும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்தால்), மேற்கண்ட (6)ஆம் சமன் பாட்டின் வலப்பக்கமுள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் சமமானவைகளாகும். நம் முதல் கருத்தின்படி இது சரிதான். சமமான அளவும் σ^2 என்ற முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்க வர்க்கமாகும். எனவே,

$$\sigma_w^2 = n\sigma^2 \tag{7}$$

அடுத்து, இதே முறையைப் பின்பற்றி நமக்கு வேண்டிய சூத் திரத்தைப் பெறுவோம். மேற்கூறப்பட்ட முறை நமக்கு விளக் கத்தைத் தரவே அமைக்கப்பட்டது.

(3)ஆம் சமன்பாட்டையே சற்று வேறு வழியில் எழுதினால் (n ஆல் வகுத்து)

$$\frac{w}{n}=\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\frac{x_3}{n}+\ldots+\frac{x_n}{n} \tag{8}$$

x_1, x_2, x_3...களுக்குப் பதிலாக, $\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}$ . . . போன்றவைகளைக் கொண்டு (4), (5), (6) சமன்பாடுகளைப்போல் அமைக்கலாம். முன் போலவே, பெருக்கல் உறுப்புகள் சுழியாகிவிடும். வர்க்கமாக்கும் பொழுது $\frac{w}{n}$ என்பதனை மொத்தமாக ஓர் உறுப்பாகக் கொள்வோம்; எனவே, வர்க்கமாக்கிக் கூட்டியபின் $\Sigma\left(\frac{w}{n}\right)^2$ வரும். வலப்பக்கத்தி லுள்ள பகுதி, விகுதிகளைத் தனியே வர்க்கமாக்கிக் கூட்டினால், $\frac{\Sigma x^2}{n^2}$ என்பது போன்ற உறுப்புகள் வரும். N என்பதால், எல்லா உறுப்புகளையும் வகுத்தால் கீழ்க்கண்ட (9)ஆம் சமன்பாடு—(6)-ஐப் போன்றது—வரும்.

$$\sigma^2_{\frac{w}{n}} = \frac{\sigma_1^2}{n^2} + \frac{\sigma_2^2}{n^2} + \frac{\sigma_3^2}{n^2} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{n^2} \quad (9)$$

எல்லா விவரங்களும், ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்தவை யாதலால்,

$$\sigma^2_{\frac{w}{n}} = \frac{n\sigma^2}{n^2} \quad (10)$$

அதாவது,

$$\sigma_{\frac{w}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

ஆனால், w என்பது σ-என்ற தரவிலக்கமுடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்த n-விவரங்களின் கூட்டுத்தொகையன்றோ. ஆகவே, $\frac{w}{n}$ என்பது இந்த விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி. எனவே, $\sigma_{\frac{w}{n}}$ என்பது கூட்டுச் சராசரிகளின் பரவலின் தரவிலக்கமாகிறது. இதற்கான, நாம் அறிந்த அடையாளம் σ_M என்பது. இதுதான், முழுமைத் தொகுதியின் தரவிலக்கமான, σ என்பது தெரிந்திருக்கும் பொழுது பயன்படுத்தவேண்டிய, கூட்டுச் சராசரியின் தரவிலக்கத் திற்கான சூத்திரம்.

பின் இணைப்பு F

சிறிது மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல், காம்பர்ட்ஸ், லாஜிஸ்டிக் வளைகோடுகளினுல் போக்கை அளவிடும் முறைகளின் விளக்கம்

(Illustrating the Measurement of Trend by a Modified Exponential Curve, a Gompertz Curve and a Logistic Curve).

10ஆம் அதிகாரத்தில் கால வரிசைகளிலுள்ள பன்னெடுங் காலப் போக்கை (secular trend) ஆராயும்பொழுது, சாதாரணமாக நடைமுறையில் பயன்படும் சார்பலன்களைப்பற்றிமட்டுமே விளக்கினேம். இங்கு, வியாபாரம் மற்றும் பொருளாதாரத் துறைகளில் நிகழும் கால வரிசைகளின் நெடுங்காலப் போக்குகளை அளவிடுவதற்கான வேறு மூன்று வகைச் சார்பலன்களைப்பற்றிச் சுருக்கமாக விளக்குவோம்.

சிறிது மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோடு (Modified Exponential Curve)

ஒரே வீதத்தில் ஏறு வரிசையிலோ, அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ அமைந்துள்ள ஒரு காலத்தொடருக்கு, எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோடு பொருத்தமான போக்கு அளவையாகும்; இது விகிதத் தாளில் (ratio-paper) நேர்கோடாக அமையும். இத்தகைய போக்கைக் கொண்ட வரிசையின் போக்கு மதிப்புகள் (trend values), ஒரு பெருக்குத் தொடர்ச்சியின் (geometric progression) பல உறுப்புகளாகும். சில பொருளாதாரத் துறைக் காலவரிசைகளில் இதுபோன்ற மாருத வீத வளர்ச்சியில்லாதிருக்கலாம்; அவைகளின் போக்கை அளவிடுவதற்காக, எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டைச் சிறிது மாற்றி அமைக்கலாம். கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு எல்லாம் ஒரே தொகையைக் கூட்டினுல் (அல்லது குறைத்தால்) நிகழும் விவரங்கள் பெருக்குத் தொடர்ச்சியின் உறுப்புகள் போன்று தோராயமாகவேனும் அமைந்திருந்தால் இந்த முறை பயனளிக்கும்.

கூட்டவேண்டிய தொகையை K என்று குறிப்போம்; இப்பொழுது போக்குக் கோட்டைக் கண்டுபிடிக்கக் கீழ்க்கண்டவைகளைச் செய்யவேண்டும் :

K ஐக் கணக்கிடு.

கண்டறிந்த மதிப்புகளை Kஐக் கொண்டு திருத்தி மற்றொரு கால வரிசையை உண்டாக்குக.

மாற்றிய வரிசைக்கு எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டை இணைத்து, அந்த மாற்றிய வரிசைக்கான போக்கு மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

மாற்றிய வரிசையின் போக்கு மதிப்புகளை Kஐக் கொண்டு திருத்தி, தொடக்கத்திலிருந்த வரிசையின் போக்கு மதிப்புகளைப் பெறுக.

x என்பது காலத்தையும், y என்பது கால வரிசையின் தொடக்க விவரங்களையும் குறித்தால், போக்கை எடுத்துக்காட்டும் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$y = ab^x - K$$

இங்கு K என்பது முன்பே கூறப்பட்ட திருத்த எண்; a, b என்ற மாறிலிகளை மாற்றப்பட்ட கால வரிசைக்கு எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டை இணைத்துக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். செய்முறையை அட்டவணை D-ல் உள்ள அறை ஏர்கண்டிஷனர்களின் (room-air conditioners) ஏற்றுமதிகளைக் காட்டும் விவரங்களைக் கொண்டு விளக்குவோம். முறையை எளிதாகக் காட்டுவதற்கென்றே வரிசையைச் சிறிது காலத்திற்குமட்டும் எடுத்துள்ளோம். கொடுக்கப்பட்ட காலத்தை மூன்று சம அளவுகளாகப் பிரிக்கிறோம்; ஒவ்வொரு பிரிவு அல்லது பகுதியின் சராசரியையும் கண்டுபிடிக்கிறோம். வரிசையாக, அவைகளை M_1, M_2, M_3 என்று குறிப்பிட்டு, அவைகளைக் கொண்டு K-ன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினால் கணக்கிடுவோம்.

$$K = [M_2^2 - (M_1 \times M_3)] \div [(M_1 + M_3) - 2M_2]$$

தொடக்க நிலையிலேயே வரிசை, பெருக்குத் தொடர்ச்சியாக அமைந்திருப்பின் K-ன் மதிப்பு சுழியாகும்; வரிசையிலுள்ள எண்ணிக்கைகளுக்கு ஒரே மதிப்பு கொண்ட அளவையைக் கூட்டுவதால் அவைகள் பெருக்குத் தொடர்ச்சியின் உறுப்புகளாக அமையுமாயின் K என்பது + ஆகவிருக்கும்; ஒரே மதிப்பு அளவையைக் கழிப்பதால், அவைகள் பெருக்குத் தொடர்ச்சியாக அமைந்தால், K-என்பது — ஆகும். (நடைமுறையில் K என்பது மேற்கண்ட சமன்பாட்டினால் கணக்கிடப்பட்டு, + ஆனால் கூட்டப்பெறும்; —ஆனால் கழிக்கப் பெறும்.)

இந்த எடுத்துக்காட்டில்

$$K=[(176)^2-(49\times 885)]\div[(49+885)-(2\times 176)]=-21\cdot 3$$

என்று வருகிறது.

அட்டவணை D

தயாரிப்பாளர்களால் கப்பல்களில் ஏற்றப்பட்ட அறை-ஏர்கண்டிஷனர்களின் எண்ணிக்கைகளுக்கு* மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோடு இணைத்தலைப்பற்றிய விளக்கம், 1946-54.

(கப்பலில் ஏற்றப்பட்ட எண்ணிக்கை, ஆயிரக்கணக்கில்)

(1)	(2) தொடக்க காலவரிசை	(3) பகுதிச் சராசரி	(4) மாற்றப் பட்ட வரிசை (2)+K	(5) போக்கு மதிப்புகள் மாற்றப்பட்ட வரிசை	(6) போக்கு மதிப்புகள் தொடக்க வரிசை (5)—K
1946	30		8·7	11·7	33·0
1947	43	$M_1=$ 49	21·7	21·4	42·7
1948	74		52·7	39·2	60·5
1949	89		67·7	71·7	93·0
1950	201	$M_2=$176	179·7	131·4	152·7
1951	238		216·7	240·5	261·8
1952	380		358·7	440·4	461·7
1953	1,045	$M_3=$885	1,023·7	806·5	827·8
1954	1,230		1,208·7	1,476·9	1,498·2

* மூலம்: எலெக்ட்ரிகல் மர்ச்சண்டைஸிங் (Electrical Merchandising).

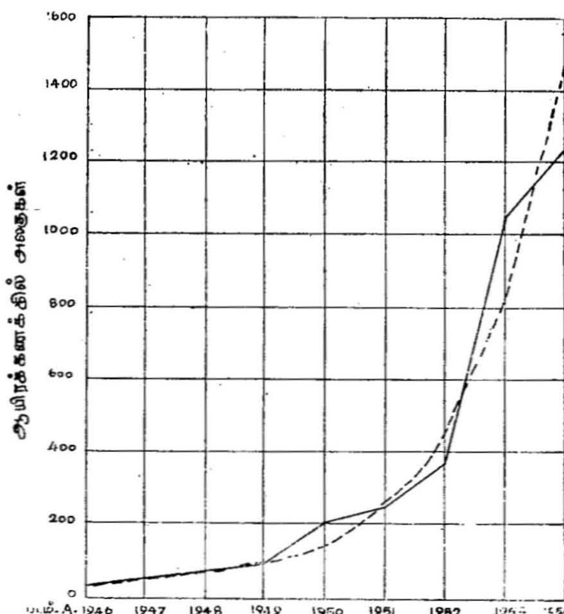
அட்டவணை D-ன் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள எண்களுடன் இதைச் சேர்த்தால் (4)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகள் வரும். இந்த மாற்றப்பட்ட தொடர்ச்சிக்கு எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டை இணைப்பதற்கு லாகிருதம்களைப் பயன்படுத்துதல் நல்லது. இது 10ஆம் அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது. சமன்பாட்டை $\log y=\log a+(\log b)x$ என்று எழுதினுல் ($\log a$)-ன் மதிப்பு 2.11845 ஆகவும், ($\log b$)-ன் மதிப்பு 0.26272 ஆகவும் வரும்[மூலம்(origin) 1950]. இதனின்று கிடைக்கும் போக்கு மதிப்புகளின் ஆன்டிலாகிருதங்கள் (antilogarithms) பத்தி (5)-ல் உள்ளன. இவைகளிலிருந்து Kஐக் (இயற்கணித வழியில்) கழித்தால் தொடக்க விவரங்களின் போக்கு மதிப்புகளைப் பெறுவோம்; அவை (6)ஆம் பத்தியில் இடம்பெற்றுள்ளன. [இங்கு இந்தப் பத்தியிலுள்ள எண்கள் எல்லாம் ஒரு தசம ஸ்தானத்தோராயமாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இது செய்ம்முறையைத் தெளிவாக்கும்; ஆனல்,

நடைமுறையில், இந்த எண்ணிக்கைகளை, (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள எண்ணிக்கைகளைப்போல், முழு எண் அளவிலேயே காண்பிக்க வேண்டும்.]

இங்கு இணைக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 131.4(1{\cdot}8311^{x}) - (-21.3)$$

என்பது ; இதற்கான மூலம் 1950ஆம் ஆண்டு கப்பலில் ஏற்றப்பட்ட ஏர்கண்டிஷனர்களின் எண்ணிக்கைகளையும், மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டையும் படம் A-ல் காணலாம். இணைப்பு



தயாரிப்பாளர்களால் கப்பல்களில் ஏற்றப்பட்ட அறை-ஏர்கண்டிஷனர்களின் எண்ணிக்கையும், மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோடும் (அமெரிக்கா 1946-54).

கெடுதலானதாக இல்லை; என்றாலும் காலவரிசை சிறிதாக உள்ளதால் இந்தச் சார்பலனை நெடுங்காலப் போக்கைக் குறிப்பதாக ஏற்றுக்கொள்வது நல்லதன்று என்பதனை அறியவேண்டும்.

*K*ஐ கணக்கிடும் இந்த முறையில் பிரிவுகள் சமமான அளவைகளைக் கொண்டவைகளாக இருக்கவேண்டும்; மற்றும் கால அளவில், மூன்று பிரிவுகளின் நடுப் புள்ளிகள் (midpoints) ஒன்றுக்கொன்று சம தூரத்தில் இருக்கவேண்டும். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், 9 ஆண்டுகளுக்கான கால வரிசை இருந்ததால், அதை மூன்று பிரிவு

களாக்குவது எளிதாயிற்று. அப்படிக் கால வரிசையிலுள்ள ஆண்டுகள் 3-ல் வகுபடா எண்களாக இருந்தால், சற்றே ஒன்றின்மேல் ஒன்று இருப்பதான (overlapping) கால அளவைகளை அமைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 1942-லிருந்து 1954 வரை செல்லும் கால வரிசையில், சராசரிகளைக் கணக்கிடக் கீழ்க்கண்ட மூன்று ஐந்தாண்டுப் பிரிவுகளைப் பயன்படுத்தலாம். 1942-1946, 1946-1950, 1950-1954. இவைகளின் மையம் முறையே 1944, 1948, 1952ஆம் ஆண்டுகளுக்கொப்பானதாகும்; எனவே, இவைகளும் சமதூரத்திலுள்ளவைகளே. ஆண்டு வரிசையில்லாமல், விவரங்கள் மாத வரிசையிலிருந்தால், 12 மாதங்களாகக் கருதாமல், 4 அல்லது 8 மாதப் பிரிவுகளாக்குவதால் எந்தக் கால அளவையும், மூன்று சம பாகங்களாக்கலாம்.

காம்பர்ட்ஸ் வளைகோடு

காம்பர்ட்ஸ் வளைகோடு இன்ஷுரென்ஸ் சம்பந்தப்பட்ட கணக்கியலில் (actuarial science) மிக்க பயன்படுகிறது; இதற்குப் பொருளாதாரம் மற்றும் சமூகவியல் துறைகளில் போக்குகளை அளவிடுவதற்கான வாய்ப்புகளும் உள்ளன. இது குவிவாக விரிவடைந்து (cumulative expansion) பெருமமான (maximum) மதிப்பை எய்தும் ஒரு நிகழ்ச்சியைக் காட்டுவதால், இதனையும் 'வளர்ச்சி'யைக் (growth) குறிக்கும் ஒரு வளைகோடாகக் கருதலாம். ஆரம்ப நிலைகளில் அதிகமான வளர்ச்சியும், போகப்போகக் குறைந்து வரும் வளர்ச்சியும்கொண்ட, ஆனால், கடைசிவரை குறைந்துவிடாமல் அதிகமாகிக்கொண்டே போகிற விரிவுத் தன்மையை இந்த வளைகோடு குறிப்பிடும். எல்லாத் தொழில் முன்னேற்றங்களும் (industrial development) இதே வகையான வளர்ச்சியையுடையவை என்று கருத முடியாது. ஆனால், இந்த வளைகோடு பல போக்கு இயக்கங்களை அனுபவ வழியில் (empirical) எடுத்துக்காட்டுவதால், இது பயனுடையதாகிறது.

இதன் பொதுவான அமைப்பு

$$y=ab^{cx}$$

என்பது; இணைப்பதற்காக லாகிருதம்களை எடுத்தோமானால்,

$$\log y=\log a+(\log b)c^{x}$$

என்று வரும். இதனை ஒரு தொழில் வளர்ச்சிக்கோ அல்லது ஒரு பொருளாதார உறுப்பின் (economic element) வளர்ச்சிக்கோ இணைக்கலாம்; அப்படி இணைக்கும்பொழுது $\log a$ என்பது பெரும மதிப்பின் லாகிருதத்தைக் குறிக்கும்—அதாவது, வளைகோடு எந்த உச்ச வரம்பை (ceiling) அடைகிறதோ அதனைக் குறிப்பிடும். குறித்த ஏதாவதொரு காலத்தில் போக்கு மதிப்பானது, இந்தப் பெரும

மதிப்பைவிட எவ்வளவு குறைகிறது என்பதனை இரண்டாம் உறுப்பு காட்டுகிறது. இந்த மதிப்பு காலம் செல்லச் செல்லக் குறைந்து கொண்டே வரும் என்பது தெளிவு. (இந்த வளைகோட்டுச் சார்பலனிலுள்ள c-யின் மதிப்பு சுழிக்கும் ஒன்றுக்கும் இடையே நிற்கும். இந்த வளைகோடு ஒரு காலவரிசைப் போக்கிற்குப் பொருத்தமானதாகவிருந்தால், அந்தக் காலவரிசையானது அதனுடைய பிற்பகுதிகளில் குறைந்துகொண்டே போகும் வளர்ச்சியையுடையதாகும்.) x அல்லது கால அளவுகோலின் மூலம் (origin), கண்டறிந்த விவரங்களில் முதலாவதான ஆண்டில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும்.

இதனை இணைக்க, குறைந்த வர்க்க முறையைக் கையாள முடியாது; எனவே, இணைப்பதற்கான முறையும் தோராயமானதே. இங்கும், முன் எடுத்துக்காட்டில் செய்ததுபோலவே வரிசையை மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிவுபடுத்துவோம். இந்த மூன்று பிரிவுகளிலுள்ள விவரங்களின் லாகிருதங்களின் மொத்தங்களைக் கண்டுபிடிப்போம்; அவைகளிடையே உள்ள வித்தியாசங்களையும் கண்டுபிடிப்போம். இந்த அளவைகளைக் கொண்டு, தேவையான மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம். 1922—1954-ல் உள்நாட்டுக்காகக் கப்பல் ஏற்றப்பட்ட ரேயான் மெல்லிய இழைகளின் (filament yarns) அளவைபற்றிய விவரங்களுள்ள அட்டவணை E-ல், இந்த முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை n என்று குறிப்பிடுவோம் (இங்கு $n=11$); துணை மொத்தங்களைக் காலவரிசையில் S_1, S_2, S_3 என்போம்; இந்த மொத்தங்களிடையே உள்ள முதல் வித்தியாசங்களை[1] d_1, d_2 என்று குறிப்பிடுவோம். c, $\log b$, $\log a$ என்ற மூன்று மாறிலிகளைக் கண்டுபிடிக்க இந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$c^n = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\log b = \frac{d_1\,(c-1)}{(c^n-1)^2}$$

$$\log a = \frac{1}{n}\left(S_1 - \frac{d_1}{c^n-1}\right)$$

[1] கொடுக்கப்பட்ட கால வரிசையின் பிற்காலத்தில், வரிசையிலுள்ள உறுப்புகள் குறையும் கூடுதல்களின் (increments) லாகிருதம்களைக்கொண்டு விரிவடைவதாக அமையவேண்டும் என்பது முன்பே எடுத்துக் கூறப்பட்ட விதி. d_1 என்பதைவிட d_2 குறைவாக இருப்பது இந்த விதிக்கு உட்பட்டதைக் காட்டும்.

அட்டவணை E

1922-54-ல், ரேயான் மெல்லிய இழை தயாரிப்பாளர்களால் உள்நாட்டிற்காகக் கப்பலேற்றப்பட்ட நூல் அளவைகளுக்கு, காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டை இணைப்பதற்கு வேண்டிய அளவைகளைக் கணக்கிடுதல்.

(ஆண்டு மொத்தங்கள், மில்லியன் பவுண்டுகள் அளவில்)

(1) ஆண்டு	(2) கப்பலேற்றப்பட்ட ரேயான் நூல் அளவு y	(3) Log y	(4) துணை மொத்தங்கள்	(5) முதல் வித்தியாசங்கள்
1922	22·6	1·35411		
1923	29·5	1·46982		
1924	40·3	1·60531		
1925	52·8	1·72263		
1926	51·3	1·71012		
1927	85·0	1·92942	$S_1 = 20·22250$	
1928	88·0	1·94448		
1929	116·4	2·06595		
1930	111·6	2·04766		
1931	155·5	2·19173		
1932	151·8	2·18127		
				$d_1 = S_2 - S_1$ $= 7·29523$
1933	210·9	2·32408		
1934	194·7	2·28937		
1935	252·7	2·40261		
1936	297·3	2·47319		
1937	266·2	2·42521		
1938	273·8	2·43743	$S_2 = 27·51773$	
1939	359·6	2·55582		
1940	388·7	2·58961		
1941	452·4	2·65552		
1942	468·8	2·67099		
1943	494·2	2·69390		
				$d_2 = S_3 - S_2$ $= 4·12837$
1944	539·1	2·73167		
1945	602·4	2·77988		
1946	666·4	2·82373		
1947	729·0	2·86273		
1948	836·5	2·92247		
1949	782·4	2·89343	$S_3 = 31·64610$	
1950	949·1	2·97731		
1951	860·3	2·93465		
1952	844·8	2·92675		
1953	864·7	2·93687		
1954	718·8	2·85661		

தகுந்த மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்,

$$c^n = c^{11} = \frac{4.12837}{7.29523} = 0.565900$$

$$c = \sqrt[11]{0.565900} = 0.94956$$

$$\log b = \frac{7.29523\,(-0.05044)}{(-0.4341)^2} = -1.95270$$

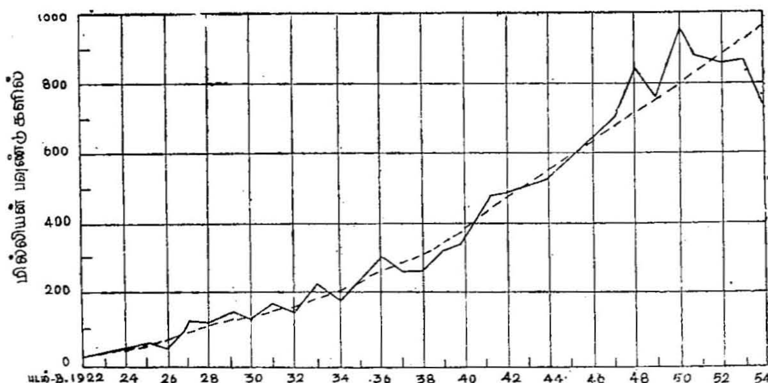
$$\log a = \frac{1}{11}\left(20.22250 - \frac{7.29523}{-0.43410}\right) = 3.36617$$

எனவே, நமக்குத் தேவைப்பட்ட சமன்பாடு

$$\log y = 3.36617 - 1.95270\,(0.94956^x)$$

என்பதாகும்; இங்கு வரிசையின் முதல் ஆண்டு மூலமாகக் கருதப் பட்டால், x என்பது அதனின்று மற்ற ஆண்டுகளின் விலக்கங்களைக் குறிப்பிடும்.

அட்டவணை F-ன் (2)ஆம் பத்தியிலுள்ள x மதிப்புகளை இந்தச் சமன்பாட்டில் பொருத்தினால், போக்கு மதிப்புகளின் லாகிருதங்கள் கிடைக்கும். அவைகளுக்கு முறையான சாதாரண எண்கள் போக்கின் தன்மையைக் காட்டும். கணக்குமுறைகள், அட்டவணை F-ல் உள்ளன. தொடக்கநிலை விவரங்களும், அவைகளுக்கு இணைக்கப் பட்ட காம்பர்ட்ஸ் வளைகோடும் B என்ற வரைபடத்திலுள்ளன.



அமெரிக்க நாட்டில் 1922-54 ஆண்டுகளில் உள்நாட்டுக்காகக் கப்பல் ஏற்றப்பட்ட மெல்லிய ரேயான் இழை அளவுகள்; காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டுப் போக்கும் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இந்த வளைகோட்டிற்கான உச்சவரம்பு a என்ற மாறிலியால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது—இந்த எடுத்துக்காட்டில் அதன் மதிப்பு **2,324**. அதாவது, **1922–54** ஆண்டுகளில் இருந்த, காம்பர்ட்ஸ்

அட்டவணை F

1922–54-ல் கப்பலேற்றப்பட்ட மெல்லிய ரேயான் இழை நூல் விவரங்களுக்கு, காம்பர்ட்ஸ் வளைகோடு இணைக்கப்பட்ட பிறகு, போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல்.

(1) ஆண்டு	(2) x	(3) c^x	(4) $(\log b)c^x$	(5) $\log y$ (4)+$\log a$	(6) y (5)-ன் ஆன்டி லாகிருதம் (மில்லியன் பவுண்டுகளில்)
1922	0	1.00000	—1.95270	1.41347	25.9
1923	1	0.94956	—1.85421	1.51196	32.5
1924	2	0.901664	—1.76067	1.60550	40.3
1925	3	0.856184	—1.67187	1.69430	49.5
1926	4	0.812998	—1.58754	1.77863	60.1
1927	5	0.771991	—1·50747	1.85870	72.2
1928	6	0.733051	—1.43143	1.93474	86.0
1929	7	0.696076	—1.35923	2.00694	101.6
1930	8	0.660966	—1.29067	2.07550	119.0
1931	9	0.627627	—1.22557	2.14060	138.2
1932	10	0.595970	—1.16375	2.20242	159.4
1933	11	0.565909	—1.10505	2.26112	182.4
1934	12	0.537364	—1.04931	2.31686	207.4
1935	13	0.510260	—0.99638	2.36979	234.3
1936	14	0.484522	—0.94613	2.42004	263.0
1937	15	0.460083	—0.89840	2.46777	293.6
1938	16	0.436876	—0.85309	2.51308	325.9
1939	17	0.414840	—0.81006	2.55611	359.8
1940	18	0.393916	—0.76920	2.59697	395.3
1941	19	0.374047	—0.73040	2.63577	432.3
1942	20	0.355180	—0.69356	2.67261	470.6
1943	21	0.337265	—0.65858	2.70759	510.0
1944	22	0.320253	—0.62536	2.74081	550.6
1945	23	0.304099	—0.59381	2.77236	592,0
1946	24	0.288761	—0.56386	2.80231	634.3
1947	25	0.274195	—0.53542	2.83075	677.2
1948	26	0.260365	—0.50841	2.85776	720.7
1949	27	0.247232	—0.48277	2.88340	764.5
1950	28	0.234762	—0.45842	2.90775	808.6
1951	29	0.222920	—0.43530	2.93087	852.8
1952	30	0.211676	—0.41334	2.95283	897.1
1953	31	0.200999	—0.39249	2.97368	941.2
1954	32	0.190861	—0.37269	2.99348	985.1

வளைகோட்டால் குறிப்பிடப்பட்ட போக்கு இதற்குப் பிறகும் சரியானதாக அமையுமாயின், நாட்டில் ரேயான் நூல் கப்பலேற்றங்களின் பெருமமான (maximum) மதிப்பு 2,324 மில்லியன் பவுண்டுகள்தான் என்பதனை இந்த a-ன் மதிப்பு காட்டுகிறது. இதுபோன்ற வெளியே-வைத்தல் (extrapolation) ஐயப்பாடுகள் நிறைந்த எடுகோள்களைக் கொண்டது என்பதையும், இதற்கு ஒரு தனி மகத்துவத்தை அளிக்கவேண்டியதில்லை என்பதையும் தனியே சுட்டிக்காட்ட வேண்டியதில்லை. குறிப்பாக, வருங்காலத்தில், தொழில் முறைகள் வேறுபட்டாலும், அத் தொழிலின் விளைவுகளுக்கான தேவை (demand) மாறினாலும், தொடுகோடான (asymptote) a-ன் மதிப்பு மாறும் என்பது தெளிவு. வேறொரு வளர்ச்சி வளைகோட்டை (growth curve) இணைத்தால், தொடுகோடும் மாறுதலடையும் என்பதனை அடுத்துப் பார்க்கப்போகிறோம்.

லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு

லாஜிஸ்டிக் வளைகோடும், மேலே விளக்கப்பட்ட காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டைப் போன்றதுதான். இதனை மக்கள்தொகை ஆராய்ச்சிகள் பலவற்றில், ரேமாண்டு பர்ல் (Raymond Pearl) என்பவரும், எல். ஜெ. ரீட் (L. J. Reed) என்பவரும் அதிகமாகப் பயன்படுத்தியுள்ளதால், இதனை பர்ல்-ரீட் வளைகோடு என்றும் குறிப்பிடுவர். சிறிது மாற்றப்பட்ட பெருக்கல் தொடர்ச்சியை, அல்லது ஒரு குறித்த எல்லையை எட்டுவதற்குள் குறையும் வளர்ச்சியைப் பெற்ற ஒரு தொடர்ச்சியை, இந்த வளைகோடு குறிப்பிடும். இதனையும், காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டைப் போலவே, பல பொருளாதார கால வரிசைகளின் பன்னெடுங்காலப் போக்கினை அனுபவ வழி தோராயமாக விளக்கப் பயன்படுத்தலாம். மற்ற அனுபவ வழி தோராயப் போக்குகள் எந்தெந்த வரம்புகளுக்குட்பட்டவையோ அதே வரம்புகளுக்கு இதுவும் உட்பட்டதுதான்.

இந்த வளைகோட்டு அமைப்பைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு குறிக்கும் :

$$\frac{1}{y} = a + bc^x$$

சார்புடைய மாறி, y அல்லாது $\frac{1}{y}$ ஆக இருக்குமாறு அமைந்த இதுவும் மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டைப் போன்றது. [இங்குள்ள மாறிலிகளுக்கான அடையாளங்கள் (symbols), மாற்றப்பட்ட எக்ஸ்போனென்ஷியல் வளைகோட்டு மாறிலிகளுக்கானவைகளிலிருந்து மாறுனவை.] முன் கூறப்பட்ட செய்ம்முறைகளைப்போலவே, இந்த வளைகோட்டையும், குறித்த

ஒரு காலவரிசைக்கு இணைக்கலாம் ; ஆனால், y-க்கு பதிலாக, அதன் ரெஸிப்ரோக்கலான $\frac{1}{y}$ ஐப் பயன்படுத்தவேண்டும். உள் நாட்டுக்கான, ரேயான் நூல் கப்பலேற்றங்கள்கொண்ட கால வரிசைக்கே, இந்த வளைகோட்டை இணைப்போம் ; முதற்படி கணக்குகள் அட்டவணை G-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளன. y-ன் ரெஸிப்ரோக்கல்களை 10-ன் தகுந்த அடுக்கால் (suitable power) பெருக்குவதால்.—அந்த அட்டவணையில் (3)ஆம் பத்தியைப் பார்க்க—கணக்கிடுவது எளிதாகும்.

முன் உதாரணங்களில் செய்ததுபோலவே, காலவாரியாகக் கண்டறிந்த விவரங்களை மூன்று சமபிரிவுகளாகப் பிரித்துள்ளோம்; பிரிவுகளின் துணை மொத்தங்களையும், அவைகளின் முதல் வித்தியாசங்களையும் கண்டுபிடித்துள்ளோம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை n என்பது ; முதல் விவரத்திற்கான ஆண்டுதான் x வரிசையின் மூலமாகக் (origin) கருதப்படும்.

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் மாறிலிகளைத் தருபவை :

$$c^n = \frac{d_2}{d_1}$$

$$b = \frac{d_1(c-1)}{(c^n-1)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\left(S_1 - \frac{d_1}{c^n-1}\right)$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புகளைப் பொருத்தினால்,

$$c^n = c^{11} = \frac{-2,152}{-15,875} = +\ 0{\cdot}135559$$

$$c = \sqrt[11]{0.135559} = 0.83388$$

$$b = \frac{-15,875\ (-0.16612)}{(0.135559-1)^2} = +\ 3,529.11$$

$$a = \frac{1}{11}\left(19,507 - \frac{-15{\cdot}875}{(.0135559-1)}\right) = +\ 103.87$$

இந்த மதிப்புகள் $\frac{1}{y}$ என்பதை 100,000 ஆல் பெருக்கிய விவரங்களுக்கானவை. எனவே, நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு :

$$\frac{100,000}{y} = 103{\cdot}87 + 3,529.11\ (0.83388^x)$$

என்பதாகும்.

அட்டவணை G

1922-1954-ல்* கப்பல் ஏற்றப்பட்ட, மெல்லிய இழை ரேயான் நூல் விவரங்களுக்கு, லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு இணைப்பதற்குத் தேவையான அளவைகளைக் கணக்கிடுதல்.

(வருட மொத்தங்கள், மில்லியன் பவுண்டுகளில்)

(1) ஆண்டு	(2) கப்பலேற்றப்பட்ட ரேயான் y	(3) $\frac{100,000}{y}$	(4) துணை மொத்தங்கள்	(5) முதல் வித்தியாசங்கள்
1922	22·6	4,425		
1923	29·5	3,390		
1924	40·3	2,481		
1925	52·8	1,894		
1926	51·3	1,949	$S_1 = 19,507$	
1927	85·0	1,176		
1928	88·0	1,136		
1929	116·4	859		
1930	111·6	896		
1931	155·5	643		
1932	151·8	658		
				$d_1 = S_2 - S_1$ $= -15,875$
1933	210·9	474		
1934	194·7	514		
1935	252·7	396		
1936	297·3	336		
1937	266·2	376	$S_2 = 3,632$	
1938	273·8	365		
1939	359·6	278		
1940	388·7	257		
1941	452·4	221		
1942	468·8	213		
1943	494·2	202		
				$d_2 = S_3 - S_2$ $= -2,152$
1944	539·1	185		
1945	602·4	166		
1946	666·4	150		
1947	729·0	137		
1948	836·5	120	$S_3 = 1,480$	
1949	782·4	128		
1950	949·1	105		
1951	860·3	116		
1952	844·8	118		
1953	864·7	116		
1954	718·8	139		

* மூலம்: 'டெக்ஸ்டைல் ஆர்கனன்' டெக்ஸ்டைல் எகனமிக்ஸ் பியூரோ (Textile Organon, Textile Economics Bureau).

அட்டவணை H

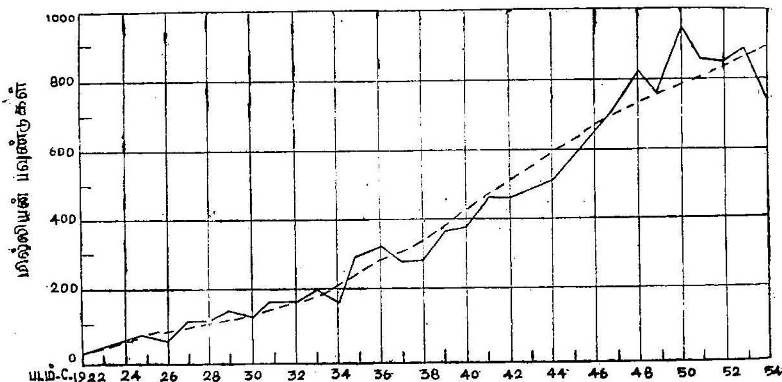
உள்நாட்டுக்கான மெல்லிய ரேயான் நூலின் கப்பலேற்றங்களுக்கு லாஜிஸ்டிக் வளைகோட்டை இணைத்து, போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல்.

(1) ஆண்டு	(2) x	(3) c^x	(4) bc^x	(5) $\frac{100,000}{y}$ $(a+bc^x)$	(6) $\left(100,000 \times \frac{1}{\text{பத்தி (5)}}\right)$ y
1922	0	1·00000	3,529·1	3,633·0	27·5
1923	1	0·83388	2,942·9	3,046·8	32·8
1924	2	0·69536	2,454·0	2,557·9	39·1
1925	3	0·57984	2,046·3	2,150·2	46·5
1926	4	0·48352	1,706·4	1,810·3	55·2
1927	5	0·40320	1,422·9	1,526·8	65·5
1928	6	0·33622	1,186·6	1,290·5	77·5
1929	7	0·28037	989·5	1,093.4	91·5
1930	8	0·23379	825·1	929·0	107·6
1931	9	0·19495	688·0	791·9	126·3
1932	10	0·16257	573·7	677·6	147·6
1933	11	0·13556	478·4	582·3	171·7
1934	12	0·11304	398·9	502·8	198·9
1935	13	0·09426	332·6	436·5	229·1
1936	14	0·07860	277·3	381·2	262·3
1937	15	0·06555	231·3	335·2	298·3
1938	16	0·05466	192·9	296·8	336·9
1939	17	0·04558	160·9	264·8	377·6
1940	18	0·03801	134·1	238·0	420·2
1941	19	0·03169	111·8	215·7	463·6
1942	20	0·02643	93·3	197·2	507·1
1943	21	0·02204	77·8	181·7	550·4
1944	22	0·01838	64·9	168·8	592·4
1945	23	0·01532	54·1	158·0	632·9
1946	24	0·01278	45·1	149·0	671·1
1947	25	0·01066	37·6	141·5	706·7
1948	26	0·00889	31·4	135·3	739·1
1949	27	0·00741	26·2	130·1	768·6
1950	28	0·00618	21·8	125·7	795·5
1951	29	0·00515	18·2	122·1	819·0
1952	30	0·00430	15·2	119·1	839·6
1953	31	0·00358	12·6	116.5	858·8
1954	32	0·00299	10·6	114·5	873·4

மற்றக் கணக்கிடுதல்களை அட்டவணை H-ல் காணலாம். முறை நேரான ஒன்றுதான். (5)ஆம் பத்தியிலுள்ளவைகளின் ரெஸிப்ரோக் கல்களை எடுத்து, அவற்றை 100,000ஆல் பெருக்க, போக்கு மதிப்பு கள் வரும்; இவைகளை (6)ஆம் பத்தியில் காணலாம். கண்டறிந்த விவரங்களும், லாஜிஸ்டிக் கோடும், வரைபடம் C-ல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

உண்மையாகக் குறையாமல் குறைந்துகொண்டே போகும் வளர்ச்சியையுடைய காலவரிசையின் போக்கை அளவிடுவதற்கு, காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டைப்போலவே லாஜிஸ்டிக் வளைகோட்டை யும் பயன்படுத்தலாம். வளைகோடு ஒரு நீண்ட S வடிவை யொத்ததாக அமைகிறது.

சுழி கீழ் தொடுகோடாகவும், a என்ற மாறிலி ஓர் உச்சவரம் பாகவும் இருக்கும். சார்புடை மாறி $\frac{100,000}{y}$ என்றபொழுதுதான் இந்த a வருவதால், உண்மையான தொடுகோடு $\frac{100,000}{a}$ ஆகும்; கண்டுபிடிக்கப்பட்ட a-ன் மதிப்பு 103·87 ஆனதால், நிறுவப்பட்ட போக்குக் கோட்டின் உச்சவரம்பு 963 மில்லியன் பவுண்டுகளாகும்.



அமெரிக்காவில், 1922-54-ல் உள்நாட்டுக்காகக் கப்பல் ஏற்றப்பட்ட மெல்லிய ரேயான் இழை நூல் அளவுகள், லாஜிஸ்டிக் போக்குடன்

(காம்பர்ட்ஸ் வளைகோட்டைப் பொருத்தியபோது, உச்சவரம்பு 2,324 மில்லியன் பவுண்டுகள் என்று வந்ததையும், அந்த அள விற்கும், இங்குக் கிடைத்துள்ள அளவிற்குமுள்ள பெருத்த வித்தியா சத்தையும், கவனிக்க.) லாஜிஸ்டிக்கினுல் குறிப்பிடப்பட்ட வரம்பு 1950-ல் போர்க் காலத்திற்குப் பிறகு நிகழ்ந்த ஏற்றத்தின் முகடாக (peak) ஏறத்தாழ அடையப்பட்டது. இந்த உச்சவரம்பைப் பன்

னெடுங்காலப் போக்கில் எதிர்பார்க்கலாமா என்பது, அண்மை ஆண்டுகளின் இறக்கங்களுக்குக் காரணமாயுள்ள ஆற்றல்களின் (forces) தன்மையைப் பொறுத்திருக்கிறது. பகுத்தறிவிற்குட்பட்ட எந்த வெளியே வைத்தலுக்கும் (extrapolation), போக்கினுல் குறிப்பிடப்பட்ட வரம்பெல்லையோடுகூடிய இந்த விசைகளின் மதிப்பிடுதலும் தேவைப்படும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குட்பட்டு, லாஜிஸ்டிக் வளைகோடானது, போக்கை நன்கு எடுத்துக் காட்டுகிறது— முதல் நிலைகளில் மந்தமான வளர்ச்சி; பிறகு வேகமான வளர்ச்சி; பிறகு தடைப்பட்ட வளர்ச்சிகள் அந்தத் தொழில் வரலாற்றில் உள்ளன.

கிரேக்க அகரவரிசை

எழுத்துகள்	பெயர்கள்	எழுத்துகள்	பெயர்கள்
Α α	ஆல்ஃபா	Ν ν	நூ
Β β	பீட்டா	Ξ ξ	க்ஸை
Γ γ	காம்மா	Ο ο	ஒமிக்ரான்
Δ δ	டெல்ட்டா	Π π	பை
Ε ε	எப்ஸிலான்	Ρ ρ	ரோ
Ζ ζ	ஜீட்டா	Σ σ	சிக்மா
Η η	யீட்டா	Τ τ	டொ
Θ θ	தீட்டா	ϒ υ	உப்ஸிலான்
Ι ι	அயோட்டா	Φ φ	ஃபை
Κ κ	காப்பா	Χ χ	கை
Λ λ	லாம்ப்டா	Ψ ψ	ப்ஸை
Μ μ	ம்யூ	Ω ω	ஒமேகா

APPENDIX TABLE I



Areas and Ordinates of the Normal Curve of Error in Terms of the Abscissa

x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ	x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ
.00	.00000	.39894	.50	.19146	.35207
.01	.00399	.39892	.51	.19497	.35029
.02	.00798	.39886	.52	.19847	.34849
.03	.01197	.39876	.53	.20194	.34667
.04	.01595	.39862	.54	.20540	.34482
.05	.01994	.39844	.55	.20884	.34294
.06	.02392	.39822	.56	.21226	.34105
.07	.02790	.39797	.57	.21566	.33912
.08	.03188	.39767	.58	.21904	.33718
.09	.03586	.39733	.59	.22240	.33521
.10	.03983	.39695	.60	.22575	.33322
.11	.04380	.39654	.61	.22907	.33121
.12	.04776	.39608	.62	.23237	.32918
.13	.05172	.39559	.63	.23565	.32713
.14	.05567	.39505	.64	.23891	.32506
.15	.05962	.39448	.65	.24215	.32297
.16	.06356	.39387	.66	.24537	.32086
.17	.06749	.39322	.67	.24857	.31874
.18	.07142	.39253	.68	.25175	.31659
.19	.07535	.39181	.69	.25490	.31443
.20	.07926	.39104	.70	.25804	.31225
.21	.08317	.39024	.71	.26115	.31006
.22	.08706	.38940	.72	.26424	.30785
.23	.09095	.38853	.73	.26730	.30563
.24	.09483	.38762	.74	.27035	.30339
.25	.09871	.38667	.75	.27337	.30114
.26	.10257	.38568	.76	.27637	.29887
.27	.10642	.38466	.77	.27935	.29659
.28	.11026	.38361	.78	.28230	.29431
.29	.11409	.38251	.79	.28524	.29200
.30	.11791	.38139	.80	.28814	.28969
.31	.12172	.38023	.81	.29103	.28737
.32	.12552	.37903	.82	.29389	.28504
.33	.12930	.37780	.83	.29673	.28269
.34	.13307	.37654	.84	.29955	.28034
.35	.13683	.37524	.85	.30234	.27798
.36	.14058	.37391	.86	.30511	.27562
.37	.14431	.37255	.87	.30785	.27324
.38	.14803	.37115	.88	.31057	.27086
.39	.15173	.36973	.89	.31327	.26848
.40	.15542	.36827	.90	.31594	.26609
.41	.15910	.36678	.91	.31859	.26369
.42	.16276	.36526	.92	.32121	.26129
.43	.16640	.36371	.93	.32381	.25888
.44	.17003	.36213	.94	.32639	.25647
.45	.17364	.36053	.95	.32894	.25406
.46	.17724	.35889	.96	.33147	.25164
.47	.18082	.35723	.97	.33398	.24923
.48	.18439	.35553	.98	.33646	.24681
.49	.18793	.35381	.99	.33891	.24439

Areas and Ordinates of the Normal Curve of Error in Terms of the Abscissa

x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ
1.00	.34134	.24197
1.01	.34375	.23955
1.02	.34614	.23713
1.03	.34850	.23471
1.04	.35083	.23230
1.05	.35314	.22988
1.06	.35543	.22747
1.07	.35769	.22506
1.08	.35993	.22265
1.09	.36214	.22025
1.10	.36433	.21785
1.11	.36650	.21546
1.12	.36864	.21307
1.13	.37076	.21069
1.14	.37286	.20831
1.15	.37493	.20594
1.16	.37698	.20357
1.17	.37900	.20121
1.18	.38100	.19886
1.19	.38298	.19652
1.20	.38493	.19419
1.21	.38686	.19186
1.22	.38877	.18954
1.23	.39065	.18724
1.24	.39251	.18494
1.25	.39435	.18265
1.26	.39617	.18037
1.27	.39796	.17810
1.28	.39973	.17585
1.29	.40147	.17360
1.30	.40320	.17137
1.31	.40490	.16915
1.32	.40658	.16694
1.33	.40824	.16474
1.34	.40988	.16256
1.35	.41149	.16038
1.36	.41309	.15822
1.37	.41466	.15608
1.38	.41621	.15395
1.39	.41774	.15183
1.40	.41924	.14973
1.41	.42073	.14764
1.42	.42220	.14556
1.43	.42364	.14350
1.44	.42507	.14146
1.45	.42647	.13943
1.46	.42786	.13742
1.47	.42922	.13542
1.48	.43056	.13344
1.49	.43189	.13147

x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ
1.50	.43319	.12952
1.51	.43448	.12758
1.52	.43574	.12566
1.53	.43699	.12376
1.54	.43822	.12188
1.55	.43943	.12001
1.56	.44062	.11816
1.57	.44179	.11632
1.58	.44295	.11450
1.59	.44408	.11270
1.60	.44520	.11092
1.61	.44630	.10915
1.62	.44738	.10741
1.63	.44845	.10567
1.64	.44950	.10396
1.65	.45053	.10226
1.66	.45154	.10059
1.67	.45254	.09893
1.68	.45352	.09728
1.69	.45449	.09566
1.70	.45543	.09405
1.71	.45637	.09246
1.72	.45728	.09089
1.73	.45818	.08933
1.74	.45907	.08780
1.75	.45994	.08628
1.76	.46080	.08478
1.77	.46164	.08329
1.78	.46246	.08183
1.79	.46327	.08038
1.80	.46407	.07895
1.81	.46485	.07754
1.82	.46562	.07614
1.83	.46638	.07477
1.84	.46712	.07341
1.85	.46784	.07206
1.86	.46856	.07074
1.87	.46926	.06943
1.88	.46995	.06814
1.89	.47062	.06687
1.90	.47128	.06562
1.91	.47193	.06438
1.92	.47257	.06316
1.93	.47320	.06195
1.94	.47381	.06077
1.95	.47441	.05959
1.96	.47500	.05844
1.97	.47558	.05730
1.98	.47615	.05618
1.99	.47670	.05508

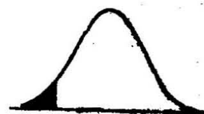
APPENDIX TABLE I — *Continued*

Areas and Ordinates of the Normal Curve of Error in Terms of the Abscissa

x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ	x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ
2.00	.47725	.05399	2.50	.49379	.01753
2.01	.47778	.05292	2.51	.49396	.01709
2.02	.47831	.05186	2.52	.49413	.01667
2.03	.47882	.05082	2.53	.49430	.01625
2.04	.47932	.04980	2.54	.49446	.01585
2.05	.47982	.04879	2.55	.49461	.01545
2.06	.48030	.04780	2.56	.49477	.01506
2.07	.48077	.04682	2.57	.49492	.01468
2.08	.48124	.04586	2.58	.49506	.01431
2.09	.48169	.04491	2.59	.49520	.01394
2.10	.48214	.04398	2.60	.49534	.01358
2.11	.48257	.04307	2.61	.49547	.01323
2.12	.48300	.04217	2.62	.49560	.01289
2.13	.48341	.04128	2.63	.49573	.01256
2.14	.48382	.04041	2.64	.49585	.01223
2.15	.48422	.03955	2.65	.49598	.01191
2.16	.48461	.03871	2.66	.49609	.01160
2.17	.48500	.03788	2.67	.49621	.01130
2.18	.48537	.03706	2.68	.49632	.01100
2.19	.48574	.03626	2.69	.49643	.01071
2.20	.48610	.03547	2.70	.49653	.01042
2.21	.48645	.03470	2.71	.49664	.01014
2.22	.48679	.03394	2.72	.49674	.00987
2.23	.48713	.03319	2.73	.49683	.00961
2.24	.48745	.03246	2.74	.49693	.00935
2.25	.48778	.03174	2.75	.49702	.00909
2.26	.48809	.03103	2.76	.49711	.00885
2.27	.48840	.03034	2.77	.49720	.00861
2.28	.48870	.02965	2.78	.49728	.00837
2.29	.48899	.02898	2.79	.49736	.00814
2.30	.48928	.02833	2.80	.49744	.00792
2.31	.48956	.02768	2.81	.49752	.00770
2.32	.48983	.02705	2.82	.49760	.00748
2.33	.49010	.02643	2.83	.49767	.00727
2.34	.49036	.02582	2.84	.49774	.00707
2.35	.49061	.02522	2.85	.49781	.00687
2.36	.49086	.02463	2.86	.49788	.00668
2.37	.49111	.02406	2.87	.49795	.00649
2.38	.49134	.02349	2.88	.49801	.00631
2.39	.49158	.02294	2.89	.49807	.00613
2.40	.49180	.02239	2.90	.49813	.00595
2.41	.49202	.02186	2.91	.49819	.00578
2.42	.49224	.02134	2.92	.49825	.00562
2.43	.49245	.02083	2.93	.49831	.00545
2.44	.49266	.02033	2.94	.49836	.00530
2.45	.49286	.01984	2.95	.49841	.00514
2.46	.49305	.01936	2.96	.49846	.00499
2.47	.49324	.01889	2.97	.49851	.00485
2.48	.49343	.01842	2.98	.49856	.00471
2.49	.49361	.01797	2.99	.49861	.00457

Areas and Ordinates of the Normal Curve of Error in Terms of the Abscissa

x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ	x/σ	Area between maximum ordinate and ordinate at x/σ	Ordinate at x/σ
3.00	.49865	.00443	3.50	.49977	.00087
3.01	.49869	.00430	3.51	.49978	.00084
3.02	.49874	.00417	3.52	.49978	.00081
3.03	.49878	.00405	3.53	.49979	.00079
3.04	.49882	.00393	3.54	.49980	.00076
3.05	.49886	.00381	3.55	.49981	.00073
3.06	.49889	.00370	3.56	.49981	.00071
3.07	.49893	.00358	3.57	.49982	.00068
3.08	.49897	.00348	3.58	.49983	.00066
3.09	.49900	.00337	3.59	.49983	.00063
3.10	.49903	.00327	3.60	.49984	.00061
3.11	.49906	.00317	3.61	.49985	.00059
3.12	.49910	.00307	3.62	.49985	.00057
3.13	.49913	.00298	3.63	.49986	.00055
3.14	.49916	.00288	3.64	.49986	.00053
3.15	.49918	.00279	3.65	.49987	.00051
3.16	.49921	.00271	3.66	.49987	.00049
3.17	.49924	.00262	3.67	.49988	.00047
3.18	.49926	.00254	3.68	.49988	.00046
3.19	.49929	.00246	3.69	.49989	.00044
3.20	.49931	.00238	3.70	.49989	.00042
3.21	.49934	.00231	3.71	.49990	.00041
3.22	.49936	.00224	3.72	.49990	.00039
3.23	.49938	.00216	3.73	.49990	.00038
3.24	.49940	.00210	3.74	.49991	.00037
3.25	.49942	.00203	3.75	.49991	.00035
3.26	.49944	.00196	3.76	.49992	.00034
3.27	.49946	.00190	3.77	.49992	.00033
3.28	.49948	.00184	3.78	.49992	.00031
3.29	.49950	.00178	3.79	.49992	.00030
3.30	.49952	.00172	3.80	.49993	.00029
3.31	.49953	.00167	3.81	.49993	.00028
3.32	.49955	.00161	3.82	.49993	.00027
3.33	.49957	.00156	3.83	.49994	.00026
3.34	.49958	.00151	3.84	.49994	.00025
3.35	.49960	.00146	3.85	.49994	.00024
3.36	.49961	.00141	3.86	.49994	.00023
3.37	.49962	.00136	3.87	.49995	.00022
3.38	.49964	.00132	3.88	.49995	.00021
3.39	.49965	.00127	3.89	.49995	.00021
3.40	.49966	.00123	3.90	.49995	.00020
3.41	.49968	.00119	3.91	.49995	.00019
3.42	.49969	.00115	3.92	.49996	.00018
3.43	.49970	.00111	3.93	.49996	.00018
3.44	.49971	.00107	3.94	.49996	.00017
3.45	.49972	.00104	3.95	.49996	.00016
3.46	.49973	.00100	3.96	.49996	.00016
3.47	.49974	.00097	3.97	.49996	.00015
3.48	.49975	.00094	3.98	.49997	.00014
3.49	.49976	.00090	3.99	.49997	.00014



APPENDIX TABLE II

Percentile Values of the Normal Distribution *

T†-ன் இடப் புறத்துப் பரப்பு	*T*†	*T*†-ன் இடப் புறத்துப் பரப்பு	*T*†
.001	—3.090	.600	+ .253
.002	—2.87[illegible]	.700	+ .524
.003	—2.748	.800	+ .842
.004	—2.652	.900	+1.282
.005	—2.576	.910	+1.341
.006	—2.512	.920	+1.405
.007	—2.457	.930	+1.476
.008	—2.409	.940	+1.555
.009	—2.366	.950	+1.645
.010	—2.326	.960	+1.751
.020	—2.054	.970	+1.881
.030	—1.881	.980	+2.054
.040	—1.751	.990	+2.326
.050	—1.645	.991	+2.366
.060	—1.555	.992	+2.409
.070	—1·476	.993	+2.457
.080	—1.405	.994	+2.512
.090	—1.341	.995	+2.576
.100	—1.282	.996	+2.652
.200	— .842	.997	+2.748
.300	— .524	.998	+2·878
.400	— .253	.999	+3.090
.500	.000		

* ட்ருமன், எல். கெல்லி (Truman L. Kelley) என்பவரின் நூலான 'The Kelley Statistical Tables' (Harvard University Press, 1948) என்பதின் அட்டவணை I-லிருந்து சில மதிப்புகளே இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த விவரச் சுருக்கத்தைப் பிரசுரிப்பதற்கு அனுமதி தந்த பேராசிரியர் கெல்லிக்கும், ஹார்வர்ட் யூனிவர்ஸிடி பிரஸ் நிறுவனத்தாருக்கும், என் நன்றி உரித்தாகும்.

† நார்மல் மாறியின் விலக்கத்தை—அதாவது, நார்மல் பரவலின் சராசரியிலிருந்த விலக்கத்தை, தரவிலக்கத்தின் அளவையாக:எழுதியுள்ளது—குறிக்க இங்கு *T* என்ற அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். நார்மல் வளைகோட்டின்கீழ் உள்ள மொத்தப் பரப்பின் விகித சமபாகங்களாகப் (proportionate parts) பரப்புகளைக் குறித்துள்ளது.

APPENDIX TABLE III *

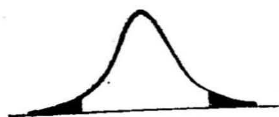


Table of *t*

n	P = ·05	·02	·01
1	12·706	31·821	63·657
2	4·303	6.965	9.925
3	3·182	4.541	5·841
4	2.776	3.747	4.604
5	2.571	3.365	4.032
6	2·447	3.143	3·707
7	2·365	2.998	3.499
8	2.306	2.896	3.355
9	2.262	2.821	3.250
10	2.228	2.764	3.169
11	2.201	2.718	3.106
12	2.179	2.681	3.055
13	2.160	2.650	3.012
14	2.145	2.624	2 977
15	2.131	2.602	2.947
16	2.120	2 583	2.921
17	2.110	2.567	2.898
18	2.101	2 552	2.878
19	2.093	2.539	2.861
20	2.086	2.528	2.845
21	2.080	2.518	2 831
22	2.074	2.508	2.819
23	2·069	2.500	2.807
24	2.064	2.492	2.797
25	2.060	2.485	2.787
26	2.056	2.479	2.779
27	2.052	2.473	2·771
28	2.048	2.467	2.763
29	2.045	2.462	2.756
30	2.042	2.457	2.750
∞	1·95996	2·32634	2·57582

* ஆர். ஏ. ஃபிஷரின் 'Statistical Methods for Research Workers'—வெளியிட்டோர் Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh—நூலில் உள்ள அட்டவணை IV-ன் சுருக்கமே இந்தப் பின் இணைப்புப் பட்டியல் III. நூலை எழுதியவரின் மற்றும் வெளியிட்டோரின் அனுமதி பெற்று இங்குச் சுருக்கம் வெளியிடப்பட்டுள்ளது.

APPENDIX TABLE IV *

Values of the Correlation Coefficient for Different Levels of Significance

n	$P = \cdot 05$	$\cdot 02$	$\cdot 01$
1	.996917	.9995066	·9998766
2	.95000	.98000	.990000
3	.8783	·93433	.95873
4	.8114	.8822	.91720
5	.7545	.8329	.8745
6	.7067	.7887	.8343
7	.6664	.7498	.7977
8	.6319	.7155	.7646
9	.6021	.6851	.7348
10	.5760	.6581	.7079
11	.5529	.6339	.6835
12	.5324	.6120	.6614
13	.5139	.5923	.6411
14	.4973	.5742	.6226
15	.4821	.5577	.6055
16	.4683	.5425	.5897
17	.4555	.5285	.5751
18	.4438	.5155	.5614
19	.4329	.5034	.5487
20	.4227	.4921	.5368
25	.3809	.4451	.4869
30	.3494	.4093	.4487
35	.3246	.3810	.4182
40	.3044	.3578	.3932
45	.2875	.3384	.3721
50	.2732	.3218	.3541
60	.2500	.2948	.3248
70	.2319	.2737	.3017
80	.2172	.2565	.2830
90	.2050	.2422	.2673
100	.1946	.2301	.2540

மொத்த உடன்தொடர்பாளுல், n என்பது மாதிரியிலுள்ள ஜோடிகளின் எண்ணிக்கையைவிட இரண்டு குறைவாகும்; ஒரு சிறைத் தொடர்புக் கெழுவாளுல், விலக்கப்பட்ட (eliminated) மாறிகளின் எண்ணிக்கையையும் குறைத்துவிட வேண்டும்.

* ஆர். ஏ. ஃபிஷரின், 'Statistical Methods for Research Workers' (வெளியிட்டோர்: Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh)—நூலில் அட்டவணை V–A-ன் சுருக்கமே இந்தப் பின் இணைப்புப் பட்டியல் IV. நூலை எழுதியவரின், மற்றும் வெளியிட்டோரின் அனுமதி பெற்று இங்குச் சுருக்கம் வெளியிடப்பட்டுள்ளது.

APPENDIX TABLE VI

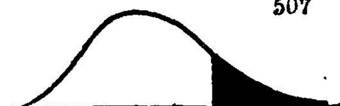
Showing the Relations between r and z' for Values of z' from 0 to 5 *

z'	·00	·01	·02	·03	.04	·05	.06	·07	·08	·09
.0	·0000	.0100	.0200	.0300	.0400	.0500	.0599	.0699	.0798	.0898
·1	.0997	.1096	.1194	.1293	.1391	.1489	.1587	.1684	.1781	.1878
·2	.1974	.2070	.2165	.2260	.2355	.2449	.2543	.2636	.2729	.2821
·3	.2913	.3004	.3095	.3185	.3275	.3364	.3452	.3540	.3627	.3714
.4	.3800	.3885	.3969	.4053	.4136	.4219	.4301	.4382	.4462	.4542
.5	.4621	.4700	.4777	.4854	.4930	.5005	.5080	.5154	.5227	.5299
·6	.5370	.5441	.5511	.5581	.5649	.5717	.5784	.5850	.5915	.5980
·7	.6044	.6107	.6169	.6231	.6291	.6352	.6411	.6469	.6527	.6584
·8	.6640	.6696	.6751	.6805	.6858	.6911	.6963	.7014	.7064	.7114
.9	.7163	.7211	.7259	.7306	.7352	.7398	.7443	.7487	.7531	.7574
1.0	.7616	.7658	.7699	.7739	.7779	.7818	.7857	.7895	.7932	.7969
1.1	.8005	.8041	.8076	.8110	.8144	.8178	.8210	.8243	.8275	.8306
1.2	.8337	.8367	.8397	.8426	.8455	.8483	.8511	.8538	.8565	.8591
1.3	.8617	.8643	.8668	.8693	.8717	.8741	.8764	.8787	.8810	.8832
1.4	.8854	.8875	.8896	.8917	.8937	.8957	.8977	.8996	.9015	.9033
1.5	.9052	.9069	.9087	.9104	.9121	.9138	.9154	.9170	.9186	.9202
1.6	.9217	.9232	.9246	.9261	.9275	.9289	.9302	.9316	.9329	.9342
1.7	.9354	.9367	.9379	.9391	.9402	.9414	.9425	.9436	.9447	.9458
1.8	.9468	.9478	.9498	.9488	.9508	.9518	.9527	.9536	.9545	.9554
1.9	.9562	.9571	.9579	.9587	.9595	.9603	.9611	.9619	.9626	.9633
2.0	.9640	.9647	.9654	.9661	.9668	.9674	.9680	.9687	.9693	.9699
2.1	.9705	.9710	.9716	.9722	.9727	.9732	.9738	.9743	.9748	.9753
2.2	.9757	.9762	.9767	.9771	.9776	.9780	.9785	.9789	.9793	.9797
2.3	.9801	.9805	.9809	.9812	.9816	.9820	.9823	.9827	.9830	.9834
2.4	.9837	.9840	.9843	.9846	.9849	.9852	.9855	.9858	.9861	.9863
2.5	.9866	.9869	.9871	.9874	.9876	.9879	.9881	.9884	.9886	.9888
2·6	.9890	.9892	.9895	.9897	.9899	.9901	.9903	.9905	.9906	.9908
2·7	.9910	.9912	.9914	.9915	.9917	.9919	.9920	.9922	.9923	.9925
2·8	.9926	.9928	.9929	.9931	.9932	.9933	.9935	.9936	.9937	.9938
2·9	.9940	.9941	.9942	.9943	.9944	.9945	.9946	.9947	.9949	.9950
3·0	.9951									
4.0	.9993									
5.0	.9999									

* z'-ன் மதிப்புகள் இடப்பக்கமிருக்கும் அளவுத் திட்டத்திலும் (scale), மேல் பக்கமிருக்கும் அளவுத் திட்டத்திலுமுள்ளன. அவைகளுக்குத் தகுந்த r மதிப்புகளை அட்டவணையின் நடுப்பகுதிகளில் காணலாம்.

APPENDIX TABLE VI *

Selected Percentile Values of the χ^2 Distribution *



n	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.99}$
1	.000157	.00393	.455	2.706	3.841	6.635
2	.0201	.103	1.386	4.605	5.991	9.210
3	.115	.352	2.366	6.251	7.815	11.341
4	.297	.711	3.357	7.779	9.488	13.277
[illegible]	.554	1.145	4.351	9.236	11.070	15.086
6	.872	1.635	5.348	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	6.346	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	7.344	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	8.343	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	9.342	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	10.341	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	11.340	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	12.340	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	13.339	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	14.339	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	15.338	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	16.338	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	17.338	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	18.338	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	19.337	28.412	31.410	37.566
[illegible]	8.897	11.591	20.337	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	21.337	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	22.337	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	23.337	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	24.337	34.382	37.652	44.314
26	12.198	15.379	25.336	35.563	38.885	45.642
27	12.87[illegible]	16.151	26.336	36.741	40.113	46.963
28	13.5[illegible]	16.928	27.336	37.916	41.337	48.278
29	14.[illegible]	17.708	28.336	39.087	42.557	49.588
30	14[illegible]	18.493	29.336	40.256	43.773	50.892

For larger [illegible] n, the expression $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ may be used as a normal deviate with [illegible] ..dard error. A deviate thus determined is to be interpreted as in a one-tailed t[illegible]

* Appendix T[illegible] abridged from Table III of R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research W[illegible]* [illegible]blished by Oliver and Boyd, Ltd., of Edinburgh. The abridgment [illegible] published [illegible] permission of the authors and publishers.

95th and 99th Percentile

95th Percentile in Light-Face Type,

n_1 = degrees of freedom

n_2 = degrees of freedom for denominator

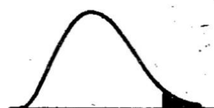
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4,052**	200 **4,999**	216 **5,403**	225 **5,625**	230 **5,764**	234 **5,859**	237 **5,928**	239 **5,981**	241 **6,022**	242 **6,056**	243 **6,082**	244 **6,106**
2	18.51 **98.49**	19.00 **99.01**	19.16 **99.17**	19.25 **99.25**	19.30 **99.30**	19.33 **99.33**	19.36 **99.34**	19.37 **99.36**	19.38 **99.38**	19.39 **99.40**	19.40 **99.41**	19.41 **99.42**
3	10.13 **34.12**	9.55 **30.81**	9.28 **29.46**	9.12 **28.71**	9.01 **28.24**	8.94 **27.91**	8.88 **27.67**	8.84 **27.49**	8.81 **27.34**	8.78 **27.23**	8.76 **27.13**	8.74 **27.05**
4	7.71 **21.20**	6.94 **18.00**	6.59 **16.69**	6.39 **15.98**	6.26 **15.52**	6.16 **15.21**	6.09 **14.98**	6.04 **14.80**	6.00 **14.66**	5.96 **14.54**	5.93 **14.45**	5.91 **14.37**
5	6.61 **16.26**	5.79 **13.27**	5.41 **12.06**	5.19 **11.39**	5.05 **10.97**	4.95 **10.67**	4.88 **10.45**	4.82 **10.27**	4.78 **10.15**	4.74 **10.05**	4.70 **9.96**	4.68 **9.89**
6	5.99 **13.74**	5.14 **10.92**	4.76 **9.78**	4.53 **9.15**	4.39 **8.75**	4.28 **8.47**	4.21 **8.26**	4.15 **8.10**	4.10 **7.98**	4.06 **7.87**	4.03 **7.79**	4.00 **7.72**
7	5.59 **12.25**	4.74 **9.55**	4.35 **8.45**	4.12 **7.85**	3.97 **7.46**	3.87 **7.19**	3.79 **7.00**	3.73 **6.84**	3.68 **6.71**	3.63 **6.62**	3.60 **6.54**	3.57 **6.47**
8	5.32 **11.26**	4.46 **8.65**	4.07 **7.59**	3.84 **7.01**	3.69 **6.63**	3.58 **6.37**	3.50 **6.19**	3.44 **6.03**	3.39 **5.91**	3.34 **5.82**	3.31 **5.74**	3.28 **5.67**
9	5.12 **10.56**	4.26 **8.02**	3.86 **6.99**	3.63 **6.42**	3.48 **6.06**	3.37 **5.80**	3.29 **5.62**	3.23 **5.47**	3.18 **5.35**	3.13 **5.26**	3.10 **5.18**	3.07 **5.11**
10	4.96 **10.04**	4.10 **7.56**	3.71 **6.55**	3.48 **5.99**	3.33 **5.64**	3.22 **5.39**	3.14 **5.21**	3.07 **5.06**	3.02 **4.95**	2.97 **4.85**	2.94 **4.78**	2.91 **4.71**
11	4.84 **9.65**	3.98 **7.20**	3.59 **6.22**	3.36 **5.67**	3.20 **5.32**	3.09 **5.07**	3.01 **4.88**	2.95 **4.74**	2.90 **4.63**	2.86 **4.54**	2.82 **4.46**	2.79 **4.40**
12	4.75 **9.33**	3.88 **6.93**	3.49 **5.95**	3.26 **5.41**	3.11 **5.06**	3.00 **4.82**	2.92 **4.65**	2.85 **4.50**	2.80 **4.39**	2.76 **4.30**	2.72 **4.22**	2.69 **4.16**
13	4.67 **9.07**	3.80 **6.70**	3.41 **5.74**	3.18 **5.20**	3.02 **4.86**	2.92 **4.62**	2.84 **4.44**	2.77 **4.30**	2.72 **4.19**	2.67 **4.10**	2.63 **4.02**	2.60 **3.96**
14	4.60 **8.86**	3.74 **6.51**	3.34 **5.56**	3.11 **5.03**	2.96 **4.69**	2.85 **4.46**	2.77 **4.28**	2.70 **4.14**	2.65 **4.03**	2.60 **3.94**	2.56 **3.86**	2.53 **3.80**
15	4.54 **8.68**	3.68 **6.36**	3.29 **5.42**	3.06 **4.89**	2.90 **4.56**	2.79 **4.32**	2.70 **4.14**	2.64 **4.00**	2.59 **3.89**	2.55 **3.80**	2.51 **3.73**	2.48 **3.67**
16	4.49 **8.53**	3.63 **6.23**	3.24 **5.29**	3.01 **4.77**	2.85 **4.44**	2.74 **4.20**	2.66 **4.03**	2.59 **3.89**	2.54 **3.78**	2.49 **3.69**	2.45 **3.61**	2.42 **3.55**
17	4.45 **8.40**	3.59 **6.11**	3.20 **5.18**	2.96 **4.67**	2.81 **4.34**	2.70 **4.10**	2.62 **3.93**	2.55 **3.79**	2.50 **3.68**	2.45 **3.59**	2.41 **3.52**	2.38 **3.45**
18	4.41 **8.28**	3.55 **6.01**	3.16 **5.09**	2.93 **4.58**	2.77 **4.25**	2.66 **4.01**	2.58 **3.85**	2.51 **3.71**	2.46 **3.60**	2.41 **3.51**	2.37 **3.44**	2.34 **3.37**
19	4.38 **8.18**	3.52 **5.93**	3.13 **5.01**	2.90 **4.50**	2.74 **4.17**	2.63 **3.94**	2.55 **3.77**	2.48 **3.63**	2.43 **3.52**	2.38 **3.43**	2.34 **3.36**	2.31 **3.30**
20	4.35 **8.10**	3.49 **5.85**	3.10 **4.94**	2.87 **4.43**	2.71 **4.10**	2.60 **3.87**	2.52 **3.71**	2.45 **3.56**	2.40 **3.45**	2.35 **3.37**	2.31 **3.30**	2.28 **3.23**
21	4.32 **8.02**	3.47 **5.78**	3.07 **4.87**	2.84 **4.37**	2.68 **4.04**	2.57 **3.81**	2.49 **3.65**	2.42 **3.51**	2.37 **3.40**	2.32 **3.31**	2.28 **3.24**	2.25 **3.17**
22	4.30 **7.94**	3.44 **5.72**	3.05 **4.82**	2.82 **4.31**	2.66 **3.99**	2.55 **3.76**	2.47 **3.59**	2.40 **3.45**	2.35 **3.35**	2.30 **3.26**	2.26 **3.18**	2.23 **3.12**
23	4.28 **7.88**	3.42 **5.66**	3.03 **4.76**	2.80 **4.26**	2.64 **3.94**	2.53 **3.71**	2.45 **3.54**	2.38 **3.41**	2.32 **3.30**	2.28 **3.21**	2.24 **3.14**	2.20 **3.07**
24	4.26 **7.82**	3.40 **5.61**	3.01 **4.72**	2.78 **4.22**	2.62 **3.90**	2.51 **3.67**	2.43 **3.50**	2.36 **3.36**	2.30 **3.25**	2.26 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.03**
25	4.24 **7.77**	3.38 **5.57**	2.99 **4.68**	2.76 **4.18**	2.60 **3.86**	2.49 **3.63**	2.41 **3.46**	2.34 **3.32**	2.28 **3.21**	2.24 **3.13**	2.20 **3.05**	2.16 **2.99**
26	4.22 **7.72**	3.37 **5.53**	2.98 **4.64**	2.74 **4.14**	2.59 **3.82**	2.47 **3.59**	2.39 **3.42**	2.32 **3.29**	2.27 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.02**	2.15 **2.96**

TABLE VII

Values of the *F* Distribution *

99th Percentile in Bold-Face Type

for numerator



14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
245 **6,142**	246 **6,169**	248 **6,208**	249 **6,234**	250 **6,258**	251 **6,286**	252 **6,302**	253 **6,323**	253 **6,334**	254 **6,352**	254 **6,361**	254 **6,366**	1
19.42 **99.43**	19.43 **99.44**	19.44 **99.45**	19.45 **99.46**	19.46 **99.47**	19.47 **99.48**	19.47 **99.48**	19.48 **99.49**	19.49 **99.49**	19.49 **99.49**	19.50 **99.50**	19.50 **99.50**	2
8.71 **26.92**	8.69 **26.83**	8.66 **26.69**	8.64 **26.60**	8.62 **26.50**	8.60 **26.41**	8.58 **26.35**	8.57 **26.27**	8.56 **26.23**	8.54 **26.18**	8.54 **26.14**	8.53 **26.12**	3
5.87 **14.24**	5.84 **14.15**	5.80 **14.02**	5.77 **13.93**	5.74 **13.83**	5.71 **13.74**	5.70 **13.69**	5.68 **13.61**	5.66 **13.57**	5.65 **13.52**	5.64 **13.48**	5.63 **13.46**	4
4.64 **9.77**	4.60 **9.68**	4.56 **9.55**	4.53 **9.47**	4.50 **9.38**	4.46 **9.29**	4.44 **9.24**	4.42 **9.17**	4.40 **9.13**	4.38 **9.07**	4.37 **9.04**	4.36 **9.02**	5
3.96 **7.60**	3.92 **7.52**	3.87 **7.39**	3.84 **7.31**	3.81 **7.23**	3.77 **7.14**	3.75 **7.09**	3.72 **7.02**	3.71 **6.99**	3.69 **6.94**	3.68 **6.90**	3.67 **6.88**	6
3.52 **6.35**	3.49 **6.27**	3.44 **6.15**	3.41 **6.07**	3.38 **5.98**	3.34 **5.90**	3.32 **5.85**	3.29 **5.78**	3.28 **5.75**	3.25 **5.70**	3.24 **5.67**	3.23 **5.65**	7
3.23 **5.56**	3.20 **5.48**	3.15 **5.36**	3.12 **5.28**	3.08 **5.20**	3.05 **5.11**	3.03 **5.06**	3.00 **5.00**	2.98 **4.96**	2.96 **4.91**	2.94 **4.88**	2.93 **4.86**	8
3.02 **5.00**	2.98 **4.92**	2.93 **4.80**	2.90 **4.73**	2.86 **4.64**	2.82 **4.56**	2.80 **4.51**	2.77 **4.45**	2.76 **4.41**	2.73 **4.36**	2.72 **4.33**	2.71 **4.31**	9
2.86 **4.60**	2.82 **4.52**	2.77 **4.41**	2.74 **4.33**	2.70 **4.25**	2.67 **4.17**	2.64 **4.12**	2.61 **4.05**	2.59 **4.01**	2.56 **3.96**	2.55 **3.93**	2.54 **3.91**	10
2.74 **4.29**	2.70 **4.21**	2.65 **4.10**	2.61 **4.02**	2.57 **3.94**	2.53 **3.86**	2.50 **3.80**	2.47 **3.74**	2.45 **3.70**	2.42 **3.66**	2.41 **3.62**	2.40 **3.60**	11
2.64 **4.05**	2.60 **3.98**	2.54 **3.86**	2.50 **3.78**	2.46 **3.70**	2.42 **3.61**	2.40 **3.56**	2.36 **3.49**	2.35 **3.46**	2.32 **3.41**	2.31 **3.38**	2.30 **3.36**	12
2.55 **3.85**	2.51 **3.78**	2.46 **3.67**	2.42 **3.59**	2.38 **3.51**	2.34 **3.42**	2.32 **3.37**	2.28 **3.30**	2.26 **3.27**	2.24 **3.21**	2.22 **3.18**	2.21 **3.16**	13
2.48 **3.70**	2.44 **3.62**	2.39 **3.51**	2.35 **3.43**	2.31 **3.34**	2.27 **3.26**	2.24 **3.21**	2.21 **3.14**	2.19 **3.11**	2.16 **3.06**	2.14 **3.02**	2.13 **3.00**	14
2.43 **3.56**	2.39 **3.48**	2.33 **3.36**	2.29 **3.29**	2.25 **3.20**	2.21 **3.12**	2.18 **3.07**	2.15 **3.00**	2.12 **2.97**	2.10 **2.92**	2.08 **2.89**	2.07 **2.87**	15
2.37 **3.45**	2.33 **3.37**	2.28 **3.25**	2.24 **3.18**	2.20 **3.10**	2.16 **3.01**	2.13 **2.96**	2.09 **2.89**	2.07 **2.86**	2.04 **2.80**	2.02 **2.77**	2.01 **2.75**	16
2.33 **3.35**	2.29 **3.27**	2.23 **3.16**	2.19 **3.08**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.08 **2.86**	2.04 **2.79**	2.02 **2.76**	1.99 **2.70**	1.97 **2.67**	1.96 **2.65**	17
2.29 **3.27**	2.25 **3.19**	2.19 **3.07**	2.15 **3.00**	2.11 **2.91**	2.07 **2.83**	2.04 **2.78**	2.00 **2.71**	1.98 **2.68**	1.95 **2.62**	1.93 **2.59**	1.92 **2.57**	18
2.26 **3.19**	2.21 **3.12**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.07 **2.84**	2.02 **2.76**	2.00 **2.70**	1.96 **2.63**	1.94 **2.60**	1.91 **2.54**	1.90 **2.51**	1.88 **2.49**	19
2.23 **3.13**	2.18 **3.05**	2.12 **2.94**	2.08 **2.86**	2.04 **2.77**	1.99 **2.69**	1.96 **2.63**	1.92 **2.56**	1.90 **2.53**	1.87 **2.47**	1.85 **2.44**	1.84 **2.42**	20
2.20 **3.07**	2.15 **2.99**	2.09 **2.88**	2.05 **2.80**	2.00 **2.72**	1.96 **2.63**	1.93 **2.58**	1.89 **2.51**	1.87 **2.47**	1.84 **2.42**	1.82 **2.38**	1.81 **2.36**	21
2.18 **3.02**	2.13 **2.94**	2.07 **2.83**	2.03 **2.75**	1.98 **2.67**	1.93 **2.58**	1.91 **2.53**	1.87 **2.46**	1.84 **2.42**	1.81 **2.37**	1.80 **2.33**	1.78 **2.31**	22
2.14 **2.97**	2.10 **2.89**	2.04 **2.78**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.91 **2.53**	1.88 **2.48**	1.84 **2.41**	1.82 **2.37**	1.79 **2.32**	1.77 **2.28**	1.76 **2.26**	23
2.13 **2.93**	2.09 **2.85**	2.02 **2.74**	1.98 **2.66**	1.94 **2.58**	1.89 **2.49**	1.86 **2.44**	1.82 **2.36**	1.80 **2.33**	1.76 **2.27**	1.74 **2.23**	1.73 **2.21**	24
2.11 **2.89**	2.06 **2.81**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.92 **2.54**	1.87 **2.45**	1.84 **2.40**	1.80 **2.32**	1.77 **2.29**	1.74 **2.23**	1.72 **2.19**	1.71 **2.17**	25
2.10 **2.86**	2.05 **2.77**	1.99 **2.66**	1.95 **2.58**	1.90 **2.50**	1.85 **2.41**	1.82 **2.36**	1.78 **2.28**	1.76 **2.25**	1.72 **2.19**	1.70 **2.15**	1.69 **2.13**	26

n_2 = degrees of freedom for denominator

* Reproduced, with the permission of author and publisher, from *Statistical Methods* 4th ed., by George W Snedecor, Iowa State College Press, 1946.

95th and 99th Percentile

95th Percentile in Light-Face Type,

n_1 = degrees of freedom

n_2 = degrees of freedom for denominator

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	4.21 **7.68**	3.35 **5.49**	2.96 **4.60**	2.73 **4.11**	2.57 **3.79**	2.46 **3.56**	2.37 **3.39**	2.30 **3.26**	2.25 **3.14**	2.20 **3.06**	2.16 **2.98**	2.13 **2.93**
28	4.20 **7.64**	3.34 **5.45**	2.95 **4.57**	2.71 **4.07**	2.56 **3.76**	2.44 **3.53**	2.36 **3.36**	2.29 **3.23**	2.24 **3.11**	2.19 **3.03**	2.15 **2.95**	2.12 **2.90**
29	4.18 **7.60**	3.33 **5.42**	2.93 **4.54**	2.70 **4.04**	2.54 **3.73**	2.43 **3.50**	2.35 **3.33**	2.28 **3.20**	2.22 **3.08**	2.18 **3.00**	2.14 **2.92**	2.10 **2.87**
30	4.17 **7.56**	3.32 **5.39**	2.92 **4.51**	2.69 **4.02**	2.53 **3.70**	2.42 **3.47**	2.34 **3.30**	2.27 **3.17**	2.21 **3.06**	2.16 **2.98**	2.12 **2.90**	2.09 **2.84**
32	4.15 **7.50**	3.30 **5.34**	2.90 **4.46**	2.67 **3.97**	2.51 **3.66**	2.40 **3.42**	2.32 **3.25**	2.25 **3.12**	2.19 **3.01**	2.14 **2.94**	2.10 **2.86**	2.07 **2.80**
34	4.13 **7.44**	3.28 **5.29**	2.88 **4.42**	2.65 **3.93**	2.49 **3.61**	2.38 **3.38**	2.30 **3.21**	2.23 **3.08**	2.17 **2.97**	2.12 **2.89**	2.08 **2.82**	2.05 **2.76**
36	4.11 **7.39**	3.26 **5.25**	2.86 **4.38**	2.63 **3.89**	2.48 **3.58**	2.36 **3.35**	2.28 **3.18**	2.21 **3.04**	2.15 **2.94**	2.10 **2.86**	2.06 **2.78**	2.03 **2.72**
38	4.10 **7.35**	3.25 **5.21**	2.85 **4.34**	2.62 **3.86**	2.46 **3.54**	2.35 **3.32**	2.26 **3.15**	2.19 **3.02**	2.14 **2.91**	2.09 **2.82**	2.05 **2.75**	2.02 **2.69**
40	4.08 **7.31**	3.23 **5.18**	2.84 **4.31**	2.61 **3.83**	2.45 **3.51**	2.34 **3.29**	2.25 **3.12**	2.18 **2.99**	2.12 **2.88**	2.07 **2.80**	2.04 **2.73**	2.00 **2.66**
42	4.07 **7.27**	3.22 **5.15**	2.83 **4.29**	2.59 **3.80**	2.44 **3.49**	2.32 **3.26**	2.24 **3.10**	2.17 **2.96**	2.11 **2.86**	2.06 **2.77**	2.02 **2.70**	1.99 **2.64**
44	4.06 **7.24**	3.21 **5.12**	2.82 **4.26**	2.58 **3.78**	2.43 **3.46**	2.31 **3.24**	2.23 **3.07**	2.16 **2.94**	2.10 **2.84**	2.05 **2.75**	2.01 **2.68**	1.98 **2.62**
46	4.05 **7.21**	3.20 **5.10**	2.81 **4.24**	2.57 **3.76**	2.42 **3.44**	2.30 **3.22**	2.22 **3.05**	2.14 **2.92**	2.09 **2.82**	2.04 **2.73**	2.00 **2.66**	1.97 **2.60**
48	4.04 **7.19**	3.19 **5.08**	2.80 **4.22**	2.56 **3.74**	2.41 **3.42**	2.30 **3.20**	2.21 **3.04**	2.14 **2.90**	2.08 **2.80**	2.03 **2.71**	1.99 **2.64**	1.96 **2.58**
50	4.03 **7.17**	3.18 **5.06**	2.79 **4.20**	2.56 **3.72**	2.40 **3.41**	2.29 **3.18**	2.20 **3.02**	2.13 **2.88**	2.07 **2.78**	2.02 **2.70**	1.98 **2.62**	1.95 **2.56**
55	4.02 **7.12**	3.17 **5.01**	2.78 **4.16**	2.54 **3.68**	2.38 **3.37**	2.27 **3.15**	2.18 **2.98**	2.11 **2.85**	2.05 **2.75**	2.00 **2.66**	1.97 **2.59**	1.93 **2.53**
60	4.00 **7.08**	3.15 **4.98**	2.76 **4.13**	2.52 **3.65**	2.37 **3.34**	2.25 **3.12**	2.17 **2.95**	2.10 **2.82**	2.04 **2.72**	1.99 **2.63**	1.95 **2.56**	1.92 **2.50**
65	3.99 **7.04**	3.14 **4.95**	2.75 **4.10**	2.51 **3.62**	2.36 **3.31**	2.24 **3.09**	2.15 **2.93**	2.08 **2.79**	2.02 **2.70**	1.98 **2.61**	1.94 **2.54**	1.90 **2.47**
70	3.98 **7.01**	3.13 **4.92**	2.74 **4.08**	2.50 **3.60**	2.35 **3.29**	2.23 **3.07**	2.14 **2.91**	2.07 **2.77**	2.01 **2.67**	1.97 **2.59**	1.93 **2.51**	1.89 **2.45**
80	3.96 **6.96**	3.11 **4.88**	2.72 **4.04**	2.48 **3.56**	2.33 **3.25**	2.21 **3.04**	2.12 **2.87**	2.05 **2.74**	1.99 **2.64**	1.95 **2.55**	1.91 **2.48**	1.88 **2.41**
100	3.94 **6.90**	3.09 **4.82**	2.70 **3.98**	2.46 **3.51**	2.30 **3.20**	2.19 **2.99**	2.10 **2.82**	2.03 **2.69**	1.97 **2.59**	1.92 **2.51**	1.88 **2.43**	1.85 **2.36**
125	3.92 **6.84**	3.07 **4.78**	2.68 **3.94**	2.44 **3.47**	2.29 **3.17**	2.17 **2.95**	2.08 **2.79**	2.01 **2.65**	1.95 **2.56**	1.90 **2.47**	1.86 **2.40**	1.83 **2.33**
150	3.91 **6.81**	3.06 **4.75**	2.67 **3.91**	2.43 **3.44**	2.27 **3.14**	2.16 **2.92**	2.07 **2.76**	2.00 **2.62**	1.94 **2.53**	1.89 **2.44**	1.85 **2.37**	1.82 **2.30**
200	3.89 **6.76**	3.04 **4.71**	2.65 **3.88**	2.41 **3.41**	2.26 **3.11**	2.14 **2.90**	2.05 **2.73**	1.98 **2.60**	1.92 **2.50**	1.87 **2.41**	1.83 **2.34**	1.80 **2.28**
400	3.86 **6.70**	3.02 **4.66**	2.62 **3.83**	2.39 **3.36**	2.23 **3.06**	2.12 **2.85**	2.03 **2.69**	1.96 **2.55**	1.90 **2.46**	1.85 **2.37**	1.81 **2.29**	1.78 **2.23**
1,000	3.85 **6.66**	3.00 **4.62**	2.61 **3.80**	2.38 **3.34**	2.22 **3.04**	2.10 **2.82**	2.02 **2.66**	1.95 **2.53**	1.89 **2.43**	1.84 **2.34**	1.80 **2.26**	1.76 **2.20**
∞	3.84 **6.64**	2.99 **4.60**	2.60 **3.78**	2.37 **3.32**	2.21 **3.02**	2.09 **2.80**	2.01 **2.64**	1.94 **2.51**	1.88 **2.41**	1.83 **2.32**	1.79 **2.24**	1.75 **2.18**

TABLE VII — *Continued*

Values of the F Distribution (*Continued*)

99th Percentile in Bold-Face Type

for numerator

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	n_2
2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67	27
2.83	**2.74**	**2.63**	**2.55**	**2.47**	**2.38**	**2.33**	**2.25**	**2.21**	**2.16**	**2.12**	**2.10**	
2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65	28
2.80	**2.71**	**2.60**	**2.52**	**2.44**	**2.35**	**2.30**	**2.22**	**2.18**	**2.13**	**2.09**	**2.06**	
2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64	29
2.77	**2.68**	**2.57**	**2.49**	**2.41**	**2.32**	**2.27**	**2.19**	**2.15**	**2.10**	**2.06**	**2.03**	
2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62	30
2.74	**2.66**	**2.55**	**2.47**	**2.38**	**2.29**	**2.24**	**2.16**	**2.13**	**2.07**	**2.03**	**2.01**	
2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59	32
2.70	**2.62**	**2.51**	**2.42**	**2.34**	**2.25**	**2.20**	**2.12**	**2.08**	**2.02**	**1.98**	**1.96**	
2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57	34
2.66	**2.58**	**2.47**	**2.38**	**2.30**	**2.21**	**2.15**	**2.08**	**2.04**	**1.98**	**1.94**	**1.91**	
1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55	36
2.62	**2.54**	**2.43**	**2.35**	**2.26**	**2.17**	**2.12**	**2.04**	**2.00**	**1.94**	**1.90**	**1.87**	
1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53	38
2.59	**2.51**	**2.40**	**2.32**	**2.22**	**2.14**	**2.08**	**2.00**	**1.97**	**1.90**	**1.86**	**1.84**	
1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51	40
2.56	**2.49**	**2.37**	**2.29**	**2.20**	**2.11**	**2.05**	**1.97**	**1.94**	**1.88**	**1.84**	**1.81**	
1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49	42
2.54	**2.46**	**2.35**	**2.26**	**2.17**	**2.08**	**2.02**	**1.94**	**1.91**	**1.85**	**1.80**	**1.78**	
1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48	44
2.52	**2.44**	**2.32**	**2.24**	**2.15**	**2.06**	**2.00**	**1.92**	**1.88**	**1.82**	**1.78**	**1.75**	
1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46	46
2.50	**2.42**	**2.30**	**2.22**	**2.13**	**2.04**	**1.98**	**1.90**	**1.86**	**1.80**	**1.76**	**1.72**	
1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45	48
2.48	**2.40**	**2.28**	**2.20**	**2.11**	**2.02**	**1.96**	**1.88**	**1.84**	**1.78**	**1.73**	**1.70**	
1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44	50
2.46	**2.39**	**2.26**	**2.18**	**2.10**	**2.00**	**1.94**	**1.86**	**1.82**	**1.76**	**1.71**	**1.68**	
1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41	55
2.43	**2.35**	**2.23**	**2.15**	**2.06**	**1.96**	**1.90**	**1.82**	**1.78**	**1.71**	**1.66**	**1.64**	
1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39	60
2.40	**2.32**	**2.20**	**2.12**	**2.03**	**1.93**	**1.87**	**1.79**	**1.74**	**1.68**	**1.63**	**1.60**	
1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37	65
2.37	**2.30**	**2.18**	**2.09**	**2.00**	**1.90**	**1.84**	**1.76**	**1.71**	**1.64**	**1.60**	**1.56**	
1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35	70
2.35	**2.28**	**2.15**	**2.07**	**1.98**	**1.88**	**1.82**	**1.74**	**1.69**	**1.62**	**1.56**	**1.53**	
1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32	80
2.32	**2.24**	**2.11**	**2.03**	**1.94**	**1.84**	**1.78**	**1.70**	**1.65**	**1.57**	**1.52**	**1.49**	
1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28	100
2.26	**2.19**	**2.06**	**1.98**	**1.89**	**1.79**	**1.73**	**1.64**	**1.59**	**1.51**	**1.46**	**1.43**	
1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25	125
2.23	**2.15**	**2.03**	**1.94**	**1.85**	**1.75**	**1.68**	**1.59**	**1.54**	**1.46**	**1.40**	**1.37**	
1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22	150
2.20	**2.12**	**2.00**	**1.91**	**1.83**	**1.72**	**1.66**	**1.56**	**1.51**	**1.43**	**1.37**	**1.33**	
1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19	200
2.17	**2.09**	**1.97**	**1.88**	**1.79**	**1.69**	**1.62**	**1.53**	**1.48**	**1.39**	**1.33**	**1.28**	
1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13	400
2.12	**2.04**	**1.92**	**1.84**	**1.74**	**1.64**	**1.57**	**1.47**	**1.42**	**1.32**	**1.24**	**1.19**	
1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08	1,000
2.09	**2.01**	**1.89**	**1.81**	**1.71**	**1.61**	**1.54**	**1.44**	**1.38**	**1.28**	**1.19**	**1.11**	
1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00	∞
2.07	**1.99**	**1.87**	**1.79**	**1.69**	**1.59**	**1.52**	**1.41**	**1.36**	**1.25**	**1.15**	**1.00**	

n_2 = degrees of freedom for denominator

First Six Powers of the Natural Numbers from 1 to 50

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	2
3	9	27	81	243	729	3
4	16	64	256	1 024	4 096	4
5	25	125	625	3 125	15 625	5
6	36	216	1 296	7 776	46 656	6
7	49	343	2 401	16 807	117 649	7
8	64	512	4 096	32 768	262 144	8
9	81	729	6 561	59 049	531 441	9
10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10
11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	11
12	144	1 728	20 736	248 832	2 985 984	12
13	169	2 197	28 561	371 293	4 826 809	13
14	196	2 744	38 416	537 824	7 529 536	14
15	225	3 375	50 625	759 375	11 390 625	15
16	256	4 096	65 536	1 048 576	16 777 216	16
17	289	4 913	83 521	1 419 857	24 137 569	17
18	324	5 832	104 976	1 889 568	34 012 224	18
19	361	6 859	130 321	2 476 099	47 045 881	19
20	400	8 000	160 000	3 200 000	64 000 000	20
21	441	9 261	194 481	4 084 101	85 766 121	21
22	484	10 648	234 256	5 153 632	113 379 904	22
23	529	12 167	279 841	6 436 343	148 035 889	23
24	576	13 824	331 776	7 962 624	191 102 976	24
25	625	15 625	390 625	9 765 625	244 140 625	25
26	676	17 576	456 976	11 881 376	308 915 776	26
27	729	19 683	531 441	14 348 907	387 420 489	27
28	784	21 952	614 656	17 210 368	481 890 304	28
29	841	24 389	707 281	20 511 149	594 823 321	29
30	900	27 000	810 000	24 300 000	729 000 000	30
31	961	29 791	923 521	28 629 151	887 503 681	31
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432	1 073 741 824	32
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393	1 291 467 969	33
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424	1 544 804 416	34
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875	1 838 265 625	35
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176	2 176 782 336	36
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957	2 565 726 409	37
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168	3 010 936 384	38
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199	3 518 743 761	39
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000	4 096 000 000	40
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201	4 750 104 241	41
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232	5 489 031 744	42
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443	6 321 363 049	43
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224	7 256 313 856	44
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125	8 303 765 625	45
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976	9 474 296 896	46
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007	10 779 215 329	47
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968	12 230 590 464	48
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249	13 841 287 201	49
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000	15 625 000 000	50

Sums of the First Six Powers of the Natural Numbers from 1 to 50

n	$\Sigma(n)$	$\Sigma(n^2)$	$\Sigma(n^3)$	$\Sigma(n^4)$	$\Sigma(n^5)$	$\Sigma(n^6)$
1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65
3	6	14	36	98	276	794
4	10	30	100	354	1 300	4 890
5	15	55	225	979	4 425	20 515
6	21	91	441	2 275	12 201	67 171
7	28	140	784	4 676	29 008	184 820
8	36	204	1 296	8 772	61 776	446 964
9	45	285	2 025	15 333	120 825	978 405
10	55	385	3 025	25 333	220 825	1 978 405
11	66	506	4 356	39 974	381 876	3 749 966
12	78	650	6 084	60 710	630 708	6 735 950
13	91	819	8 281	89 271	1 002 001	11 562 759
14	105	1 015	11 025	127 687	1 539 825	19 092 295
15	120	1 240	14 400	178 312	2 299 200	30 482 920
16	136	1 496	18 496	234 848	3 347 776	47 260 136
17	153	1 785	23 409	327 369	4 767 633	71 397 705
18	171	2 109	29 241	432 345	6 657 201	105 409 929
19	190	2 470	36 100	562 666	9 133 300	152 455 810
20	210	2 870	44 100	722 666	12 333 300	216 455 810
21	231	3 311	53 361	917 147	16 417 401	302 221 931
22	253	3 795	64 009	1 151 403	21 571 033	415 601 835
23	276	4 324	76 176	1 431 244	28 007 376	563 637 724
24	300	4 900	90 000	1 763 020	35 970 000	754 740 700
25	325	5 525	105 625	2 153 645	45 735 625	998 881 325
26	351	6 201	123 201	2 610 621	57 617 001	1 307 797 101
27	378	6 930	142 884	3 142 062	71 965 908	1 695 217 590
28	406	7 714	164 836	3 756 718	89 176 276	2 177 107 894
29	435	8 555	189 225	4 463 999	109 687 425	2 771 931 215
30	465	9 455	216 225	5 273 999	133 987 425	3 500 931 215
31	496	10 416	246 016	6 197 520	162 616 576	4 388 434 896
32	528	11 440	278 784	7 246 096	196 171 008	5 462 176 720
33	561	12 529	314 721	8 432 017	235 306 401	6 753 644 689
34	595	13 685	354 025	9 768 353	280 741 825	8 298 449 105
35	630	14 910	396 900	11 268 978	333 263 700	10 136 714 730
36	666	16 206	443 556	12 948 594	393 729 876	12 313 497 066
37	703	17 575	494 209	14 822 755	463 073 833	14 879 223 475
38	741	19 019	549 081	16 907 891	542 309 001	17 890 159 859
39	780	20 540	608 400	19 221 332	632 533 200	21 408 903 620
40	820	22 140	672 400	21 781 332	734 933 200	25 504 903 620
41	861	23 821	741 321	24 607 093	850 789 401	30 255 007 861
42	903	25 585	815 409	27 718 789	981 480 633	35 744 039 605
43	946	27 434	894 916	31 137 590	1 128 489 076	42 065 402 654
44	990	29 370	980 100	34 885 686	1 293 405 300	49 321 716 510
45	1 035	31 395	1 071 225	38 986 311	1 477 933 425	57 625 482 135
46	1 081	33 511	1 168 561	43 463 767	1 683 896 401	67 099 779 031
47	1 128	35 720	1 272 384	48 343 448	1 913 241 408	77 878 994 360
48	1 176	38 024	1 382 976	53 651 864	2 168 045 376	90 109 584 824
49	1 225	40 425	1 500 625	59 416 665	2 450 520 625	103 950 872 025
50	1 275	42 925	1 625 625	65 666 665	2 763 020 625	119 575 872 025

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
1	1	1.000 0000	1.000 000 000
2	4	1.414 2136	0.500 000 000
3	9	1.732 0508	.333 333 333
4	16	2.000 0000	.250 000 000
5	25	2.236 0680	.200 000 000
6	36	2.449 4897	.166 666 667
7	49	2.645 7513	.142 857 143
8	64	2.828 4271	.125 000 000
9	81	3.000 0000	.111 111 111
10	1 00	3.162 2777	.100 000 000
11	1 21	3.316 6248	.090 909 091
12	1 44	3.464 1016	.083 333 333
13	1 69	3.605 5513	.076 923 077
14	1 96	3.741 6574	.071 428 571
15	2 25	3.872 9833	.066 666 667
16	2 56	4.000 0000	.062 500 000
17	2 89	4.123 1056	.058 823 529
18	3 24	4.242 6407	.055 555 556
19	3 61	4.358 8989	.052 631 579
20	4 00	4.472 1360	.050 000 000
21	4 41	4.582 5757	.047 619 048
22	4 84	4.690 4158	.045 454 545
23	5 29	4.795 8315	.043 478 261
24	5 76	4.898 9795	.041 666 667
25	6 25	5.000 0000	.040 000 000
26	6 76	5.099 0195	.038 461 538
27	7 29	5.196 1524	.037 037 037
28	7 84	5.291 5026	.035 714 286
29	8 41	5.385 1648	.034 482 759
30	9 00	5.477 2256	.033 333 333
31	9 61	5.567 7644	.032 258 065
32	10 24	5.656 8542	.031 250 000
33	10 89	5.744 5626	.030 303 030
34	11 56	5.830 9519	.029 411 765
35	12 25	5.916 0798	.028 571 429
36	12 96	6.000 0000	.027 777 778
37	13 69	6.082 7625	.027 027 027
38	14 44	6.164 4140	.026 315 789
39	15 21	6.244 9980	.025 641 026
40	16 00	6.324 5553	.025 000 000
41	16 81	6.403 1242	.024 390 244
42	17 64	6.480 7407	.023 809 524
43	18 49	6.557 4385	.023 255 814
44	19 36	6.633 2496	.022 727 273
45	20 25	6.708 2039	.022 222 222
46	21 16	6.782 3300	.021 739 130
47	22 09	6.855 6546	.021 276 596
48	23 04	6.928 2032	.020 833 333
49	24 01	7.000 0000	.020 408 163
50	25 00	7.071 0678	.020 000 000

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
51	26 01	7.141 4284	.019 607 843
52	27 04	7.211 1026	.019 230 769
53	28 09	7.280 1099	.018 867 925
54	29 16	7.348 4692	.018 518 519
55	30 25	7.416 1985	.018 181 818
56	31 36	7.483 3148	.017 857 143
57	32 49	7.549 8344	.017 543 860
58	33 64	7.615 7731	.017 241 379
59	34 81	7.681 1457	.016 949 153
60	36 00	7.745 9667	016 666 667
61	37 21	7.810 2497	.016 393 443
62	38 44	7.874 0079	.016 129 032
63	39 69	7.937 2539	.015 873 016
64	40 96	8.000 0000	.015 625 000
65	42 25	8.062 2577	.015 384 615
66	43 56	8.124 0384	.015 151 515
67	44 89	8.185 3528	.014 925 373
68	46 24	8.246 2113	.014 705 882
69	47 61	8.306 6239	.014 492 754
70	49 00	8.366 6003	.014 285 714
71	50 41	8.426 1498	.014 084 507
72	51 84	8.485 2814	.013 888 889
73	53 29	8.544 0037	.013 698 630
74	54 76	8.602 3253	.013 513 514
75	56 25	8.660 2540	.013 333 333
76	57 76	8.717 7979	.013 157 895
77	59 29	8.774 9644	.012 987 013
78	60 84	8.831 7609	.012 820 513
79	62 41	8.888 1944	.012 658 228
80	64 00	8.944 2719	.012 500 000
81	65 61	9.000 0000	.012 345 679
82	67 24	9.055 3851	.012 195 122
83	68 89	9.110 4336	.012 048 193
84	70 56	9.165 1514	.011 904 762
85	72 25	9.219 5445	.011 764 706
86	73 96	9.273 6185	.011 627 907
87	75 69	9.327 3791	.011 494 253
88	77 44	9.380 8315	.011 363 636
89	79 21	9.433 9811	.011 235 955
90	81 00	9.486 8330	.011 111 111
91	82 81	9.539 3920	.010 989 011
92	84 64	9.591 6630	.010 869 565
93	86 49	9.643 6508	.010 752 688
94	88 36	9.695 3597	.010 638 298
95	90 25	9.746 7943	.010 526 316
96	92 16	9.797 9590	.010 416 667
97	94 09	9.848 8578	.010 309 278
98	96 04	9.899 4949	.010 204 082
99	98 01	9.949 8744	.010 101 010
100	1 00 00	10.000 0000	.010 000 000

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
101	1 02 01	10.049 8756	.009 900 990
102	1 04 04	10.099 5049	.009 803 922
103	1 06 09	10.148 8916	.009 708 738
104	1 08 16	10.198 0390	.009 615 385
105	1 10 25	10.246 9508	.009 523 810
106	1 12 36	10.295 6301	.009 433 962
107	1 14 49	10.344 0804	.009 345 794
108	1 16 64	10.392 3048	.009 259 259
109	1 18 81	10.440 3065	.009 174 312
110	1 21 00	10.488 0885	.009 090 909
111	1 23 21	10.535 6538	.009 009 009
112	1 25 44	10.583 0052	.008 928 571
113	1 27 69	10.630 1458	.008 849 558
114	1 29 96	10.677 0783	.008 771 930
115	1 32 25	10.723 8053	.008 695 652
116	1 34 56	10.770 3296	.008 620 690
117	1 36 89	10.816 6538	.008 547 009
118	1 39 24	10.862 7805	.008 474 576
119	1 41 61	10.908 7121	.008 403 361
120	1 44 00	10.954 4512	.008 333 333
121	1 46 41	11.000 0000	.008 264 463
122	1 48 84	11.045 3610	.008 196 721
123	1 51 29	11.090 5365	.008 130 081
124	1 53 76	11.135 5287	.008 064 516
125	1 56 25	11.180 3399	.008 000 000
126	1 58 76	11.224 9722	.007 936 508
127	1 61 29	11.269 4277	.007 874 016
128	1 63 84	11.313 7085	.007 812 500
129	1 66 41	11.357 8167	.007 751 938
130	1 69 00	11.401 7543	.007 692 308
131	1 71 61	11.445 5231	.007 633 588
132	1 74 24	11.489 1253	.007 575 758
133	1 76 89	11.532 5626	.007 518 797
134	1 79 56	11.575 8369	.007 462 687
135	1 82 25	11.618 9500	.007 407 407
136	1 84 96	11.661 9038	.007 352 941
137	1 87 69	11.704 6999	.007 299 270
138	1 90 44	11.747 3401	.007 246 377
139	1 93 21	11.789 8261	.007 194 245
140	1 96 00	11.832 1596	.007 142 857
141	1 98 81	11.874 3422	.007 092 199
142	2 01 64	11.916 3753	.007 042 254
143	2 04 49	11.958 2607	.006 993 007
144	2 07 36	12.000 0000	.006 944 444
145	2 10 25	12.041 5946	.006 896 552
146	2 13 16	12.083 0460	.006 849 315
147	2 16 09	12.124 3557	.006 802 721
148	2 19 04	12.165 5251	.006 756 757
149	2 22 01	12.206 5556	.006 711 409
150	2 25 00	12.247 4487	.006 666 667

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/3}$	$1/n$
151	2 28 01	12.288 2057	.006 622 517
152	2 31 04	12.328 8280	.006 578 947
153	2 34 09	12.369 3169	.006 535 948
154	2 37 16	12.409 6736	.006 493 506
155	2 40 25	12.449 8996	.006 451 613
156	2 43 36	12.489 9960	.006 410 256
157	2 46 49	12.529 9641	.006 369 427
158	2 49 64	12.569 8051	.006 329 114
159	2 52 81	12.609 5202	.006 289 308
160	2 56 00	12.649 1106	.006 250 000
161	2 59 21	12.688 5775	.006 211 180
162	2 62 44	12.727 9221	.006 172 840
163	2 65 69	12.767 1453	.006 134 969
164	2 68 96	12.806 2485	.006 097 561
165	2 72 25	12.845 2326	.006 060 606
166	2 75 56	12.884 0987	.006 024 096
167	2 78 89	12.922 8480	.005 988 024
168	2 82 24	12.961 4814	.005 952 381
169	2 85 61	13.000 0000	.005 917 160
170	2 89 00	13.038 4048	.005 882 353
171	2 92 41	13.076 6968	.005 847 953
172	2 95 84	13.114 8770	.005 813 953
173	2 99 29	13.152 9464	.005 780 347
174	3 02 76	13.190 9060	.005 747 126
175	3 06 25	13.228 7566	.005 714 286
176	3 09 76	13.266 4992	.005 681 818
177	3 13 29	13.304 1347	.005 649 718
178	3 16 84	13.341 6641	.005 617 978
179	3 20 41	13.379 0882	.005 586 592
180	3 24 00	13.416 4079	.005 555 556
181	3 27 61	13.453 6240	.005 524 862
182	3 31 24	13.490 7376	.005 494 505
183	3 34 89	13.527 7493	.005 464 481
184	3 38 56	13.564 6600	.005 434 783
185	3 42 25	13.601 4705	.005 405 405
186	3 45 96	13.638 1817	.005 376 344
187	3 49 69	13.674 7943	.005 347 594
188	3 53 44	13.711 3092	.005 319 149
189	3 57 21	13.747 7271	.005 291 005
190	3 61 00	13.784 0488	.005 263 158
191	3 64 81	13.820 2750	.005 235 602
192	3 68 64	13.856 4065	.005 208 333
193	3 72 49	13.892 4440	.005 181 347
194	3 76 36	13.928 3883	.005 154 639
195	3 80 25	13.964 2400	.005 128 205
196	3 84 16	14.000 0000	.005 102 041
197	3 88 09	14.035 6688	.005 076 142
198	3 92 04	14.071 2473	.005 050 505
199	3 96 01	14.106 7360	.005 025 126
200	4 00 00	14.142 1356	.005 000 000

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
201	4 04 01	14.177 4469	.004 975 124
202	4 08 04	14.212 6704	.004 950 495
203	4 12 09	14.247 8068	.004 926 108
204	4 16 16	14.282 8569	.004 901 961
205	4 20 25	14.317 8211	.004 878 049
206	4 24 36	14.352 7001	.004 854 369
207	4 28 49	14.387 4946	.004 830 918
208	4 32 64	14.422 2051	.004 807 692
209	4 36 81	14.456 8323	.004 784 689
210	4 41 00	14.491 3767	.004 761 905
211	4 45 21	14.525 8390	.004 739 336
212	4 49 44	14.560 2198	.004 716 981
213	4 53 69	14.594 5195	.004 694 836
214	4 57 96	14.628 7388	.004 672 897
215	4 62 25	14.662 8783	.004 651 163
216	4 66 56	14.696 9385	.004 629 630
217	4 70 89	14.730 9199	.004 608 295
218	4 75 24	14.764 8231	.004 587 156
219	4 79 61	14.798 6486	.004 566 210
220	4 84 00	14.832 3970	.004 545 455
221	4 88 41	14.866 0687	.004 524 887
222	4 92 84	14.899 6644	.004 504 505
223	4 97 29	14.933 1845	.004 484 305
224	5 01 76	14.966 6295	.004 464 286
225	5 06 25	15.000 0000	.004 444 444
226	5 10 76	15.033 2964	.004 424 779
227	5 15 29	15.066 5192	.004 405 286
228	5 19 84	15.099 6689	.004 385 965
229	5 24 41	15.132 7460	.004 366 812
230	5 29 00	15.165 7509	.004 347 826
231	5 33 61	15.198 6842	.004 329 004
232	5 38 24	15.231 5462	.004 310 345
233	5 42 89	15.264 3375	.004 291 845
234	5 47 56	15.297 0585	.004 273 504
235	5 52 25	15.329 7097	.004 255 319
236	5 56 96	15.362 2915	.004 237 288
237	5 61 69	15.394 8043	.004 219 409
238	5 66 44	15.427 2486	.004 201 681
239	5 71 21	15.459 6248	.004 184 100
240	5 76 00	15.491 9334	.004 166 667
241	5 80 81	15.524 1747	.004 149 378
242	5 85 64	15.556 3492	.004 132 231
243	5 90 49	15.588 4573	.004 115 226
244	5 95 36	15.620 4994	.004 098 361
245	6 00 25	15.652 4758	.004 081 633
246	6 05 16	15.684 3871	.004 065 041
247	6 10 09	15.716 2336	.004 048 583
248	6 15 04	15.748 0157	.004 032 258
249	6 20 01	15.779 7338	.004 016 064
250	6 25 00	15.811 3883	.004 000 000

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
251	6 30 01	15.842 9795	.003 984 064
252	6 35 04	15.874 5079	.003 968 254
253	6 40 09	15.905 9737	.003 952 569
254	6 45 16	15.937 3775	.003 937 008
255	6 50 25	15.968 7194	.003 921 569
256	6 55 36	16.000 0000	.003 906 250
257	6 60 49	16.031 2195	.003 891 051
258	6 65 64	16.062 3784	.003 875 969
259	6 70 81	16.093 4769	.003 861 004
260	6 76 00	16.124 5155	.003 846 154
261	6 81 21	16.155 4944	.003 831 418
262	6 86 44	16.186 4141	.003 816 794
263	6 91 69	16.217 2747	.003 802 281
264	6 96 96	16.248 0768	.003 787 879
265	7 02 25	16.278 8206	.003 773 585
266	7 07 56	16.309 5064	.003 759 398
267	7 12 89	16.340 1346	.003 745 318
268	7 18 24	16.370 7055	.003 731 343
269	7 23 61	16.401 2195	.003 717 472
270	7 29 00	16.431 6767	.003 703 704
271	7 34 41	16.462 0776	.003 690 037
272	7 39 84	16.492 4225	.003 676 471
273	7 45 29	16.522 7116	.003 663 004
274	7 50 76	16.552 9454	.003 649 635
275	7 56 25	16.583 1240	.003 636 364
276	7 61 76	16.613 2477	.003 623 188
277	7 67 29	16.643 3170	.003 610 108
278	7 72 84	16.673 3320	.003 597 122
279	7 78 41	16.703 2931	.003 584 229
280	7 84 00	16.733 2005	.003 571 429
281	7 89 61	16.763 0546	.003 558 719
282	7 95 24	16.792 8556	.003 546 099
283	8 00 89	16.822 6038	.003 533 569
284	8 06 56	16.852 2995	.003 521 127
285	8 12 25	16.881 9430	.003 508 772
286	8 17 96	16.911 5345	.003 496 503
287	8 23 69	16.941 0743	.003 484 321
288	8 29 44	16.970 5627	.003 472 222
289	8 35 21	17.000 0000	.003 460 208
290	8 41 00	17.029 3864	.003 448 276
291	8 46 81	17.058 7221	.003 436 426
292	8 52 64	17.088 0075	.003 424 658
293	8 58 49	17.117 2428	.003 412 969
294	8 64 36	17.146 4282	.003 401 361
295	8 70 25	17.175 5640	.003 389 831
296	8 76 16	17.204 6505	.003 378 378
297	8 82 09	17.233 6879	.003 367 003
298	8 88 04	17.262 6765	.003 355 705
299	8 94 01	17.291 6165	.003 344 482
300	9 00 00	17.320 5081	.003 333 333

APPENDIX TABLE X — Continued

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
301	9 06 01	17.349 3516	.003 322 259
302	9 12 04	17.378 1472	.003 311 258
303	9 18 09	17.406 8952	.003 300 330
304	9 24 16	17.435 5958	.003 289 474
305	9 30 25	17.464 2492	.003 278 689
306	9 36 36	17.492 8557	.003 267 974
307	9 42 49	17.521 4155	.003 257 329
308	9 48 64	17.549 9288	.003 246 753
309	9 54 81	17.578 3958	.003 236 246
310	9 61 00	17.606 8169	.003 225 806
311	9 67 21	17.635 1921	.003 215 434
312	9 73 44	17.663 5217	.003 205 128
313	9 79 69	17.691 8060	.003 194 888
314	9 85 96	17.720 0451	.003 184 713
315	9 92 25	17.748 2393	.003 174 603
316	9 98 56	17.776 3888	.003 164 557
317	10 04 89	17.804 4938	.003 154 574
318	10 11 24	17.832 5545	.003 144 654
319	10 17 61	17.860 5711	.003 134 796
320	10 24 00	17.888 5438	.003 125 000
321	10 30 41	17.916 4729	.003 115 265
322	10 36 84	17.944 3584	.003 105 590
323	10 43 29	17.972 2008	.003 095 975
324	10 49 76	18.000 0000	.003 086 420
325	10 56 25	18.027 7564	.003 076 923
326	10 62 76	18.055 4701	.003 067 485
327	10 69 29	18.083 1413	.003 058 104
328	10 75 84	18.110 7703	.003 048 780
329	10 82 41	18.138 3571	.003 039 514
330	10 89 00	18.165 9021	.003 030 303
331	10 95 61	18.193 4054	.003 021 148
332	11 02 24	18.220 8672	.003 012 048
333	11 08 89	18.248 2876	.003 003 003
334	11 15 56	18.275 6669	.002 994 012
335	11 22 25	18.303 0052	.002 985 075
336	11 28 96	18.330 3028	.002 976 190
337	11 35 69	18.357 5598	.002 967 359
338	11 42 44	18.384 7763	.002 958 580
339	11 49 21	18.411 9526	.002 949 853
340	11 56 00	18.439 0889	.002 941 176
341	11 62 81	18.466 1853	.002 932 551
342	11 69 64	18.493 2420	.002 923 977
343	11 76 49	18.520 2592	.002 915 452
344	11 83 36	18.547 2370	.002 906 977
345	11 90 25	18.574 1756	.002 898 551
346	11 97 16	18.601 0752	.002 890 173
347	12 04 09	18.627 9360	.002 881 844
348	12 11 04	18.654 7581	.002 873 563
349	12 18 01	18.681 5417	.002 865 330
350	12 25 00	18.708 2869	.002 857 143

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
351	12 32 01	18.734 9940	.002 849 003
352	12 39 04	18.761 6630	.002 840 909
353	12 46 09	18.788 2942	.002 832 861
354	12 53 16	18.814 8877	.002 824 859
355	12 60 25	18.841 4437	.002 816 901
356	12 67 36	18.867 9623	.002 808 989
357	12 74 49	18.894 4436	.002 801 120
358	12 81 64	18.920 8879	.002 793 296
359	12 88 81	18.947 2953	.002 785 515
360	12 96 00	18.973 6660	.002 777 778
361	13 03 21	19.000 0000	.002 770 083
362	13 10 44	19.026 2976	.002 762 431
363	13 17 69	19.052 5589	.002 754 821
364	13 24 96	19.078 7840	.002 747 253
365	13 32 25	19.104 9732	.002 739 726
366	13 39 56	19.131 1265	.002 732 240
367	13 46 89	19.157 2441	.002 724 796
368	13 54 24	19.183 3261	.002 717 391
369	13 61 61	19.209 3727	.002 710 027
370	13 69 00	19.235 3841	.002 702 703
371	13 76 41	19.261 3603	.002 695 418
372	13 83 84	19.287 3015	.002 688 172
373	13 91 29	19.313 2079	.002 680 965
374	13 98 76	19.339 0796	.002 673 797
375	14 06 25	19.364 9167	.002 666 667
376	14 13 76	19.390 7194	.002 659 574
377	14 21 29	19.416 4878	.002 652 520
378	14 28 84	19.442 2221	.002 645 503
379	14 36 41	19.467 9223	.002 638 522
380	14 44 00	19.493 5887	.002 631 579
381	14 51 61	19.519 2213	.002 624 672
382	14 59 24	19.544 8203	.002 617 801
383	14 66 89	19.570 3858	.002 610 966
384	14 74 56	19.595 9179	.002 604 167
385	14 82 25	19.621 4169	.002 597 403
386	14 89 96	19.646 8827	.002 590 674
387	14 97 69	19.672 3156	.002 583 979
388	15 05 44	19.697 7156	.002 577 320
389	15 13 21	19.723 0829	.002 570 694
390	15 21 00	19.748 4177	.002 564 103
391	15 28 81	19.773 7199	.002 557 545
392	15 36 64	19.798 9899	.002 551 020
393	15 44 49	19.824 2276	.002 544 529
394	15 52 36	19.849 4332	.002 538 071
395	15 60 25	19.874 6069	.002 531 646
396	15 68 16	19.899 7487	.002 525 253
397	15 76 09	19.924 8588	.002 518 892
398	15 84 04	19.949 9373	.002 512 563
399	15 92 01	19.974 9844	.002 506 266
400	16 00 00	20.000 0000	.002 500 000

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
401	16 08 01	20.024 9844	.002 493 766
402	16 16 04	20.049 9377	.002 487 562
403	16 24 09	20.074 8599	.002 481 390
404	16 32 16	20.099 7512	.002 475 248
405	16 40 25	20.124 6118	.002 469 136
406	16 48 36	20.149 4417	.002 463 054
407	16 56 49	20.174 2410	.002 457 002
408	16 64 64	20.199 0099	.002 450 980
409	16 72 81	20.223 7484	.002 444 988
410	16 81 00	20.248 4567	.002 439 024
411	16 89 21	20.273 1349	.002 433 090
412	16 97 44	20.297 7831	.002 427 184
413	17 05 69	20.322 4014	.002 421 308
414	17 13 96	20.346 9899	.002 415 459
415	17 22 25	20.371 5488	.002 409 639
416	17 30 56	20.396 0781	.002 403 846
417	17 38 89	20.420 5779	.002 398 082
418	17 47 24	20.445 0483	.002 392 344
419	17 55 61	20.469 4895	.002 386 635
420	17 64 00	20.493 9015	.002 380 952
421	17 72 41	20.518 2845	.002 375 297
422	17 80 84	20.542 6386	.002 369 668
423	17 89 29	20.566 9638	.002 364 066
424	17 97 76	20.591 2603	.002 358 491
425	18 06 25	20.615 5281	.002 352 941
426	18 14 76	20.639 7674	.002 347 418
427	18 23 29	20.663 9783	.002 341 920
428	18 31 84	20.688 1609	.002 336 449
429	18 40 41	20.712 3152	.002 331 002
430	18 49 00	20.736 4414	.002 325 581
431	18 57 61	20.760 5395	.002 320 186
432	18 66 24	20.784 6097	.002 314 815
433	18 74 89	20.808 6520	.002 309 469
434	18 83 56	20.832 6667	.002 304 147
435	18 92 25	20.856 6536	.002 298 851
436	19 00 96	20.880 6130	.002 293 578
437	19 09 69	20.904 5450	.002 288 330
438	19 18 44	20.928 4495	.002 283 105
439	19 27 21	20.952 3268	.002 277 904
440	19 36 00	20.976 1770	.002 272 727
441	19 44 81	21.000 0000	.002 267 574
442	19 53 64	21.023 7960	.002 262 443
443	19 62 49	21.047 5652	.002 257 336
444	19 71 36	21.071 3075	.002 252 252
445	19 80 25	21.095 0231	.002 247 191
446	19 89 16	21.118 7121	.002 242 152
447	19 98 09	21.142 3745	.002 237 136
448	20 07 04	21.166 0105	.002 232 143
449	20 16 01	21.189 6201	.002 227 171
450	20 25 00	21.213 2034	.002 222 222

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
451	20 34 01	21.236 7606	.002 217 295
452	20 43 04	21.260 2910	.002 212 389
453	20 52 09	21.283 7967	.002 207 506
454	20 61 16	21.307 2758	.002 202 643
455	20 70 25	21.330 7290	.002 197 802
456	20 79 36	21.354 1565	.002 192 982
457	20 88 49	21.377 5583	.002 188 184
458	20 97 64	21.400 9346	.002 183 406
459	21 06 81	21.424 2853	.002 178 649
460	21 16 00	21.447 6106	.002 173 913
461	21 25 21	21.470 9106	.002 169 197
462	21 34 44	21.494 1853	.002 164 502
463	21 43 69	21.517 4348	.002 159 827
464	21 52 96	21.540 6592	.002 155 172
465	21 62 25	21.563 8587	.002 150 538
466	21 71 56	21.587 0331	.002 145 923
467	21 80 89	21.610 1828	.002 141 328
468	21 90 24	21.633 3077	.002 136 752
469	21 99 61	21.656 4078	.002 132 196
470	22 09 00	21.679 4834	.002 127 660
471	22 18 41	21.702 5344	.002 123 142
472	22 27 84	21.725 5610	.002 118 644
473	22 37 29	21.748 5632	.002 114 165
474	22 46 76	21.771 5411	.002 109 705
475	22 56 25	21.794 4947	.002 105 263
476	22 65 76	21.817 4242	.002 100 840
477	22 75 29	21.840 3297	.002 096 436
478	22 84 84	21.863 2111	.002 092 050
479	22 94 41	21.886 0686	.002 087 683
480	23 04 00	21.908 9023	.002 083 333
481	23 13 61	21.931 7122	.002 079 002
482	23 23 24	21.954 4984	.002 074 689
483	23 32 89	21.977 2610	.002 070 393
484	23 42 56	22.000 0000	.002 066 116
485	23 52 25	22.022 7155	.002 061 856
486	23 61 96	22.045 4077	.002 057 613
487	23 71 69	22.068 0765	.002 053 388
488	23 81 44	22.090 7220	.002 049 180
489	23 91 21	22.113 3444	.002 044 990
490	24 01 00	22.135 9436	.002 040 816
491	24 10 81	22.158 5198	.002 036 660
492	24 20 64	22.181 0730	.002 032 520
493	24 30 49	22.203 6033	.002 028 398
494	24 40 36	22.226 1108	.002 024 291
495	24 50 25	22.248 5955	.002 020 202
496	24 60 16	22.271 0575	.002 016 129
497	24 70 09	22.293 4968	.002 012 072
498	24 80 04	22.315 9136	.002 008 032
499	24 90 01	22.338 3079	.002 004 008
500	25 00 00	22.360 6798	.002 000 000

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
501	25 10 01	22.383 0293	.001 996 008
502	25 20 04	22.405 3565	.001 992 032
503	25 30 09	22.427 6615	.001 988 072
504	25 40 16	22.449 9443	.001 984 127
505	25 50 25	22.472 2051	.001 980 198
506	25 60 36	22.494 4438	.001 976 285
507	25 70 49	22.516 6605	.001 972 387
508	25 80 64	22.538 8553	.001 968 504
509	25 90 81	22.561 0283	.001 964 637
510	26 01 00	22.583 1796	.001 960 784
511	26 11 21	22.605 3094	.001 956 947
512	26 21 44	22.627 4170	.001 953 125
513	26 31 69	22.649 5033	.001 949 318
514	26 41 96	22.671 5681	.001 945 525
515	26 52 25	22.693 6114	.001 941 748
516	26 62 56	22.715 6334	.001 937 984
517	26 72 89	22.737 6340	.001 934 236
518	26 83 24	22.759 6134	.001 930 502
519	26 93 61	22.781 5715	.001 926 782
520	27 04 00	22.803 5085	.001 923 077
521	27 14 41	22.825 4244	.001 919 386
522	27 24 84	22.847 3193	.001 915 709
523	27 35 29	22.869 1933	.001 912 046
524	27 45 76	22.891 0463	.001 908 397
525	27 56 25	22.912 8785	.001 904 762
526	27 66 76	22.934 6899	.001 901 141
527	27 77 29	22.956 4806	.001 897 533
528	27 87 84	22.978 2506	.001 893 939
529	27 98 41	23.000 0000	.001 890 359
530	28 09 00	23.021 7289	.001 886 792
531	28 19 61	23.043 4372	.001 883 239
532	28 30 24	23.065 1252	.001 879 699
533	28 40 89	23.086 7928	.001 876 173
534	28 51 56	23.108 4400	.001 872 659
535	28 62 25	23.130 0670	.001 869 159
536	28 72 96	23.151 6738	.001 865 672
537	28 83 69	23.173 2605	.001 862 197
538	28 94 44	23.194 8270	.001 858 736
539	29 05 21	23.216 3735	.001 855 288
540	29 16 00	23.237 9001	.001 851 852
541	29 26 81	23.259 4067	.001 848 429
542	29 37 64	23.280 8935	.001 845 018
543	29 48 49	23.302 3604	.001 841 621
544	29 59 36	23.323 8076	.001 838 235
545	29 70 25	23.345 2351	.001 834 862
546	29 81 16	23.366 6429	.001 831 502
547	29 92 09	23.388 0311	.001 828 154
548	30 03 04	23.409 3998	.001 824 818
549	30 14 01	23.430 7490	.001 821 494
550	30 25 00	23.452 0788	.001 818 182

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
551	30 36 01	23.473 3892	.001 814 882
552	30 47 04	23.494 6802	.001 811 594
553	30 58 09	23.515 9520	.001 808 318
554	30 69 16	23.537 2046	.001 805 054
555	30 80 25	23.558 4380	.001 801 802
556	30 91 36	23.579 6522	.001 798 561
557	31 02 49	23.600 8474	.001 795 332
558	31 13 64	23.622 0236	.001 792 115
559	31 24 81	23.643 1808	.001 788 909
560	31 36 00	23.664 3191	.001 785 714
561	31 47 21	23.685 4386	.001 782 531
562	31 58 44	23.706 5392	.001 779 359
563	31 69 69	23.727 6210	.001 776 199
564	31 80 96	23.748 6842	.001 773 050
565	31 92 25	23.769 7286	.001 769 912
566	32 03 56	23.790 7545	.001 766 784
567	32 14 89	23.811 7618	.001 763 668
568	32 26 24	23.832 7506	.001 760 563
569	32 37 61	23.853 7209	.001 757 469
570	32 49 00	23.874 6728	.001 754 386
571	32 60 41	23.895 6063	.001 751 313
572	32 71 84	23.916 0304	.001 748 252
573	32 83 29	23.937 4184	.001 745 201
574	32 94 76	23.958 2971	.001 742 160
575	33 06 25	23.979 1576	.001 739 130
576	33 17 76	24.000 0000	.001 736 111
577	33 29 29	24.020 8243	.001 733 102
578	33 40 84	24.041 6306	.001 730 104
579	33 52 41	24.062 4188	.001 727 116
580	33 64 00	24.083 1891	.001 724 138
581	33 75 61	24.103 9416	.001 721 170
582	33 87 24	24.124 6762	.001 718 213
583	33 98 89	24.145 3929	.001 715 266
584	34 10 56	24.166 0919	.001 712 329
585	34 22 25	24.186 7732	.001 709 402
586	34 33 96	24.207 4369	.001 706 485
587	34 45 69	24.228 0829	.001 703 578
588	34 57 44	24.248 7113	.001 700 680
589	34 69 21	24.269 3222	.001 697 793
590	34 81 00	24.289 9156	.001 694 915
591	34 92 81	24.310 4916	.001 692 047
592	35 04 64	24.331 0501	.001 689 189
593	35 16 49	24.351 5913	.001 686 341
594	35 28 36	24.372 1152	.001 683 502
595	35 40 25	24.392 6218	.001 680 672
596	35 52 16	24.413 1112	.001 677 852
597	35 64 09	24.433 5834	.001 675 042
598	35 76 04	24.454 0385	.001 672 241
599	35 88 01	24.474 4765	.001 669 449
600	36 00 00	24.494 8974	.001 666 667

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
601	36 12 01	24.515 3013	.001 663 894
602	36 24 04	24.535 6883	.001 661 130
603	36 36 09	24.556 0583	.001 658 375
604	36 48 16	24.576 4115	.001 655 629
605	36 60 25	24.596 7478	.001 652 893
606	36 72 36	24.617 0673	.001 650 165
607	36 84 49	24.637 3700	.001 647 446
608	36 96 64	24.657 6560	.001 644 737
609	37 08 81	24.677 9254	.001 642 036
610	37 21 00	24.698 1781	.001 639 344
611	37 33 21	24.718 4142	.001 636 661
612	37 45 44	24.738 6338	.001 633 987
613	37 57 69	24.758 8368	.001 631 321
614	37 69 96	24.779 0234	.001 628 664
615	37 82 25	24.799 1935	.001 626 016
616	37 94 56	24.819 3473	.001 623 377
617	38 06 89	24.839 4847	.001 620 746
618	38 19 24	24.859 6058	.001 618 123
619	38 31 61	24.879 7106	.001 615 509
620	38 44 00	24.899 7992	.001 612 903
621	38 56 41	24.919 8716	.001 610 306
622	38 68 84	24.939 9278	.001 607 717
623	38 81 29	24.959 9679	.001 605 136
624	38 93 76	24.979 9920	.001 602 564
625	39 06 25	25.000 0000	.001 600 000
626	39 18 76	25.019 9920	.001 597 444
627	39 31 29	25.039 9681	.001 594 896
628	39 43 84	25.059 9282	.001 592 357
629	39 56 41	25.079 8724	.001 589 825
630	39 69 00	25.099 8008	.001 587 302
631	39 81 61	25.119 7134	.001 584 786
632	39 94 24	25.139 6102	.001 582 278
633	40 06 89	25.159 4913	.001 579 779
634	40 19 56	25.179 3566	.001 577 287
635	40 32 25	25.199 2063	.001 574 803
636	40 44 96	25.219 0404	.001 572 327
637	40 57 69	25.238 8589	.001 569 859
638	40 70 44	25.258 6619	.001 567 398
639	40 83 21	25.278 4493	.001 564 945
640	40 96 00	25.298 2213	.001 562 500
641	41 08 81	25.317 9778	.001 560 062
642	41 21 64	25.337 7189	.001 557 632
643	41 34 49	25.357 4447	.001 555 210
644	41 47 36	25.377 1551	.001 552 795
645	41 60 25	25.396 8502	.001 550 388
646	41 73 16	25.416 5301	.001 547 988
647	41 86 09	25.436 1947	.001 545 595
648	41 99 04	25.455 8441	.001 543 210
649	42 12 01	25.475 4784	.001 540 832
650	42 25 00	25.495 0976	.001 538 462

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
651	42 38 01	25.514 7016	.001 536 098
652	42 51 04	25.534 2907	.001 533 742
653	42 64 09	25.553 8647	.001 531 394
654	42 77 16	25.573 4237	.001 529 052
655	42 90 25	25.592 9678	.001 526 718
656	43 03 36	25.612 4969	.001 524 390
657	43 16 49	25.632 0112	.001 522 070
658	43 29 64	25.651 5107	.001 519 757
659	43 42 81	25.670 9953	.001 517 451
660	43 56 00	25.690 4652	.001 515 152
661	43 69 21	25.709 9203	.001 512 859
662	43 82 44	25.729 3607	.001 510 574
663	43 95 69	25.748 7864	.001 508 296
664	44 08 96	25.768 1975	.001 506 024
665	44 22 25	25.787 5939	.001 503 759
666	44 35 56	25.806 9758	.001 501 502
667	44 48 89	25.826 3431	.001 499 250
668	44 62 24	25.845 6960	.001 497 006
669	44 75 61	25.865 0343	.001 494 768
670	44 89 00	25.884 3582	.001 492 537
671	45 02 41	25.903 6677	.001 490 313
672	45 15 84	25.922 9628	.001 488 095
673	45 29 29	25.942 2435	.001 485 884
674	45 42 76	25.961 5100	.001 483 680
675	45 56 25	25.980 7621	.001 481 481
676	45 69 76	26.000 0000	.001 479 290
677	45 83 29	26.019 2237	.001 477 105
678	45 96 84	26.038 4331	.001 474 926
679	46 10 41	26.057 6284	.001 472 754
680	46 24 00	26.076 8096	.001 470 588
681	46 37 61	26.095 9767	.001 468 429
682	46 51 24	26.115 1297	.001 466 276
683	46 64 89	26.134 2687	.001 464 129
684	46 78 56	26.153 3937	.001 461 988
685	46 92 25	26.172 5047	.001 459 854
686	47 05 96	26.191 6017	.001 457 726
687	47 19 69	26.210 6848	.001 455 604
688	47 33 44	26.229 7541	.001 453 488
689	47 47 21	26.248 8095	.001 451 379
690	47 61 00	26.267 8511	.001 449 275
691	47 74 81	26.286 8789	.001 447 178
692	47 88 64	26.305 8929	.001 445 087
693	48 02 49	26.324 8932	.001 443 001
694	48 16 36	26.343 8797	.001 440 922
695	48 30 25	26.362 8527	.001 438 849
696	48 44 16	26.381 8119	.001 436 782
697	48 58 09	26.400 7576	.001 434 720
698	48 72 04	26.419 6896	.001 432 665
699	48 86 01	26.438 6081	.001 430 615
700	49 00 00	26.457 5131	.001 428 571

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
701	49 14 01	26.476 4046	.001 426 534
702	49 28 04	26.495 2826	.001 424 501
703	49 42 09	26.514 1472	.001 422 475
704	49 56 16	26.532 9983	.001 420 455
705	49 70 25	26.551 8361	.001 418 440
706	49 84 36	26.570 6605	.001 416 431
707	49 98 49	26.589 4716	.001 414 427
708	50 12 64	26.608 2694	.001 412 429
709	50 26 81	26.627 0539	.001 410 437
710	50 41 00	26.645 8252	.001 408 451
711	50 55 21	26.664 5833	.001 406 470
712	50 69 44	26.683 3281	.001 404 494
713	50 83 69	26.702 0598	.001 402 525
714	50 97 96	26.720 7784	.001 400 560
715	51 12 25	26.739 4839	.001 398 601
716	51 26 56	26.758 1763	.001 396 648
717	51 40 89	26.776 8557	.001 394 700
718	51 55 24	26.795 5220	.001 392 758
719	51 69 61	26.814 1754	.001 390 821
720	51 84 00	26.832 8157	.001 388 889
721	51 98 41	26.851 4432	.001 386 963
722	52 12 84	26.870 0577	.001 385 042
723	52 27 29	26.888 6593	.001 383 126
724	52 41 76	26.907 2481	.001 381 215
725	52 56 25	26.925 8240	.001 379 310
726	52 70 76	26.944 3872	.001 377 410
727	52 85 29	26.962 9375	.001 375 516
728	52 99 84	26.981 4751	.001 373 626
729	53 14 41	27.000 0000	.001 371 742
730	53 29 00	27.018 5122	.001 369 863
731	53 43 61	27.037 0117	.001 367 989
732	53 58 24	27.055 4985	.001 366 120
733	53 72 89	27.073 9727	.001 364 256
734	53 87 56	27.092 4344	.001 362 398
735	54 02 25	27.110 8834	.001 360 544
736	54 16 96	27.129 3199	.001 358 696
737	54 31 69	27.147 7439	.001 356 852
738	54 46 44	27.166 1554	.001 355 014
739	54 61 21	27.184 5544	.001 353 180
740	54 76 00	27.202 9410	.001 351 351
741	54 90 81	27.221 3152	.001 349 528
742	55 05 64	27.239 6769	.001 347 709
743	55 20 49	27.258 0263	.001 345 895
744	55 35 36	27.276 3634	.001 344 086
745	55 50 25	27.294 6881	.001 342 282
746	55 65 16	27.313 0006	.001 340 483
747	55 80 09	27.331 3007	.001 338 688
748	55 95 04	27.349 5887	.001 336 898
749	56 10 01	27.367 8644	.001 335 113
750	56 25 00	27.386 1279	.001 333 333

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
751	56 40 01	27.404 3792	.001 331 558
752	56 55 04	27.422 6184	.001 329 787
753	56 70 09	27.440 8455	.001 328 021
754	56 85 16	27.459 0604	.001 326 260
755	57 00 25	27.477 2633	.001 324 503
756	57 15 36	27.495 4542	.001 322 751
757	57 30 49	27.513 6330	.001 321 004
758	57 45 64	27.531 7998	.001 319 261
759	57 60 81	27.549 9546	.001 317 523
760	57 76 00	27.568 0975	.001 315 789
761	57 91 21	27.586 2284	.001 314 060
762	58 06 44	27.604 3475	.001 312 336
763	58 21 69	27.622 4546	.001 310 616
764	58 36 96	27.640 5499	.001 308 901
765	58 52 25	27.658 6334	.001 307 190
766	58 67 56	27.676 7050	.001 305 483
767	58 82 89	27.694 7648	.001 303 781
768	58 98 24	27.712 8129	.001 302 083
769	59 13 61	27.730 8492	.001 300 390
770	59 29 00	27.748 8739	.001 298 701
771	59 44 41	27.766 8868	.001 297 017
772	59 59 84	27.784 8880	.001 295 337
773	59 75 29	27.802 8775	.001 293 661
774	59 90 76	27.820 8555	.001 291 990
775	60 06 25	27.838 8218	.001 290 323
776	60 21 76	27.856 7766	.001 288 660
777	60 37 29	27.874 7197	.001 287 001
778	60 52 84	27.892 6514	.001 285 347
779	60 68 41	27.910 5715	.001 283 697
780	60 84 00	27.928 4801	.001 282 051
781	60 99 61	27.946 3772	.001 280 410
782	61 15 24	27.964 2629	.001 278 772
783	61 30 89	27.982 1372	.001 277 139
784	61 46 56	28.000 0000	.001 275 510
785	61 62 25	28.017 8515	.001 273 885
786	61 77 96	28.035 6915	.001 272 265
787	61 93 69	28.053 5203	.001 270 648
788	62 09 44	28.071 3377	.001 269 036
789	62 25 21	28.089 1438	.001 267 427
790	62 41 00	28.106 9386	.001 265 823
791	62 56 81	28.124 7222	.001 264 223
792	62 72 64	28.142 4946	.001 262 626
793	62 88 49	28.160 2557	.001 261 034
794	63 04 36	28.178 0056	.001 259 446
795	63 20 25	28.195 7444	.001 257 862
796	63 36 16	28.213 4720	.001 256 281
797	63 52 09	28.231 1884	.001 254 705
798	63 68 04	28.248 8938	.001 253 133
799	63 84 01	28.266 5881	.001 251 564
800	64 00 00	28.284 2712	.001 250 000

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
801	64 16 01	28.301 9434	.001 248 439
802	64 32 04	28.319 6045	.001 246 883
803	64 48 09	28.337 2546	.001 245 330
804	64 64 16	28.354 8938	.001 243 781
805	64 80 25	28.372 5219	.001 242 236
806	64 96 36	28.390 1391	.001 240 695
807	65 12 49	28.407 7454	.001 239 157
808	65 28 64	28.425 3408	.001 237 624
809	65 44 81	28.442 9253	.001 236 094
810	65 61 00	28.460 4989	.001 234 568
811	65 77 21	28.478 0617	.001 233 046
812	65 93 44	28.495 6137	.001 231 527
813	66 09 69	28.513 1549	.001 230 012
814	66 25 96	28.530 6852	.001 228 501
815	66 42 25	28.548 2048	.001 226 994
816	66 58 56	28.565 7137	.001 225 490
817	66 74 89	28.583 2119	.001 223 990
818	66 91 24	28.600 6993	.001 222 494
819	67 07 61	28.618 1760	.001 221 001
820	67 24 00	28.635 6421	.001 219 512
821	67 40 41	28.653 0976	.001 218 027
822	67 56 84	28.670 5424	.001 216 545
823	67 73 29	28.687 9766	.001 215 067
824	67 89 76	28.705 4002	.001 213 592
825	68 06 25	28.722 8132	.001 212 121
826	68 22 76	28.740 2157	.001 210 654
827	68 39 29	28.757 6077	.001 209 190
828	68 55 84	28.774 9891	.001 207 729
829	68 72 41	28.792 3601	.001 206 273
830	68 89 00	28.809 7206	.001 204 819
831	69 05 61	28.827 0706	.001 203 369
832	69 22 24	28.844 4102	.001 201 923
833	69 38 89	28.861 7394	.001 200 480
834	69 55 56	28.879 0582	.001 199 041
835	69 72 25	28.896 3666	.001 197 605
836	69 88 96	28.913 6646	.001 196 172
837	70 05 69	28.930 9523	.001 194 743
838	70 22 44	28.948 2297	.001 193 317
839	70 39 21	28.965 4967	.001 191 895
840	70 56 00	28.982 7535	.001 190 476
841	70 72 81	29.000 0000	.001 189 061
842	70 89 64	29.017 2363	.001 187 648
843	71 06 49	29.034 4623	.001 186 240
844	71 23 36	29.051 6781	.001 184 834
845	71 40 25	29.068 8837	.001 183 432
846	71 57 16	29.086 0791	.001 182 033
847	71 74 09	29.103 2644	.001 180 638
848	71 91 04	29.120 4396	.001 179 245
849	72 08 01	29.137 6046	.001 177 856
850	72 25 00	29.154 7595	.001 176 471

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
851	72 42 01	29.171 9043	.001 175 088
852	72 59 04	29.189 0390	.001 173 709
853	72 76 09	29.206 1637	.001 172 333
854	72 93 16	29.223 2784	.001 170 960
855	73 10 25	29.240 3830	.001 169 591
856	73 27 36	29.257 4777	.001 168 224
857	73 44 49	29.274 5623	.001 166 861
858	73 61 64	29.291 6370	.001 165 501
859	73 78 81	29.308 7018	.001 164 144
860	73 96 00	29.325 7566	.001 162 791
861	74 13 21	29.342 8015	.001 161 440
862	74 30 44	29.359 8365	.001 160 093
863	74 47 69	29.376 8616	.001 158 749
864	74 64 96	29.393 8769	.001 157 407
865	74 82 25	29.410 8823	.001 156 069
866	74 99 56	29.427 8779	.001 154 734
867	75 16 89	29.444 8637	.001 153 403
868	75 34 24	29.461 8397	.001 152 074
869	75 51 61	29.478 8059	.001 150 748
870	75 69 00	29.495 7624	.001 149 425
871	75 86 41	29.512 7091	.001 148 106
872	76 03 84	29.529 6461	.001 146 789
873	76 21 29	29.546 5734	.001 145 475
874	76 38 76	29.563 4910	.001 144 165
875	76 56 25	29.580 3989	.001 142 857
876	76 73 76	29.597 2972	.001 141 553
877	76 91 29	29.614 1858	.001 140 251
878	77 08 84	29.631 0648	.001 138 952
879	77 26 41	29.647 9342	.001 137 656
880	77 44 00	29.664 7939	.001 136 364
881	77 61 61	29.681 6442	.001 135 074
882	77 79 24	29.698 4848	.001 133 787
883	77 96 89	29.715 3159	.001 132 503
884	78 14 56	29.732 1375	.001 131 222
885	78 32 25	29.748 9496	.001 129 944
886	78 49 96	29.765 7521	.001 128 668
887	78 67 69	29.782 5452	.001 127 396
888	78 85 44	29.799 3289	.001 126 126
889	79 03 21	29.816 1030	.001 124 859
890	79 21 00	29.832 8678	.001 123 596
891	79 38 81	29.849 6231	.001 122 334
892	79 56 64	29.866 3690	.001 121 076
893	79 74 49	29.883 1056	.001 119 821
894	79 92 36	29.899 8328	.001 118 568
895	80 10 25	29.916 5506	.001 117 318
896	80 28 16	29.932 2591	.001 116 071
897	80 46 09	29.949 9583	.001 114 827
898	80 64 04	29.966 6481	.001 113 586
899	80 82 01	29.983 3287	.001 112 347
900	81 00 00	30.000 0000	.001 111 111

APPENDIX TABLE X — *Continued*

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
901	81 18 01	30.016 6620	.001 109 878
902	81 36 04	30.033 3148	.001 108 647
903	81 54 09	30.049 9584	.001 107 420
904	81 72 16	30.066 5928	.001 106 195
905	81 90 25	30.083 2179	.001 104 972
906	82 08 36	30.099 8339	.001 103 753
907	82 26 49	30.116 4407	.001 102 536
908	82 44 64	30.133 0383	.001 101 322
909	82 62 81	30.149 6269	.001 100 110
910	82 81 00	30.166 2063	.001 098 901
911	82 99 21	30.182 7765	.001 097 695
912	83 17 44	30.199 3377	.001 096 491
913	83 35 69	30.215 8899	.001 095 290
914	83 53 96	30.232 4329	.001 094 092
915	83 72 25	30.248 9669	.001 092 896
916	83 90 56	30.265 4919	.001 091 703
917	84 08 89	30.282 0079	.001 090 513
918	84 27 24	30.298 5148	.001 089 325
919	84 45 61	30.315 0128	.001 088 139
920	84 64 00	30.331 5018	.001 086 957
921	84 82 41	30.347 9818	.001 085 776
922	85 00 84	30.364 4529	.001 084 599
923	85 19 29	30.380 9151	.001 083 424
924	85 37 76	30.397 3683	.001 082 251
925	85 56 25	30.413 8127	.001 081 081
926	85 74 76	30.430 2481	.001 079 914
927	85 93 29	30.446 6747	.001 078 749
928	86 11 84	30.463 0924	.001 077 586
929	86 30 41	30.479 5013	.001 076 426
930	86 49 00	30.495 9014	.001 075 269
931	86 67 61	30.512 2926	.001 074 114
932	86 86 24	30.528 6750	.001 072 961
933	87 04 89	30.545 0487	.001 071 811
934	87 23 56	30.561 4136	.001 070 664
935	87 42 25	30.577 7697	.001 069 519
936	87 60 96	30.594 1171	.001 068 376
937	87 79 69	30.610 4557	.001 067 236
938	87 98 44	30.626 7857	.001 066 098
939	88 17 21	30.643 1069	.001 064 963
940	88 36 00	30.659 4194	.001 063 830
941	88 54 81	30.675 7233	.001 062 699
942	88 73 64	30.692 0185	.001 061 571
943	88 92 49	30.708 3051	.001 060 445
944	89 11 36	30.724 5830	.001 059 322
945	89 30 25	30.740 8523	.001 058 201
946	89 49 16	30.757 1130	.001 057 082
947	89 68 09	30.773 3651	.001 055 966
948	89 87 04	30.789 6086	.001 054 852
949	90 06 01	30.805 8436	.001 053 741
950	90 25 00	30.822 0700	.001 052 632

Squares, Square Roots, and Reciprocals of the Natural Numbers from 1 to 1,000

n	n^2	$n^{1/2}$	$1/n$
951	90 44 01	30.838 2879	.001 051 525
952	90 63 04	30.854 4972	.001 050 420
953	90 82 09	30.870 6981	.001 049 318
954	91 01 16	30.886 8904	.001 048 218
955	91 20 25	30.903 0743	.001 047 120
956	91 39 36	30.919 2497	.001 046 025
957	91 58 49	30.935 4166	.001 044 932
958	91 77 64	30.951 5751	.001 043 841
959	91 96 81	30.967 7251	.001 042 753
960	92 16 00	30.983 8668	.001 041 667
961	92 35 21	31.000 0000	.001 040 583
962	92 54 44	31.016 1248	.001 039 501
963	92 73 69	31.032 2413	.001 038 422
964	92 92 96	31.048 3494	.001 037 344
965	93 12 25	31.064 4491	.001 036 269
966	93 31 56	31.080 5405	.001 035 197
967	93 50 89	31.096 6236	.001 034 126
968	93 70 24	31.112 6984	.001 033 058
969	93 89 61	31.128 7648	.001 031 992
970	94 09 00	31.144 8230	.001 030 928
971	94 28 41	31.160 8729	.001 029 866
972	94 47 84	31.176 9145	.001 028 807
973	94 67 29	31.192 9479	.001 027 749
974	94 86 76	31.208 9731	.001 026 694
975	95 06 25	31.224 9900	.001 025 641
976	95 25 76	31.240 9987	.001 024 590
977	95 45 29	31.256 9992	.001 023 541
978	95 64 84	31.272 9915	.001 022 495
979	95 84 41	31.288 9757	.001 021 450
980	96 04 00	31.304 9517	.001 020 408
981	96 23 61	31.320 9195	.001 019 368
982	96 43 24	31.336 8792	.001 018 330
983	96 62 89	31.352 8308	.001 017 294
984	96 82 56	31.368 7743	.001 016 260
985	97 02 25	31.384 7097	.001 015 228
986	97 21 96	31.400 6369	.001 014 199
987	97 41 69	31.416 5561	.001 013 171
988	97 61 44	31.432 4673	.001 012 146
989	97 61 21	31.448 3704	.001 011 122
990	98 01 00	31.464 2654	.001 010 101
991	98 20 81	31.480 1525	.001 009 082
992	98 40 64	31.496 0315	.001 008 065
993	98 60 49	31.511 9025	.001 007 049
994	98 80 36	31.527 7655	.001 006 036
995	99 00 25	31.543 6206	.001 005 025
996	99 20 16	31.559 4677	.001 004 016
997	99 40 09	31.575 3068	.001 003 009
998	99 60 04	31.591 1380	.001 002 004
999	99 80 01	31.606 9613	.001 001 001
1000	1 00 00 00	31.622 7766	.001 000 000

APPENDIX TABLE XI*

Random Numbers

Line	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	78994	36244	02673	25475	84953	61793	50243	63423
2	04909	58485	70686	93930	34880	73059	06823	80257
3	46582	73570	33004	51795	86477	46736	60460	70345
4	29242	89792	88634	60285	07190	07795	27011	85941
5	68104	81339	97090	20601	78940	20228	22803	96070
6	17156	02182	82504	19880	93747	80910	78260	25136
7	50711	94789	07171	02103	99057	98775	37997	18325
8	39449	52409	75095	77720	39729	03205	09313	43545
9	75629	82729	76916	72657	58992	32756	01154	84890
10	01020	55151	36132	51971	32155	60735	64867	35424
11	08337	89989	24260	08618	66798	25889	52860	57375
12	76829	47229	19706	30094	69430	92399	98749	22081
13	39708	30641	21267	56501	95182	72442	21445	17276
14	89836	55817	56747	75195	06818	83043	47403	58266
15	25903	61370	66081	54076	67442	52964	23823	02718
16	71345	03422	01015	68025	19703	77313	04555	83425
17	61454	92263	14647	08473	34124	10740	40839	05620
18	80376	08909	30470	40200	46558	61742	11643	92121
19	45144	54373	05505	90074	24783	86299	20900	15144
20	12191	88527	58852	51175	11534	87218	04876	85584
21	62936	59120	73957	35969	21598	47287	39394	08778
22	31588	96798	43668	12611	01714	77266	55079	24690
23	20787	96048	84726	17512	39450	43618	30629	24356
24	45603	00745	84635	43079	52724	14262	05750	89373
25	31606	64782	34027	56734	09365	20008	93559	78384
26	10452	33074	76718	99556	16026	00013	78411	95107
27	37016	64633	67301	50949	91298	74968	73631	57397
28	66725	97865	25409	37498	00816	99262	14471	10232
29	07380	74438	82120	17890	40963	55757	13492	68294
30	71621	57688	58256	47702	74724	89419	08025	68519
31	03466	13263	23917	20417	11315	52805	33072	07723
32	12692	32931	97387	34822	53775	91674	76549	37635
33	52192	30941	44998	17833	94563	23062	95725	38463
34	56691	72529	66063	73570	86860	68125	40436	31303
35	74952	43041	58869	15677	78598	43520	97521	83248
36	18752	43693	32867	53017	22661	39610	03796	02622
37	61691	04944	43111	28325	82319	65589	66048	98498
38	49197	63948	38947	60207	70667	39843	60607	15328
39	19436	87291	71684	74859	76501	93456	95714	92518
40	39143	64893	14606	13543	09621	68301	69817	52140
41	82244	67549	76491	09761	74494	91307	64222	66592
42	55847	56155	42878	23708	97999	40131	52360	90390
43	94095	95970	07826	25991	37584	56966	68623	83454
44	11751	69469	25521	44097	07511	88976	30122	67542
45	69902	08995	27821	11758	64989	61902	32121	28165
46	21850	25352	25556	92161	23592	43294	10479	37879
47	75850	46992	25165	55906	62339	88958	91717	15756
48	29648	22086	42581	85677	20251	39641	65786	80689
49	82740	28443	42734	25518	82827	35825	90288	32911
50	36842	42092	52075	83926	42875	71500	69216	01350

* A portion of page 5 of *Table of 105,000 Random Decimal Digits* constructed by H. Burke Horton and R. Tynes Smith III, for the Bureau of Transport Economics and Statistics, Interstate Commerce Commission. Reproduced here with the permission of W. H. S. Stevens, Director of that Bureau.

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log
0	...	**20**	1.30 103	**40**	1.60 206	**60**	1.77 815	**80**	1.90 309
1	0.00 000	21	1.32 222	41	1.61 278	61	1.78 533	81	1.90 849
2	0.30 103	22	1.34 242	42	1.62 325	62	1.79 239	82	1.91 381
3	0.47 712	23	1.36 173	43	1.63 347	63	1.79 934	83	1.91 908
4	0.60 206	24	1.38 021	44	1.64 345	64	1.80 618	84	1.92 428
5	0.69 897	25	1.39 794	45	1.65 321	65	1.81 291	85	1.92 942
6	0.77 815	26	1.41 497	46	1.66 276	66	1.81 954	86	1.93 450
7	0.84 510	27	1.43 136	47	1.67 210	67	1.82 607	87	1.93 952
8	0.90 309	28	1.44 716	48	1.68 124	68	1.83 251	88	1.94 448
9	0.95 424	29	1.46 240	49	1.69 020	69	1.83 885	89	1.94 939
10	1.00 000	**30**	1.47 712	**50**	1.69 897	**70**	1.84 510	**90**	1.95 424
11	1.04 139	31	1.49 136	51	1.70 757	71	1.85 126	91	1.95 904
12	1.07 918	32	1.50 515	52	1.71 600	72	1.85 733	92	1.96 379
13	1.11 394	33	1.51 851	53	1.72 428	73	1.86 332	93	1.96 848
14	1.14 613	34	1.53 148	54	1.73 239	74	1.86 923	94	1.97 313
15	1.17 609	35	1.54 407	55	1.74 036	75	1.87 506	95	1.97 772
16	1.20 412	36	1.55 630	56	1.74 819	76	1.88 081	96	1.98 227
17	1.23 045	37	1.56 820	57	1.75 587	77	1.88 649	97	1.98 677
18	1.25 527	38	1.57 978	58	1.76 343	78	1.89 209	98	1.99 123
19	1.27 875	39	1.59 106	59	1.77 085	79	1.89 763	99	1.99 564
20	1.30 103	**40**	1.60 206	**60**	1.77 815	**80**	1.90 309	**100**	2.00 000

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	00 432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	00 860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	01 703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	02 531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	02 938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	03 743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	04 532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	04 922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	05 690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	06 446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	06 819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	07 555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	07 918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	08 636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	08 991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	09 691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	10 380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	10 721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	11 394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	11 727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	12 385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	12 710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	13 354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	13 672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	13 988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	14 613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	14 922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	15 534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	15 836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	16 435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	16 732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	17 319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	44	43	42
1	4.4	4.3	4.2
2	8.8	8.6	8.4
3	13.2	12.9	12.6
4	17.6	17.2	16.8
5	22.0	21.5	21.0
6	26.4	25.8	25.2
7	30.8	30.1	29.4
8	35.2	34.4	33.6
9	39.6	38.7	37.8

	41	40	39
1	4.1	4.0	3.9
2	8.2	8.0	7.8
3	12.3	12.0	11.7
4	16.4	16.0	15.6
5	20.5	20.0	19.5
6	24.6	24.0	23.4
7	28.7	28.0	27.3
8	32.8	32.0	31.2
9	36.9	36.0	35.1

	38	37	36
1	3.8	3.7	3.6
2	7.6	7.4	7.2
3	11.4	11.1	10.8
4	15.2	14.8	14.4
5	19.0	18.5	18.0
6	22.8	22.2	21.6
7	26.6	25.9	25.2
8	30.4	29.6	28.8
9	34.2	33.3	32.4

	35	34	33
1	3.5	3.4	3.3
2	7.0	6.8	6.6
3	10.5	10.2	9.9
4	14.0	13.6	13.2
5	17.5	17.0	16.5
6	21.0	20.4	19.8
7	24.5	23.8	23.1
8	28.0	27.2	26.4
9	31.5	30.6	29.7

	32	31	30
1	3.2	3.1	3.0
2	6.4	6.2	6.0
3	9.6	9.3	9.0
4	12.8	12.4	12.0
5	16.0	15.5	15.0
6	19.2	18.6	18.0
7	22.4	21.7	21.0
8	25.6	24.8	24.0
9	28.8	27.9	27.0

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	17 898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	18 469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	18 752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	19 312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	19 590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	19 866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	20 412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	20 683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	20 952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	21 484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	21 748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	22 272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	22 531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	22 789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	23 300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	23 553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	23 805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	24 304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	24 551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	24 797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	25 285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	25 527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	25 768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	26 245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	26 482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	26 717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	26 951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	27 416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	27 646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	27 875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	28 330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	28 556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	28 780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	29 226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	29 447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	29 667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	29 885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	29	28
1	2.9	2.8
2	5.8	5.6
3	8.7	8.4
4	11.6	11.2
5	14.5	14.0
6	17.4	16.8
7	20.3	19.6
8	23.2	22.4
9	26.1	25.2

	27	26
1	2.7	2.6
2	5.4	5.2
3	8.1	7.8
4	10.8	10.4
5	13.5	13.0
6	16.2	15.6
7	18.9	18.2
8	21.6	20.8
9	24.3	23.4

	25
1	2.5
2	5.0
3	7.5
4	10.0
5	12.5
6	15.0
7	17.5
8	20.0
9	22.5

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	30 320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	30 535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	30 750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	30 963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	31 387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	31 597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	31 806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	32 222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	32 428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	32 634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	32 838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	33 244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	33 445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	33 646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	33 846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220	34 242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	34 439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	34 635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	34 830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	35 218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	35 411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	35 603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	35 793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	35 984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	36 361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	36 549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	36 736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	36 922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	37 291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	37 475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	37 658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	37 840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	38 202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	38 382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	38 561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	38 739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	38 917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	39 270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	39 445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	39 620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	20
1	2.0
2	4.0
3	6.0
4	8.0
5	10.0
6	12.0
7	14.0
8	16.0
9	18.0

	19
1	1.9
2	3.8
3	5.7
4	7.6
5	9.5
6	11.4
7	13.3
8	15.2
9	17.1

	18
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2
5	9.0
6	10.8
7	12.6
8	14.4
9	16.2

	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	39 967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	40 312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	40 483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	40 654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	40 824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	40 993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259	41 330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260	41 497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	41 664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	41 830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	41 996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	42 325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	42 488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	42 651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	42 813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	42 975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	43 297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272	43 457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	43 616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	43 775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	43 933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	44 248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	44 404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	44 560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	44 716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	44 871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	45 179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	45 332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	45 484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	45 637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	45 788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	45 939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	46 240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	46 389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	46 538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	46 687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	46 835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	46 982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	47 276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298	47 422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299	47 567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	18
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2
5	9.0
6	10.8
7	12.6
8	14.4
9	16.2

	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3

	16
1	1.6
2	3.2
3	4.8
4	6.4
5	8.0
6	9.6
7	11.2
8	12.8
9	14.4

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	47 857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	48 144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	48 287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	48 430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	48 572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	48 714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	48 855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	48 996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	49 276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	49 415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	49 554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	49 693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	49 831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	49 969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	50 243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	50 379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	50 515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	50 651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	50 786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	50 920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325	51 188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	51 322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	51 455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	51 587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	51 720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	51 851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	51 983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	52 244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	52 375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	52 504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	52 634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	52 763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	52 892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340	53 148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
341	53 275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	53 403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	53 529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344	53 656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	53 782	794	807	820	832	845	857	870	882	895
346	53 908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	54 158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	54 283	295	307	320	332	345	357	370	382	394
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	15	14	13	12
1	1.5	1.4	1.3	1.2
2	3.0	2.8	2.6	2.4
3	4.5	4.2	3.9	3.6
4	6.0	5.6	5.2	4.8
5	7.5	7.0	6.5	6.0
6	9.0	8.4	7.8	7.2
7	10.5	9.8	9.1	8.4
8	12.0	11.2	10.4	9.6
9	13.5	12.6	11.7	10.8

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	54 531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	54 654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	54 777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	54 900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	55 145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	55 267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	55 388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	55 509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	55 630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	55 751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	55 871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	55 991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	56 229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	56 348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	56 467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	56 585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	56 703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	56 820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	56 937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	57 171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	57 287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	57 403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	57 519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	57 634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	57 749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	57 864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	57 978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	58 206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	58 320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	58 433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	58 546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	58 659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	58 771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	58 883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	58 995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	59 218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	59 329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	59 439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	59 550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	59 660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	59 770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	59 879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	59 988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	60 314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	60 423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	60 531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	60 638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	60 746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	60 853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	60 959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	61 172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	61 278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	61 384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	61 490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	61 595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	61 700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	61 805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	61 909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	62 118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	62 221	232	242	252	263	273	284	294	304	315
420	62 325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	62 428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	62 531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	62 634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
424	62 737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	62 839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	62 941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	63 144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	63 246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	63 347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	63 448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	63 548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	63 649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	63 749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	63 849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	63 949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	64 147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	64 246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	64 345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	64 444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	64 542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	64 640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	64 738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	64 836	846	856	865	875	885	895	904	914	924
446	64 933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	65 128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	65 225	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

Prop. Parts	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
	451	65 418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
	452	65 514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
	453	65 610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
	454	65 706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
	455	65 801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
	456	65 896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
10	457	65 992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
1 | 1.0	458	66 087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
2 | 2.0	459	66 181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
3 | 3.0	460	66 276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
4 | 4.0	461	66 370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
5 | 5.0	462	66 464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
6 | 6.0	463	66 558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
7 | 7.0	464	66 652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
8 | 8.0	465	66 745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
9 | 9.0	466	66 839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
	467	66 932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
	468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
	469	67 117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
	470	67 210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
	471	67 302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
9	472	67 394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
1 | 0.9	473	67 486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
2 | 1.8	474	67 578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
3 | 2.7	475	67 669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
4 | 3.6	476	67 761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
5 | 4.5	477	67 852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
6 | 5.4	478	67 943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
7 | 6.3	479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
8 | 7.2	480	68 124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
9 | 8.1	481	68 215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
	482	68 305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
	483	68 395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
	484	68 485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
	485	68 574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
8	486	68 664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
1 | 0.8	487	68 753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
2 | 1.6	488	68 842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
3 | 2.4	489	68 931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
4 | 3.2	490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
5 | 4.0	491	69 108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
6 | 4.8	492	69 197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
7 | 5.6	493	69 285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
8 | 6.4	494	69 373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
9 | 7.2	495	69 461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
	496	69 548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
	497	69 636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
	498	69 723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
	499	69 810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
	500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
Prop. Parts	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	69 984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	70 157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	70 243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	70 329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	70 415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	70 501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	70 586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	70 672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	70 757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	70 842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	70 927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	71 096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	71 181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	71 265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	71 349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	71 433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	71 517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	71 600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	71 684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	71 767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	71 850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	71 933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	72 099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	72 181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	72 263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	72 346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	72 428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	72 509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	72 591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	72 673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	72 754	762	770	779	787	979	803	811	819	827
535	72 835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	72 916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	72 997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	73 159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	73 239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	73 320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	73 400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	73 480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	73 560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	73 640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	73 719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	73 799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	73 878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	73 957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

Prop. Parts	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
	551	74 115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
	552	74 194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
	553	74 273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
	554	74 351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
	555	74 429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
	556	74 507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
	557	74 586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
	558	74 663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
	559	74 741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
	560	74 819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
	561	74 896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
8	562	74 974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
1 0.8	563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
2 1.6	564	75 128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
3 2.4	565	75 205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
4 3.2	566	75 282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
5 4.0	567	75 358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
6 4.8	568	75 435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
7 5.6	569	75 511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
8 6.4	570	75 587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
9 7.2	571	75 664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
	572	75 740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
	573	75 815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
	574	75 891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
	575	75 967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
	576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
	577	76 118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
	578	76 193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
	579	76 268	275	283	290	298	305	313	320	328	335
	580	76 343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
7	581	76 418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
1 0.7	582	76 492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
2 1.4	583	76 567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
3 2.1	584	76 641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
4 2.8	585	76 716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
5 3.5	586	76 790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
6 4.2	587	76 864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
7 4.9	588	76 938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004
8 5.6	589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
9 6.3	590	77 085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
	591	77 159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
	592	77 232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
	593	77 305	313	320	327	335	342	349	357	364	371
	594	77 379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
	595	77 452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
	596	77 525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
	597	77 597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
	598	77 670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
	599	77 743	750	757	764	772	779	786	793	801	808
	600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
Prop. Parts	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	77 887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	77 960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	78 104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	78 176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	78 247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	78 319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	78 390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	78 462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	78 533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	78 604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	78 675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	78 746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	78 817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	78 888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	78 958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	79 099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	79 169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620	79 239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	79 309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	79 379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	79 449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	79 518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	79 588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	79 657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
627	79 727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	79 796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	79 865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	79 934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	80 072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	80 140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	80 209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	80 277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	80 346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	80 414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	80 482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	80 550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640	80 618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	80 686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	80 754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
643	80 821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	80 889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	80 956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	81 090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	81 158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	81 224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	81 358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	81 425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	81 491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	81 558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	81 624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	81 690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	81 757	763	770	776	703	790	796	803	809	816
658	81 823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	81 889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	81 954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	82 086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	82 151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	82 217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	82 282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	82 347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	82 413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	82 478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	82 543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	82 607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	82 672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	82 737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	82 802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	82 866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	82 930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	82 995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	83 123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	83 187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	83 251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	83 315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	83 378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	83 442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	83 506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	83 569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	83 632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	83 696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	83 759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	83 822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	83 885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	83 948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	84 073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	84 136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	84 198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	84 261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	84 323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	84 386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	84 448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701	84 572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702	84 634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703	84 696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704	84 757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
705	84 819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706	84 880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707	84 942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709	85 065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	85 126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711	85 187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712	85 248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713	85 309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714	85 370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715	85 431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
716	85 491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717	85 552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718	85 612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719	85 673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	85 733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721	85 794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722	85 854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723	85 914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724	85 974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726	86 094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727	86 153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728	86 213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729	86 273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	86 332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731	86 392	398	404	410	415	421	427	433	439	445
732	86 451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733	86 510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734	86 570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735	86 629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736	86 688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737	86 747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738	86 806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739	86 864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
740	86 923	929	935	941	947	953	958	964	970	976
741	86 982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
743	87 099	105	111	116	122	128	134	140	146	151
744	87 157	163	169	175	181	186	192	198	204	210
745	87 216	221	227	233	239	245	251	256	262	268
746	87 274	280	286	291	297	303	309	315	320	326
747	87 332	338	344	349	355	361	367	373	379	384
748	87 390	396	402	408	413	419	425	431	437	442
749	87 448	454	460	466	471	477	483	489	495	500
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

Prop. Parts	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Prop. Parts	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
751	87 564	570	576	581	587	593	599	604	610	616
752	87 622	628	633	639	645	651	656	662	668	674
753	87 679	685	691	697	703	708	714	720	726	731
754	87 737	743	749	754	760	766	772	777	783	789
755	87 795	800	806	812	818	823	829	835	841	846
756	87 852	858	864	869	875	881	887	892	898	904
757	87 910	915	921	927	933	938	944	950	955	961
758	87 967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076
760	88 081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	88 138	144	150	156	161	167	173	178	184	190
762	88 195	201	207	213	218	224	230	235	241	247
763	88 252	258	264	270	275	281	287	292	298	304
764	88 309	315	321	326	332	338	343	349	355	360
765	88 366	372	377	383	389	395	400	406	412	417
766	88 423	429	434	440	446	451	457	463	468	474
767	88 480	485	491	497	502	508	513	519	525	530
768	88 536	542	547	553	559	564	570	576	581	587
769	88 593	598	604	610	615	621	627	632	638	643
770	88 649	655	660	666	672	677	683	689	694	700
771	88 705	711	717	722	728	734	739	745	750	756
772	88 762	767	773	779	784	790	795	801	807	812
773	88 818	824	829	835	840	846	852	857	863	868
774	88 874	880	885	891	897	902	908	913	919	925
775	88 930	936	941	947	953	958	964	969	975	981
776	88 986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092
778	89 098	104	109	115	120	126	131	137	143	148
779	89 154	159	165	170	176	182	187	193	198	204
780	89 209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
781	89 265	271	276	282	287	293	298	304	310	315
782	89 321	326	332	337	343	348	354	360	365	371
783	89 376	382	387	393	398	404	409	415	421	426
784	89 432	437	443	448	454	459	465	470	476	481
785	89 487	492	498	504	509	515	520	526	531	537
786	89 542	548	553	559	564	570	575	581	586	592
787	89 597	603	609	614	620	625	631	636	642	647
788	89 653	658	664	669	675	680	686	691	697	702
789	89 708	713	719	724	730	735	741	746	752	757
790	89 763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	89 818	823	829	834	840	845	851	856	862	867
792	89 873	878	883	889	894	900	905	911	916	922
793	89 927	933	938	944	949	955	960	966	971	977
794	89 982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	90 091	097	102	108	113	119	124	129	135	140
797	90 146	151	157	162	168	173	179	184	189	195
798	90 200	206	211	217	222	227	233	238	244	249
799	90 255	260	266	271	276	282	287	293	298	304
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358

Prop. Parts	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
801	90 363	369	374	380	385	390	396	401	407	412
802	90 417	423	428	434	439	445	450	455	461	466
803	90 472	477	482	488	493	499	504	509	515	520
804	90 526	531	536	542	547	553	558	563	569	574
805	90 580	585	590	596	601	607	612	617	623	628
806	90 634	639	644	650	655	660	666	671	677	682
807	90 687	693	698	703	709	714	720	725	730	736
808	90 741	747	752	757	763	768	773	779	784	789
809	90 795	800	806	811	816	822	827	832	838	843
810	90 849	854	859	865	870	875	881	886	891	897
811	90 902	907	913	918	924	929	934	940	945	950
812	90 956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057
814	91 062	068	073	078	084	089	094	100	105	110
815	91 116	121	126	132	137	142	148	153	158	164
816	91 169	174	180	185	190	196	201	206	212	217
817	91 222	228	233	238	243	249	254	259	265	270
818	91 275	281	286	291	297	302	307	312	318	323
819	91 328	334	339	344	350	355	360	365	371	376
820	91 381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
821	91 434	440	445	450	455	461	466	471	477	482
822	91 487	492	498	503	508	514	519	524	529	535
823	91 540	545	551	556	561	566	572	577	582	587
824	91 593	598	603	609	614	619	624	630	635	640
825	91 645	651	656	661	666	672	677	682	687	693
826	91 698	703	709	714	719	724	730	735	740	745
827	91 751	756	761	766	772	777	782	787	793	798
828	91 803	808	814	819	824	829	834	840	845	850
829	91 855	861	866	871	876	882	887	892	897	903
830	91 908	913	918	924	929	934	939	944	950	955
831	91 960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059
833	92 065	070	075	080	085	091	096	101	106	111
834	92 117	122	127	132	137	143	148	153	158	163
835	92 169	174	179	184	189	195	200	205	210	215
836	92 221	226	231	236	241	247	252	257	262	267
837	92 273	278	283	288	293	298	304	309	314	319
838	92 324	330	335	340	345	350	355	361	366	371
839	92 376	381	387	392	397	402	407	412	418	423
840	92 428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
841	92 480	485	490	495	500	505	511	516	521	526
842	92 531	536	542	547	552	557	562	567	572	578
843	92 583	588	593	598	603	609	614	619	624	629
844	92 634	639	645	650	655	660	665	670	675	681
845	92 686	691	696	701	706	711	716	722	727	732
846	92 737	742	747	752	758	763	768	773	778	783
847	92 788	793	799	804	809	814	819	824	829	834
848	92 840	845	850	855	860	865	870	875	881	886
849	92 891	896	901	906	911	916	921	927	932	937
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Prop. Parts

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Prop. Parts

APPENDIX TABLE XII — *Continued*

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
851	92 993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090
853	93 095	100	105	110	115	120	125	131	136	141
854	93 146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
855	93 197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
856	93 247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
857	93 298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
858	93 349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
859	93 399	404	409	414	420	425	430	435	440	445
860	93 450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	93 500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	93 551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	93 601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	93 651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	93 702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	93 752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	93 802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	93 852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	93 902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	93 952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	94 052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	94 101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	94 151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	94 201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	94 250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	94 300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	94 349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	94 399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	94 448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	94 498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	94 547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	94 596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	94 645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	94 694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	94 743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	94 792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	94 841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	94 890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	94 939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	94 988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	95 085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	95 134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	95 182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	95 231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	95 279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	95 328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	95 376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Prop. Parts

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	95 472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
902	95 521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	95 569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	95 617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	95 665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	95 713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	95 761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	95 809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	95 856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	95 904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	95 952	957	961	966	971	976	980	985	990	995
912	95 999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	96 095	099	104	109	114	118	123	128	133	137
915	96 142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	96 190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	96 237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	96 284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	96 332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	96 379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	96 426	431	435	440	445	450	[illegible]	459	464	468
922	96 473	478	483	487	492	497	[illegible]	506	511	515
923	96 520	525	530	534	539	544	[illegible]	553	558	562
924	96 567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	96 614	619	624	628	633	638	642	647	[illegible]	656
926	96 661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	96 708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	96 755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	96 802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	96 848	853	858	862	867	872	[illegible]	881	886	890
931	96 895	900	904	909	914	918	[illegible]	928	932	937
932	96 942	946	951	956	960	[illegible]	[illegible]	974	979	984
933	96 988	993	997	*002	*007	[illegible]	[illegible]	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	[illegible]	[illegible]	067	072	077
935	97 081	086	090	095	100	[illegible]	[illegible]	114	118	123
936	97 128	132	137	142	146	[illegible]	[illegible]	160	165	169
937	97 174	179	183	188	[illegible]	[illegible]	[illegible]	206	211	216
938	97 220	225	230	234	239	[illegible]	[illegible]	253	257	262
939	97 267	271	276	280	285	[illegible]	[illegible]	299	304	308
940	97 313	317	322	327	331	[illegible]	340	345	350	354
941	97 359	364	368	373	377	[illegible]	[illegible]	391	396	400
942	97 405	410	414	419	424	[illegible]	[illegible]	437	442	447
943	97 451	456	460	465	470	[illegible]	[illegible]	483	488	493
944	97 497	502	506	511	516	[illegible]	[illegible]	529	534	539
945	97 543	548	552	557	562	[illegible]	[illegible]	575	580	585
946	97 589	594	598	603	607	612	[illegible]	621	626	630
947	97 635	640	644	649	653	658	[illegible]	667	672	676
948	97 681	685	690	695	699	704	[illegible]	713	717	722
949	97 727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Common Logarithms (Five-Place) of the Natural Numbers 1 to 10,000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	97 818	823	827	832	836	841	845	850	855	859
952	97 864	868	873	877	882	886	891	896	900	905
953	97 909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	97 955	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041
956	98 046	050	055	059	064	068	073	078	082	087
957	98 091	096	100	105	109	114	118	123	127	132
958	98 137	141	146	150	155	159	164	168	173	177
959	98 182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	98 227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
961	98 272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
962	98 318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
963	98 363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	98 408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
965	98 453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	98 498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
967	98 543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	98 588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	98 632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970	98 677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	98 722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	98 767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	98 811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
974	98 856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
975	98 900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
976	98 945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	98 989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
979	99 078	083	087	092	096	100	105	109	114	118
980	99 123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
981	99 167	171	176	180	185	189	193	198	202	207
982	99 211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	99 255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	99 300	304	308	313	317	322	326	330	335	339
985	99 344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	99 388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	99 432	436	441	445	449	454	458	463	467	471
988	99 476	480	484	489	493	498	502	506	511	515
989	99 520	524	528	533	537	542	546	550	555	559
990	99 564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	99 607	612	616	621	625	629	634	638	642	647
992	99 651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	99 695	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	99 739	743	747	752	756	760	765	769	774	778
995	99 782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	99 826	830	835	839	843	848	852	856	861	865
997	99 870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	99 913	917	922	926	930	935	939	944	948	952
999	99 957	961	965	970	974	978	983	987	991	996
1000	00 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Prop. Parts

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

List of References

1. Adler, F., "Yates' Correction and the Statisticians," *Journal of the American Statistical Association, Dec.*, 1951.

2. Allen, R. G. D., *Mathematical Analysis for Economists*, London, Macmillan, 1942.

3. Allen, R. G. D., *Statistics for Economists*, London, Hutchinson, 1949.

4. Anderson, R. L. and Bancroft, T. A., *Statistical Theory in Research*, New York, McGraw-Hill, 1952.

5. Anglo-American Council on Productivity, *Final Report*, London (also U.S. Department of Commerce, Washington, D.C.), 1952.

6. Barger, H., *The Transportation Industries*, 1889—1946: *A Study of Output, Employment and Productivity*, New York, National Bureau of Economic Research, 1951.

7. Barger, H. and Schurr, S. H., *The Mining Industries: A Study of Output, Employment and Productivity*, New York, National Bureau of Economic Research, 1944.

8. Bartlett, M. S., 'Properties of Sufficiency and Statistical Tests'. *Proceedings of the Royal Society of London*, A, Vol. 160, 1937.

9. Bartlett, M. S., 'The Use of Transformations,' *Biometrics*, of the Biometrics Section of the American Statistical Association, March, 1947.

10. Beckett, S. H. and Robertson, R. D., 'The Economical Irrigation of Alfalfa in the Sacramento Valley,' Univ. of California Agricultural Experiment Station, *Bulletin* 280, 1917.

11. Burns, A. F., 'Frickey on the Decomposition of Time Series,' *Review of Economic Statistics*, August, 1944.

12. Burns, A. F., *Production Trends in the United States Since 1870*, New York, National Bureau of Economic Research, 1934.

13. Burns, A. F. and Mitchell, W. C., *Measuring Business Cycles*, New York, National Bureau of Economic Research, 1946.

14. Carter, C. F., Reddaway, W. B. and Stone, R., *The Measurement of Production Movements*, Cambridge University Press, 1948.

15. Churchman, C. W., *Theory of Experimental Inference*, New York, Macmillan, 1948.

16. Clark, C. E., *An Introduction to Statistics*, New York, Wiley, 1953.

17. Cochran, W. G., *Sampling Techniques*, New York, Wiley, 1953.

18. Cochran, W. G., 'Some Consequences when the Assumptions for the Analysis of Variance are not Satisfied," *Biometrics*, of the Biometrics Section of the American Statistical Association, March, 1947.

19. Cohen, Morris R., 'The Statistical View of Nature' *Journal of the American Statistical Association*, June, 1936.

20. Committee on Graphics, *A Guide for Preparing Technical Illustrations for Publication, and Projection*, American Standards Association and American Society of Mechanical Engineers, New York, 1953.

21. Committee on Standards for Graphic Presentation, 'Time Series Charts, A Manual of Design and Construction,' American Standards Association and American Society of Mechanical Engineers, New York, 1938.

22. Cramér, H., *The Elements of Probability Theory and Some of its Applications*, New York, Wiley, 1954.

23. Cramér H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1951.

24. Croxton, F. E. and Cowden, D. J., *Applied General Statistics*, New York, Prentice-Hall, 1946.

25. David, F. N., *Probability Theory for Statistical Methods*, Cambridge University Press, 1949.

26. David, F. N., *Tables of the Correlation Coefficient*, Cambridge University Press, 1938.

27. Dean, J., 'The Relation of Cost to Output for a Leather Belt Shop', *Technical Paper* 2, New York, National Bureau of Economic Research, 1941.

28. Dean, J., *Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill*, University of Chicago Press, 1941.

29. Deming, W. Edwards, *Some Theory of Sampling*, New York, Wiley, 1950.

30. Deming, W. Edwards, *Statistical Adjustment of Data*, New York, Wiley, 1943.

31. Deming, W. E. and Birge, R. T., 'On the Statistical Theory of Errors', *Reviews of Modern Physics*, July, 1934.

32. Dixon, W. J. and Massey, F. J. Jr., *Introduction to Statistical Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1951.

33. Eisenhart, C., 'Some Assumptions Underlying the Analysis of Variance', *Biometrics*, of the Biometrics Section of the American Statistical Association, March, 1947.

34. Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis, W. A., (editors for Statistical Research Group, Columbia University), *Selected Techniques of Statistical Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1947.

35. Elderton, W. P., *Frequency Curves and Correlation*, 4th ed., Washington, D. C., Harren Press, 1953.

36. Ezekiel, M., 'A Methdod of Handling Curvilinear Correlation for Any Number of Variables', *Journal of the American Statistical Association*, Dec., 1924.

37. Ezekiel, M., *Methods of Correlation Analysis*, 2nd ed., New York, Wiley, 1941.

38. Fabricant, S., *Employment in Manufacturing*, 1899—1939, New York, National Bureau of Economic Research, 1942.

39. Fabricant, S., *The Output of Manufacturing Industries*, 1890—1937, New York, National Bureau of Economic Research, 1940.

40. Federal Reserve System, Board of Governors, *Charts on Money, Bank Credit, Money Rates and Business*, Washington, D. C.

41. Federal Reserve System; Board of Governors, '1954 Survey of Consumer Finances', *Federal Reserve Bulletin*, March, June, July, 1954.

42. Federal Reserve System, Board of Governors, 'The Revised Federal Reserve Index of Industrial Production', *Federal Reserve Bulletin*, Dec., 1953.

43. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I, New York, Wiley, 1950.

44. Ferber, R., 'A Study of Aggregate Consumption Functions', *Technical Paper* 8, New York, National Bureau of Economic Research, 1953.

45. Festinger, L. and Katz, D. ed., *Research Methods in the Behavioral Sciences*, New York, The Dryden Press, 1953.

46. Fisher, Irving, *The Making of Index Numbers*, Boston, Houghton Mifflin, 1922.

47. Fisher, Sir Ronald (R. A.), *Contributions to Mathematical Statistics*, New York, Wiley, 1950.

48. Fisher, Sir Ronald (R. A.) *The design of Experiments*, 4th ed., Edinburgh and London, Oliver and Boyd, Ltd., 1942.

49. Fisher, Sir Ronald (R. A.), 'Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population', *Biometrika*, Vol. 10, 1915.

50. Fisher, Sir Ronald (R. A.), *Statistical Methods for Research Workers*, 11th ed., New York, Hafner, 1950.

51. Fisher, Sir Ronald (R. A.) and Yates, F., *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 3rd ed., New York, Hafner, 1948.

52. Florence, P. S., *The Statistical Method in Economics and Political Science*, New York, Harcourt, Brace, 1929.

53. Fowler, C. B., Griffin, J. I., Cohen, J. B., Cropsey, J., Greenwald, W. I., and Sethur, F., *Economic Handbook, A Visual Survey*, New York, Crowell, 1955.

54. Freeman, H. A., *Industrial Statistics*, New York, Wiley, 1942.

55. Freund, J. E., *Modern Elementary Statistics*, New York, Prentice-Hall, 1952.

56. Frickey, E., *Economic Fluctuations in the United States*, Harvard Economic Studies 73, Cambridge, 1942.

57. Friedman, Milton, 'The Use of Ranks to Avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance', *Journal of the American Statistical Association*, Dec., 1937.

58. Frisch, R., 'Annual Survey of Economic Theory: The Problem of Index Numbers', *Econometrica*, January, 1936.

59. Frisch, R., 'Some Basic Principles of Price of Living Measurements,' *Econometrica*, Oct., 1954.

60. Frisch, R., *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*, Oslo, Universitetets Økonomiske Institutt, 1934.

61. Fryer, H. C., *Elements of Statistics*, New York, Wiley, 1954.

62. Geary, R. C., 'The Concept of Net Volume of Output with Special Reference to Irish Data,' *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 107, 1944.

63. Gould, J. M., *Output and Productivity in the Electric and Gas Utilities*, New York, National Bureau of Economic Research, 1946.

64. Goulden, C. H., *Methods of Statistical Analysis*, 2nd ed., New York, Wiley, 1952.

65. Greenwood, E. R., Jr., *A Detailed Proof of the Chi-Square Test of Goodness of Fit*, Harvard University Press, 1940.

66. Hald, A., *The Decomposition of a Series of Observation, Composed of a Trend, a Periodic Movement, and Stochastic Variable*, Copenhagen, G. E. C. Gads, 1948.

67. Hansen, M. H., Hurwitz, W. N. and Madow, W. G., *Sample Survey Methods and Theories*, Vol. I, Methods and Applications; Vol. II, Theory, New York, Wiley, 1953.

68. Hartley, H. O., 'The Maximum *F*-Ratio as a Short-cut Test for Heterogeneity of Variance,' *Biometrika*, Vol. 37, 1950.

69. Hoel, P. G., *Introduction to Mathematical Statistics*, 2nd ed., New York, Wiley, 1954.

70. Hotelling, H., 'New Light on the Correlation Coefficient and its Transforms,' *Journal of the Royal Statistical Societys* Series B, Vol. 15, No. 2, 1953.

71. International Labor Office, 'Methods of Labor Productivity Statistics,' *Studies and Reports, New Series*, No. 18, Geneva, 1951.

72. Johnson, P. O., *Statistical Methods in Research*, New York, Prentice-Hall, 1949.

73. Joy, A. and Thomas, W., 'The Use of Moving Averages in the Measurement of Seasonal Variations,' *Journal of the American Statistical Association*, Sept., 1928.

74. Juliber, G. S. 'Relation Between Seasonal Amplitudes and the Level of Production—An Application to the Production of Steel Ingots,' *Journal of the American Statistical Association*, Dec., 1941.

75. Katona, G. and Muller, E., *Consumer Attitudes and Demand*, Survey Research Center, Institute for Social Research, University of Michigan, 1953.

76. Kelley, Truman L., *Fundamentals of Statistics*, Cambridge, Harvard University Press, 1947.

77. Kelley, Truman L., *The Kelley Statistical Tables*, rev. ed., Harvard University Press, 1948.

78. Kendall, M. G., *The Advanced Theory of Statistics*, 3rd ed., London, Griffin, 1947.

79. Kendall, M. G., *Contributions to the Study of Oscillatory Time Series*, Cambridge University Press, 1946.

80. Kendall, M. G., *Rank of Correlation Methods*, London, Griffin, 1948.

81. Kendall, M. G., 'The Statistical Approach', *Economica*, May, 1950.

82. Keynes, J. M., *A Treatise on Probability*, New York, Macmillan, 1921.

83. Klein, Lawrence R., *Contributions of Survey Methods to Economics*, New York, Columbia University Press, 1954.

84. Konus, A. A., 'The Problem of the True Index of the Cost of Living,' *Econometrica*, January, 1939.

85. Koopmans, T. C., 'Measurement without Theory,' *Review of Economic Statistics*, Aug., 1947.

86. Koopmans, T. C., ed., *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, New York, Wiley, 1950.

87. Kuznets, S., *Seasonal Variations in Industry and Trade*, New York, National Bureau of Economic Research, 1933.

88. Kuznets, S., *Secular Movements in Production and Prices* Boston, Houghton Mifflin, 1930.

89. Lazarsfeld, P. F., ed., *Mathematical Thinking in the Social Sciences*, Glencoe, Ill., The Free Press, 1954.

90. Lewis, D. and Burke, C. J., 'Further Discussion of the Use and Misuse of the Chi-Square Test,' *The Psychological Bulletin*. July, 1950.

91. Lewis, D. and Burke, C. J., 'The Use and Misuse of the Chi-Square Test,' *The Psychological Bulletin*, Nov., 1949.

92. Lewis, E. E., *Methods of Statistical Analysis in Economics and Business*, Boston, Houghton Mifflin, 1953.

93. Livingston, J. A., 'Charts Should Tell a Story,' *Journal of the American Statistical Association*, Sept., 1945.

94. Lutz, R. R., *Graphic Presentation Simplified*, New York, Funk and Wagnalls, 1949.

95. Macaulay, F. R., *The Smoothing of Time Series*, New York, National Bureau of Economic Research, 1931.

96. Mather, K., *Statistical Analysis in Biology*, 2nd ed., New York, Interscience Publishers, Inc., 1947.

97. Mendershausen, H., 'Methods of Computing and Eliminating Changing Seasonal Fluctuations,' *Econometrica*, July, 1937.

98. Merriman, Mansfield, *The Method of Least Squares*, New York, Wiley, 1897.

99. Merz, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century*, Edinburgh and London, Blackwood, 1904, Vol. II, Chapter 12, 'The Statistical View of Nature'.

100. Mills, F. C., *The Behaviour of Prices*, New York, National Bureau of Economic Research, 1924.

101. Mills, F. C., *Economic Tendencies in the United States*, New York, National Bureau of Economic Research, 1932.

102. Mills, F. C., 'The Measurement of Correlation and the Problem of Estimation,' *Journal of the American Statistical Association*, Sept., 1924.

103. Mills, F. C., 'Productivity and Economic Progress,' *Occasional Paper* 38, New York, National Bureau of Economic Research, 1952.

104. Miner, J. R., *Tables of* $\sqrt{1-r^2}$ *and* $1-r^2$ *for Use in Partial Correlation and in Trigonometry*, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1922.

105. Mitchell, W. C., *Business Cycles*, University of California Press, 1913.

106. Mitchell, W. C., 'The Making and Using of Index Numbers,' *Bulletin* 656, U. S. Bureau of Labor Statistics.

107. Mitchell, W. C., *What Happens During Business Cycles*, New York, National Bureau of Economic Research, 1951.

108. Mitchell, W. C., King, W. I., Macaulay, F. R. and Knauth, O., *Income in the United States*, Vol. I, New York, Harcourt, Brace and Co. (for National Bureau of Economic Research), 1921.

109. Mood, A. M., *Introduction to the Theory of Statistics*, New York, McGrawHill, 1950.

110. Moore, G. H., 'Statistical Indicators of Cyclical Revivals and Recessions,' *Occasional Paper* 31, New York, National Bureau of Economic Research, 1950.

111. Moore, G. H. and Wallis, W. A., 'Time Series Significance Tests Based on Signs of Differences,' *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943).

112. Mosteller, F., and others, 'The Pre-Election Polls of 1948,' Social Science Research Council, *Bulletin* 60, 1949.

113. Mudgett, Bruce D., *Index Numbers*, New York, Wiley, 1951.

114. Mudgett Bruce, D., *Statistical Tables and Graphs*, Boston, Hughton Mifflin, 1930.

115. National Bureau of Standards, *Tables of the Binomial Probability Distribution*, Applied Mathematical Series, 6, Washington, D. C., U. S. Government Printing Office, 1950.

116. Neyman, Jerzy, 'Basic Ideas and Some Recent Results of the Theory of Testing Statistical Hypotheses,' *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 105, 1942.

117. Neyman, Jerzy, 'Fiducial Argument and the Theory of Confidence Intervals,' *Biometrika*, Vol. 32, 1941. (Also in Neyman, J., *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*, 2nd ed.)

118. Neyman, Jerzy, *First Course in Probability and Statistics*, New York, Henry Holt, 1950.

119. Neyman, Jerzy, *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*, 2nd ed., Washington, Graduate School, U. S. Department of Agriculture, 1952.

120. Neyman, Jerzy, 'On the Two Different Aspects of the Representative Method,' *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 97, 1934.

121. Neyman, Jerzy, 'Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability,' *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1937.

122. Neyman, J. and Pearson, E. S., 'Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses,' *Statistical Research Memoirs*, Vol. 1, 1936; Vol. 2, 1938.

123. Neyman, J. and Pearson, E. S., 'On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses,' *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 231, 1933.

124. Parten, M. B., *Surveys, Polls and Samples*, New York, Harper, 1950.

125. Peake, E. G., *An Academic Study of Some Money Market and Other Statistics*, London, King, 1923.

126. Persons, E. S. and Hartley, H. O., *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I, Cambridge University Press, 1954.

127. Persons, W. M. 'Indices of Business Conditions,' *Review of Economic Statistics*, Preliminary Vol. 1, 1919.

128. Peters, C. C. and Van Voorhis, W. R., *Statistical Procedures and their Mathematical Bases*, New York, McGraw-Hill, 1940.

129. Reiersöl., O., *Confluence Analysis by Means of Instrumental Sets of Variables*, Stockholm, Almqvist and Wiksells, 1945.

130. Rider, Paul R., *An Introduction to Modern Statistical Methods*, New York, Wiley, 1939.

131. Riggleman, J. R., and Frisbee, I. N., *Business Statistics*, 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1951.

132. Rosander, A. C., *Elementary Principles of Statistics*, New York, Van Nostrand, 1951.

133. Royce, Josiah, 'The Mechanical, the Historical and the Statistical,' *Science*, April 17, 1914.

134. Sasuly, Max, *Trend Analysis of Statistics: Theory and Technique*, Washington, Brookings Institution, 1934.

135. Schultz, Henry, *Statistical Laws of Demand and Supply*, University of Chicago Press, 1928.

136. Schultz, Henry, *The Theory and Measurement of Demand*, University of Chicago Press, 1938.

137. Schumpeter, J. A., *Business Cycles*, New York, McGraw-Hill, 1939.

138. Sheppard, W. F., 'The Calculation of Moments of a Frequency Distribution,' *Biometrika*, Vol. 5, 1907.

139. Sheppard, W. F., 'On the Calculation of the Most Probable Values of Frequency Constants for Data Arranged According to Equi-Distant Divisions of a Scale,' *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 29, 1898.

140. Shewhart, W. A., *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, New York, Van Nostrand, 1931.

141. Shewhart, W. A., *Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control*, Washington, U. S. Dept. of Agriculture 1939.

142. Siegel, I., *Concepts and Measurement of Production and Productivity*, Washington, U. S. Bureau of Labor Statistics, 1952.

143. Simpson, G. and Kafka, F., *Basic Statistics*, New York, Norton, 1952.

144. Smart, L. E. and Arnold, S., *Practical Rules for Graphic Presentation of Business Statistics*, Bureau of Business Research, The Ohio State University, 1947.

145. Smith, C. D., 'On Generalized Tchebycheff Inequalities in Mathematical Statistics,' *American Journal of Mathematics*, Vol. 52, No. 1, 1930.

146. Snedecor, G. W., *Analysis of Variance*, Ames, Iowa State College Press, 1934.

147. Snedecor, G. W., *Statistical Methods*, 4th ed., Iowa State College Press, 1946.

148. Social Science Research Council, 'The Pre-Election Polls of 1948,' *Bulletin* 60, New York, 1949.

149. Spear, Mary E., *Charting Statistics*, New York, McGraw-Hill, 1952.

150. Spurr, W. A., Kellogg, L. S. and Smith, J. H. *Business and Economic Statistics*, Homewood, Ill., Irwin, 1945.

151. Staehle, H., 'A Development of the Economic Theory of Price Index Numbers,' *The Review of Economic Studies*, June, 1935.

152. Stauber, B. R., Koffsky, N. M. and Randall, C. K., 'The Revised Price Indexes,' *Agricultural Economics Research*, April, 1950.

153. 'Student,' 'The Probable Error of a Mean,' *Biometrika*, Vol. 6, 1908.

154. Sturges, H. A., 'The Choice of a Class Interval,' *Journal of the American Statistical Association*, March, 1926.

155. Sukhatme, P. V., *Sampling Theory of Surveys*, Iowa State College Press, 1954.

156. Thompson, C. M. and Merrington, M., 'Tables for Testing the Homogeneity of a Set of Estimated Variances,' *Biometrika*, Vol. 33, 1946.

157. Thorp, Willard L., *Business Annals*, New York, National Bureau of Economic Research, 1926.

158. Tintner, G., *Mathematics and Statistics for Economists*, New York, Rinehart, 1953.

159. Tintner, G., *The Variate Difference Method*, Bloomington, Indiana, 1940.

160. Tippett, L. H. C., *The Methods of Statistics*, 4th ed., New York, Wiley, 1952.

161. Tippet, L. H. C., *Technological Applications of Statistics*, New York, Wiley, 1950.

162. Treloar, A. E., *Elements of Statistical Reasoning*, New York, Wiley, 1939.

163. Tugwell, R. G , ed., *The Trend of Economics*, New York, Knopf, 1924.

164. Ulmer, M. J., *The Economic Theory of Cost of Living Index Numbers*, New York, Columbia University Press, 1949.

165. United Nations, Economic Commission for Europe, *Economic Survey of Europe Since the War*, Geneva, 1953.

166. United Nations Statistical Office, 'Index Numbers of Industrial Production,' *Studies in Methods*, No. 1, New York, 1950.

167. United Nations Statistical Office, 'International Standard Industrial Classification of all Economic Activities,' *Statistical Papers Series M*, No. 4, New York.

168. United Nations Statistical Office, 'The Preparation of Sampling Survey Reports,' *Statistical Papers Series C*, No. 1 (revised), Feb., 1950.

169. U. S. Bureau of the Census, 'Concepts and Methods Used in the Current Labor Force Statistics Prepared by the Bureau of the Census,' *Current Population Reports*, Series P—23, No. 2, July 30, 1954.

170. U. S. Bureau of the Census, *Current Population Survey, Labor Force*, Series P—57.

171. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'The Consumer Price Index,' *Bulletin* 1140, Washington, 1953.

172. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'A Description of the Revised Wholesale Price Index,' *Monthly Labor Review* Feb., 1952.

173. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'The Productivity Measurement Program of the Bureau of Labor Statistics,' Washington, 1950.

174. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'Productivity Trends in Selected Industries Through 1950,' *Bulletin* 1046, Washington, Oct., 1951.

175. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'The Revised Consumer Price Index,' *Monthly Labor Review*, Feb., 1952.

176. U. S. Bureau of Labor Statistics, *Technical Note on the Measurement of Trends in Output per Man-Hour*, Washington, April, 1954.

177. U. S. Bureau of Labor Statistics, 'Trends in Man-Hours Expended per Unit, Selected Machine Tools, 1939 to 1945,' Washington, 1947; '... 1947 to 1948,' Washington, 1950; '... 1949 to 1950,' Washington, 1952.

178. U. S. Interstate Commerce Commission, Bureau of Transport Economics and Statistics, 'Table of 105,000 Random Decimal Digits,' Washington, D. C., May,1949.

179. U. S. Office of Statistical Standards, Bureau of the Budget, 'Standard Industrial Classification Manual.'

180. U. S. Office of Statistical Standards, Bureau of the Budget 'Univac Seasonal Computations, Method No. 1,' *Statistical Reporter*, January, 1955.

181. Vining, R., 'Methodological Issues in Quantitative Economics: Koopmans on the Choice of Variables to be Studied and on Methods of Measurement,' *The Review of Economics and Statistics*, May, 1949.

182. von Mises, R., *Probability, Statistics and Truth,* New York Macmillan, 1939.

183. Wald, A., *Sequential Analysis,* New York, Wiley, 1947.

184. Wald, A., *Statistical Decision Functions,* New York, Wiley, 1950.

185. Walker, Helen M., *Mathematics Essential for Elementary Statistics,* 2nd ed., New York, Holt, 1951.

186. Walker, H. M. and Lev, J., *Statistical Inference,* New York, Holt, 1953.

187. Walsh, C. M., *The Problem of Estimation,* London, King, 1921.

188. Waugh, Albert E., *Elements of Statistical Method,* 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1952.

189. Wendt, Paul F., *Classification and Financial Experience of the Customers of a Typical New York Stock Exchange Firm from* 1933 *to* 1938, Maryville, Tennessee, 1941 (privately printed).

190. Whittaker, E. T. and Robinson, G., *The Calculus of Observations,* London, Blackie & Son, 1924.

191. Wilks, S. S., *Elementary Statistical Analysis,* Princeton University Press, 1949.

192. Wilks, S. S., *Mathematical Statistics,* Princeton University Press, 1943.

193. Wirth, Louis, ed., *Eleven Twenty Six: A Decade of Social Science Research,* Univ. of Chicago Press, 1940. Section on 'Quantification: The Quest for Precision.'

194. Wold, H., *A Study in the Analysis of Stationary Time Series,* Upsala, Almqvist, 1938.

195. Yates, F., 'The Analysis of multiple Classifications with Unequal Numbers in Different Classes,' *Journal of the American Statistical Association,* March, 1934.

196. Yates, F., 'Contingency Tables Involving Small Numbers and the x^2 Test,' *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 1, 1934.

197. Yates, F., *Sampling Methods for Censuses and Surveys*, 2nd ed., New York, Hafner, 1953.

198. Youngdahl, R., 'The Structure of Interest Rates on Business Loans at Member Banks,' *Federal Reserve Bulletin*, July, 1947.

199. Yule, G. U. and Dendall, M. G., *An Introduction to the Theory of Statistics*, 14th ed., New York, Hafner, 1950.

கலைச்சொல் அகரவரிசை

(ஆங்கிலம் தமிழ்)

A

Abstract	—	கருத்தியலான
Accuracy	—	திருத்தம்
Actual	—	உண்மையான
Activity	—	செயல்
Addition law	—	கூட்டு விதி
Additive nature	—	கூட்டமைப்பு
Aggregate	—	மொத்தம், கூட்டு
Aggregative index number	—	மொத்தக் குறியீட்டு எண்
Agricultural statistics	—	விவசாயப் புள்ளிவிவரம்
Alienation, coefficient of	—	பராதீனக் கெழு
Allocation	—	பங்கீடு
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Analytic method	—	பகுப்பாய்வு முறை
Apparent	—	வெளிப்படையான
Approximate	—	தோராயமான
Apriori probability	—	எப்ரியோரி ஊக அளவை (முன் கூட்டு ஊக அளவை)
A posteriori probability	—	எ போஸ்டீரியோரி (பின் கூட்டு) ஊக அளவை
Area sampling	—	பரப்பு மாதிரித் தேர்வு
Argument	—	மாறி
Arithmetic mean	—	கூட்டுச் சராசரி
Arithmetic progression	—	கூட்டுத் தொடர்
Arrays	—	வரிசைகள்
Aspects	—	தோற்றம், பார்வை
Association	—	கூட்டுறவு
,, Coefficient of	—	கூட்டுறவுக் கெழு
Ascending order	—	ஏறு வரிசை
Asymmetry	—	சமச்சீரின்மை
Asymmetrical distribution	—	சமச்சீரிலாப் பரவல்
Attribute	—	பண்பு

Attribute sampling	—	பண்பாட்டு மாதிரித் தேர்வு
Auto-regression	—	தொடர் தற்போக்கு
Average	—	சராசரி
Axes	—	அச்சுகள்

B

Bar diagram	—	பட்டை விளக்கப்படம்
,, compound	—	கூட்டுப் பட்டை விளக்கப்படம்
Base	—	அடிப்படை
Bias	—	ஒருபுறச் சாய்வு அல்லது சார்பு
Binary comparison	—	இருபடி ஒப்பிடுதல்
Binomial	—	ஈருறுப்பு
Birth rate	—	பிறப்பு வீதம்
Bitumen	—	நிலக்கீல்
Bituminous coal	—	நிலக்கீலார்ந்த நிலக்கரி
Bivariate	—	இரு மாறி
By-product	—	பக்க விளைவு

C

Causation	—	காரணம்
Ceiling	—	உச்சவரம்பு
Census	—	மக்கட் கணிப்பு
,, report	—	மக்கட் கணிப்பு அறிக்கை
,, return	—	மக்கட் கணிப்பு விவரப் பட்டியல்
,, population	—	மக்கள் மதிப்பீடு
Chain base	—	சங்கிலி அடிப்படை முறை
,, index	—	சங்கிலிக் குறியீட்டெண்
Chance	—	வாய்ப்பு
,, law of	—	வாய்ப்பு விதி
Check	—	தணிக்கை
Chunk	—	துண்டம்
Circular test	—	வட்டச் சோதனை
Class	—	பிரிவு
Classify	—	பிரிவுசெய்
Class interval	—	பிரிவு இடைவெளி
,, frequency	—	பிரிவு அலைவெண்
Classification	—	பிரிவினை, பாகுபாடு
,, one-way	—	ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, two-way	—	இருவழிப் பாகுபாடு
,, three way	—	மூவழிப் பாகுபாடு

Coefficient of dispersion — சிதறல், கெழு
,, ,, skewness — கோட்டக் கெழு
,, ,, variation — மாறுபாட்டுக் கெழு
Compound event — கூட்டு நிகழ்ச்சி
Computers — கணிகள்
,, electronic — மின்சாரப் பகுப்பியல் கணிகள்
Comprehensive — அகல் விரிவான
Computation — கணக்கிடுதல்
Commodity — பொருள்
Concentration — குவிவு
Confidence limit — நம்பிக்கை எல்லை
,, ,, upper — மேல் நம்பிக்கை எல்லை
,, ,, lower — கீழ் நம்பிக்கை எல்லை
Conformity — இணக்கம்
,, index of — இணக்கக் குறியீடு
Concurrent deviations — உடனிகழ்கிற விலக்கங்கள்
Consumption habits — துய்ப்புப் பழக்கங்கள்
Constraint — இறுக்கி
Consistence — பொருத்தம்
Consumers — துய்ப்போர்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Correlation — உடன் தொடர்பு
,, spurious — போலித் தொடர்பு
,, diagram — தொடர்பு விளக்கப்படம்
,, coefficient — தொடர்புக் கெழு
,, multiple — பல்தரத் தொடர்பு
,, partial — ஒருசிறைத் தொடர்பு
,, positive — நேரிடைத் தொடர்பு
,, negative — எதிரிடைத் தொடர்பு
,, rank — தரத் தொடர்பு
Correlation coefficient of zero order — சுழிப்படித் தொடர்புக் கெழு
Correlation coefficient of first order — முதற்படித் தொடர்புக் கெழு
Correlation coeficient of second order — இருபடித் தொடர்புக் கெழு
Correlation coeficient of third order — முப்படித் தொடர்புக் கெழு
Correlation ratio — தொடர்பு விகிதம்

Correlation table — தொடர்புப் பட்டியல்
Corn — கூலம்
County — கோட்டம்
Coverage — மொத்த அடக்கம்
Critical — தீர்வுகட்டமான
Crossed weight — குறுக்கு நிறை
Cumulative — திரள், குவிவு
Curve-fitting — கோடு இணைத்தல், வளை கோட்டுப் பொருத்துதல்
Current (dollars) — தற்கால (டாலர்கள்)
Cycle — சுழற்சி
Cyclical effect — சுழல் விளைவு
Cyclical variation — சுழல் மாறுபாடு
,, fluctuation — சுழல் ஏற்றவிறக்கம்

D

Data — விவரங்கள்
,, primary — முதனிலை விவரங்கள்
,, secondary — இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
,, statistical — புள்ளி விவரங்கள்
Decrement — குறைவு
Deflation — பணவாட்டம்
Degree (power) — அடுக்கு
Denomination — இனம்
Denominators — பொதுப் பகுவெண்
Density — அடர்த்தி
,, probability — ஊக அளவை அடர்த்தி
,, frequency — அலைவு அடர்த்தி
Derive — வருவி
Design — உருவமைப்பு
Descending order — இறங்கு வரிசை
Determination — தீர்மானம்
Determination coefficient of — தீர்மானக் கெழு
Deviation — விலக்கம்
,, standard — தரவிலக்கம்
,, mean — சராசரி விலக்கம்
,, average — சராசரி விலக்கம்
,, absolute — மொத்த விலக்கம்
,, quartile — கால் விலக்கம்

Diagram	—	விளக்கப்படம்
,, statistical	—	புள்ளிவிவர விளக்கப்படம்
Differentiating	—	நுண்கலனம் செய்தல்
Discrepancy	—	முரண்பாடு
Discrete	—	தனித்த
,, variable	—	தனித்த மாறி
,, number	—	தனியெண்
Dispersion	—	சிதறல்
,, measures of	—	சிதறல் அளவைகள்
Distribution	—	பரவல்
,, frequency	—	அலைவுப் பரவல்
,, continuous	—	தொடர்புப் பரவல்
,, discontinuous	—	தொடர்பிலாப் பரவல்
,, binomial	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
,, Poisson	—	பாய்ஸான் பரவல்
,, normal	—	நார்மல் பரவல்
Dominant	—	மேம்பட்ட
Dot method	—	புள்ளி முறை
Dynamic Economy	—	இயக்கநிலைப் பொருளாதாரம்

E

Economic Statistics	—	பொருளாதாரப் புள்ளியியல்
Effectiveness	—	பயனுடைத் தன்மை
Elementary	—	துவக்க நிலை
Empirical	—	அனுபவ வழி
Enterprise	—	தொழிற்றுணிவு
Enumeration	—	கணக்கெடுப்பு
Error	—	பிழை
Estimation	—	மதிப்பீடு
Establish	—	நிறுவு
Evaluate	—	மதிப்பிடு
Event	—	நிகழ்ச்சி
,, dependent	—	சார்பு நிகழ்ச்சி
,, favourable	—	சாதக நிகழ்ச்சி
,, independent	—	சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Evolutionary	—	படிமலர்ச்சியுடைய
Exchange	—	பரிவர்த்தனை
Experimental error	—	செய்ம்முறைப் பிழை
,, design	—	செய்ம்முறைத் திட்டம்

Exponential	—	எக்ஸ்பொனென்ஷியல்
Extrapolation	—	வெளியேவைத்தல்

F

Factor	—	காரணி
Factors of production	—	உற்பத்திக் காரணிகள்
Factor reversal test	—	காரணி எதிர்மாற்றுச் சோதனை
Field method	—	களமுறை
,, survey	—	கள விசாரணை
,, survey test	—	கள கணக்கெடுப்புச் சோதனை
Firsthand data	—	முதனிலை விவரங்கள்
Fit	—	இணைப்பு
Flexible	—	இணக்கமுள்ள, எளிதில் கையாளுகிற
Fluctuation	—	ஏற்றவிறக்கம்
,, random	—	ராண்டம் ஏற்றவிறக்கம்
,, seasonal	—	பருவகால ஏற்றவிறக்கம்
,, cyclical	—	சுழல் ஏற்றவிறக்கம்
Forecast	—	முன்கணிப்பு
Formation	—	உருவாக்குதல்
Frame-work	—	சட்டம்
Frequency curve	—	அலைவெண் வளைகோடு
,, diagram	—	அலைவெண் விளக்கப்படம்
,, table	—	அலைவெண் பட்டியல்
Freight ton-miles	—	சரக்கு டன்-மைல்கள்
Function	—	சார்பலன்
Functional relationship	—	செயற்படு தொடர்பு

G

Geometrical figures	—	ஜியோமிதிப் படங்கள்
,, mean	—	பெருக்குச் சராசரி
,, progression	—	பெருக்குத் தொடர்
Gompertz curve	—	காம்பர்ட்ஸ் வளைகோடு
Grade	—	தரம்
Gross National Income	—	நாட்டின் மொத்த ஆக்கம்
Grouping	—	தொகுப்பு
Gradient	—	சாய்வலகு
Graph	—	வரைபடம்

H

Harmonic mean — ஹார்மோனிக் சராசரி
,, progression — ஹார்மோனிக் தொடர்
Heterogeneous — பலபடித்தான
Homogeneous — ஒருபடித்தான
Horizontal — கிடைக்கோடு
Housing — வீட்டு வசதி
Human effort — மனித முயற்சி
Hypothesis — எடுகோள்
,, contradictory — முரண்படு எடுகோள்
,, fruitful — பயன்தரு எடுகோள்

I

Ideal — விழுமிய
Ideal index number, Fisher's — ஃபிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்
Identity — சமன்பாடு
Image — சாயல்
Improve — செம்மையாக்கு
Implicit — தொக்கிய
Imputations — சாட்டுகள்
Incompatible — ஒவ்வாத
Incremental — இன்க்ரிமென்டல்
Inconsistent — முரணான
Increment — கூடுதல்
Index — குறியீடு
Index number — குறியீட்டெண்
,, ,, wholesale — முழு விற்பனைக் குறியீட்டெண்
,, ,, aggregative — மொத்தக் குறியீட்டெண்
,, ,, weighted — நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Index, price relatives — விலைசார்பி குறியீட்டெண்
,, value — மதிப்புக் குறியீடு
,, quantity — அளவுக் குறியீடு
Indicator — குறிப்பீடு, மானி
Individual — தனித்த
Inertia — மந்தம் (மாறுத்தன்மை)
Infinite — எல்லையற்ற
Infinity — எண்ணிலி
Inference — உய்த்துணர்வு
Independent — சார்பிலா

Indirect — மறைமுக
,, method — மறைமுக முறை
Inflation — பணவீக்கம்
Influence — இயக்கம்
Industrial development — தொழில் முன்னேற்றம்
Input — உட்பாடு
Interaction — இடைவினைவு
Interpolation — இடையே வைத்தல்

L

Labour requirements — உழைப்புத் தேவைகள்
Lag — பின்னடைவு
Latent — உள்ளடங்கிய
Law of Averages — சராசரி ஒழுங்கின் நியதி
Law of Statistical Regularity — புள்ளிவிவர ஒழுங்கு விதி
Lead — முன்னோட்டம்
Least squares method — குறைந்த வர்க்க முறை
Limit — எல்லை, வரம்பு
Link — இணைப்பு
Link relatives — சங்கிலிச் சார்பிகள், இணைப்பு ஒப்புமைகள்
Linear constraint — முதலடுக்கு இறுக்கி
Living standards — வாழ்க்கைத் தரங்கள்
Logarithm — அடுக்குமூலம்; லாகிருதம்
Logarithmic chart — அடுக்குமூலப் படம்; லாகிருதம் படம்
,, paper — அடுக்குமூலத் தாள்; லாகிருதத் தாள்
Logistic curve — லாஜிஸ்டிக் வளைகோடு
Lorenz curve — லாரென்ஸின் வளைகோடு

M

Maintain — நிர்வகி
Man-hour — மனித-மணி
Manufacturing workers — பொறிவழிப் பாட்டாளிகள்
Maximum — உச்சம், பெருமம்
Mean — சராசரி
,, weighted — நிறையிட்ட சராசரி
,, simple arithmetic — சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி

Median	—	இடைநிலை
Measures, descriptive	—	விளக்க அளவைகள்
,, of dispersion	—	சிதறல் அளவைகள்
,, of skewness	—	கோட்ட அளவைகள்
Method of agreement	—	ஒற்றுமை முறை
,, ,, difference	—	வேற்றுமை முறை
,, ,, residues	—	எச்ச முறை
Minimum	—	சிறுமம்
Mode	—	முகடு
Bi-modal	—	இருமுகட்டு
Multi-modal	—	பன்முகட்டு
Multiplier	—	பெருக்கி
Mortality rate	—	இறப்பு வீதம்
,, table	—	இறப்புப் பட்டியல்
Movements	—	இயக்கம், அசைவு
Most probable	—	பெரும்பாலாக நிகழக்கூடிய
Moving average	—	நகரும் சராசரி
,, total	—	நகரும் மொத்தம்
Multinomial	—	பல்லுறுப்பு

N

National income	—	நாட்டு வருமானம்
National Sample Survey	—	தேசிய மாதிரி அளவெடுப்பு
Natural resources	—	இயற்கை வளங்கள்
Net	—	கழிவான
Normal equations	—	நார்மல் அல்லது ஒழுங்குச் சமன்பாடுகள்
,, distribution	—	இயல்நிலைப் பரவல்; நார்மல் பரவல்
,, probability curve	—	இயல்நிலை நிகழ்வெண் வளைகோடு; நார்மல் ஊக அளவை வளைகோடு
,, curve of error	—	இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு; நார்மல் பிழை வளைகோடு
Null hypothesis	—	சூனிய எடுகோள்

O

Objective	—	தற்சார்பற்ற
Observation	—	கண்டறிதல்
Odd	—	ஒற்றை

Off-set — சரிக்கட்டு
One-tailed test — ஒருமுனைச் சோதனை
Optimum allocation — உத்தமப் பங்கீடு
Order — படி
Origin — மூலம்
Original — தொடக்கத்திலுள்ள
Oscillations — அலைவுகள்
Output — வெளிப்பாடு

P

Parameter — பராமீட்டர்
Paradox — முரணுரை
Parity index — சமமதிப்புக் குறியீடு
Partial derivatives — ஒருசிறை நுண்வகைக் கெழுக்கள்
Pattern — தோரணி
Part-time employment — குறைநேர வேலை
Percentile — நூற்றுமானம்
Periodic and semiperiodic — காலச் சுழற்சியுடைய, மற்றும் சுமாராகக் காலச் சுழற்சியுடைய
Perfect — நிறைவுபெற்றது (குறையற்றது)
Perfect correlation — ஒன்றிய உடன்தொடர்பு
Physical scientist — பருப்பொருள் கலைஞர்
Pilot survey — முன்னணி விசாரணை
Polynomial — பல்லுறுப்புக் கோவை
Population — முழுமைத் தொகுதி
,, finite — வரம்புற்ற தொகுதி
,, infinite — வரம்பற்ற தொகுதி
,, hypothetical — கற்பனைத் தொகுதி
,, real — நடைமுறைத் தொகுதி
,, stationary — நிலையான முழுமைத் தொகுதி
Positional means — நிலைச் சராசரிகள்
Preliminary yield — குத்து மதிப்பு
Precede — முந்து
Precision — திட்பம்
Price quotations — குறிக்கப்பட்ட விலைகள்
Primary subscripts — முதன்மையான ஒட்டுக்குறிகள்
Process — செய்ம்முறை

Procedure — செய்ம்முறை, நடைமுறை
Production coefficient — உற்பத்திக் கெழுக்கள்
Productivity — உற்பத்தித் திறன்
Probable — நிகழக்கூடிய
,, error — நிகழ் பிழை
Probability — ஊக அளவை
,, empirical — அனுபவ அளவை
,, normal — நார்மல் யூக அளவை
,, absolute — முற்று யூக அளவை
,, mathematical — கணக்கியல் யூக அளவை
,, statistical — புள்ளியியல் யூக அளவை
Propensity — நாட்டம்
Psychological statistics — உளப் புள்ளியியல்
Purchasing power of money — பணத்தின் வாங்குந்திறன்
Punch-card — துளை அட்டை

Q

Quality control — தரக் கட்டுப்பாடு
Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quantity — அளவு
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்

R

Radical — அடுக்குமூலக் குறி
Rank — தரம்
Range — வீச்சு
Random — ராண்டம்
Random numbers — ராண்டம் எண்கள்
Rank-correlation — தரத்தொடர்பு
Rates — வீதங்கள்
Ratios — விகிதங்கள்
Ratio paper — விகிதத் தாள்
Rational — பகுத்தறிவுள்ள
Raw material — கச்சாப் பொருள்
,, data — சீர்படா விவரங்கள்
Record — பதிவு செய்
Regression — ரெக்ரஷன், மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு
,, function — போக்குச் சார்பலன்

Regression coefficient	—	மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு
,, analysis	—	மாறிகளின் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு
,, equation	—	மாறிகளின்தொடர்புச் சமன்பாடு
,, estimate	—	மாறிகளின் தொடர்பு மதிப்பீடு
,, lines	—	மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்
,, linear	—	நேர்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு
,, nonlinear, ,, curvilinear	—	வளை கோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு
,, partial	—	ஒருபுற மாறிகள் தொடர்புப் போக்கு
Regimen	—	'சூழ்நிலை'
Relative	—	ஒப்புமை
Reliability	—	ஏற்புடைமை, நம்பகம்
,, coefficient	—	நம்பகக் கெழு
Residual	—	மீதி
,, error	—	மீதப் பிழை
Response	—	எதிரொலி
Root (in the sense of index)	—	அடுக்குமூலம்

S

Sample	—	மாதிரி
Sampling method	—	மாதிரி முறை
,, error	—	மாதிரித் தேர்தற் பிழை
,, random	—	ராண்டம் மாதிரி முறை
,, simple random	—	சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை
,, double	—	இருபடி மாதிரிமுறை
,, multiple	—	பல்படி ,,
,, multi-stage	—	பலகட்ட ,,
,, multiphase	—	பலதோற்ற மாதிரிமுறை
,, sequential	—	படிப்படி மாதிரிமுறை
,, stratified	—	படுகை மாதிரிமுறை
,, systematic	—	ஒழுங்கு மாதிரிமுறை
Sample average	—	மாதிரிச் சராசரி
Scatter	—	சிதறல்
Scale	—	அளவுத் திட்டம்
Seasonal	—	பருவகால
Secondary subscripts	—	இரண்டாம்படி ஒட்டுக்குறிகள்

Secular trend	—	பன்னெடுங்காலப் போக்கு
Seasonal corrections	—	பருவத் திருத்தங்கள்
Sequence	—	தொடர்ச்சி
Serial correlation	—	தொடர்வரிசைத் தொடர்பு
Set	—	அடைவு
Shape	—	வடிவம்
Shift	—	பிறழ்ச்சி
Sigma notation	—	Σ குறி (சிக்மா குறி)
Simultaneous equations	—	ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்
Sign	—	குறி (+ or —)
Significant figures	—	சிறப்பான ஸ்தானங்கள்
Skewness	—	கோட்டம்
,, measures of	—	கோட்ட அளவைகள்
Smooth	—	இழைவு
Source	—	மூலம்
Solution	—	தீர்வு, தீர்வுகாணுதல்
Sorters	—	பண்பினவாரியாகப் பிரிக்கும் யந்திரங்கள்
Specimen	—	மாதிரிப் பொருள்
Square	—	தற்பெருக்கம், வர்க்கம்
,, root	—	இருபடி மூலம் ; வர்க்கமூலம்
Stable	—	உறுதியான
Statistics	—	புள்ளியியல்
Statistical inference	—	புள்ளியியல் ஊகம்
,, investigator	—	புள்ளிவிவர ஆய்வாளர்
,, measures	—	புள்ளியியல் அளவைகள்
,, compilation	—	புள்ளிவிவரத் தொகுப்பு
,, research	—	புள்ளிவிவர ஆய்வு
Standard error	—	தரப்பிழை
,, deviation	—	தரவிலக்கம்
Stage	—	கட்டம்
,, averages	—	கட்டச் சராசரிகள்
Stochastic	—	ஸ்டோகாஸ்டிக்
,, process	—	,, புரோஸஸ்
Strata	—	படுகை
Sub-sample	—	துணை-மாதிரி
Subsidy	—	உதவிக்கொடை
Successively	—	ஒன்றன்பின் ஒன்ருக
Symmetry	—	சமச்சீர்
Symmetrical	—	சமச்சீராக

T

Table — அட்டவணை, பட்டியல்

Tabulator — அட்டவணை அமைப்பி

Tally-mark — சரிபார்க்குங் குறி

Terms of exchange — நாணயமாற்று வீதம்

Test, significance — சிக்னிஃபிக்கன்ஸ் சோதனை, சிறப்புகாண் சோதனை

Test of independence — தொடர்பற்றநிலைச் சோதனை

,, homogeneity — ஒருபடித்தான நிலைச் சோதனை

,, goodness of fit — இணைச் சிறப்புநிலைச் சோதனை

Temporal relationship — நிலையற்ற தொடர்பு

Technical — நுட்பம், தொழில்நுட்பம்

Time series — காலத் தொடர்வரிசை

,, charts — காலப் படம்

Timing — நிகழும் நேரம்

Trait — பண்பு

Treatment — நடத்துகை

Two-tailed test — இருமுனைச் சோதனை

Type-bias — வகைச் சார்பு

U

Unit — அலகு

Uniform — ஒருசீரான

Unknown — மதிப்புத் தெரியாத

Unstable — நிலையற்ற

Utility — பயன்பாடு

V

Valid — ஏற்கக்கூடிய

Variate — மாறி

,, dependent — சார்புடை மாறி

,, independent — தனித்த மாறி

,, continuous — தொடர் மாறி

,, discrete — தொடர்பிலா மாறி

,, (uni-) — ஒருமாறி

,, (bi-) — இருமாறி

,, (multi-) — பன்மாறி

Variation — மாறுபாடு

,, concomitant of — உடனிகழ் மாறுபாடு

Variation, coefficient of	—	மாற்றக் கெழு
,, seasonal	—	பருவகால மாறுபாடு
,, cyclical	—	சுழல் மாறுபாடு
Variance	—	மாறுபாடு
,, analysis of	—	மாறுபாட்டின் ஆய்வு
Vital statistics	—	பிறப்பிறப்பு விவரங்கள்

W

Wage-payments	—	கூலி செலுத்தின விவரங்கள்
Wholesale prices	—	மொத்த விலைகள்
Wholesale price index	—	மொத்த விலைக் குறியீட்டெண்

Z

Zero-order	—	சுழிப்படி

கலைச்சொல் அகரவரிசை

(தமிழ்-ஆங்கிலம்)

அ

அச்சு — Axis
அடிப்படைக் காலம் — Base period
அடையாளக் குறிகள் — Symbols
அலகு — Unit

ஆ

ஆய்வு — Analysis

இ

இடைவிளைவு — Interaction
இடைவைப்பு — Interpolation
இணக்கக் குறியீடு — Conformity index
இணை சிறப்புநிலை — Goodness of fit
இணைப்பு ஒப்புமைகள் — Link relatives
இணைப்புப் பட்டியல் — Contingency table
'இம்ப்ளிஸிட் டிஃப்ளேடர்' — Implicit deflator
இரண்டாம்நிலை மூலம் — Secondary source
இருமுனைச் சோதனை — Two-tailed test

ஈ

ஈருறுப்புப் பரவல் — Binomial distribution

உ

உடன்தொடர்பு — Correlation
உடன் மாற்றம், உடன் மாறுபாடு — Co-variance
உய்த்துணர்வு — Inference

உற்பத்தி — Product

உற்பத்தித்திறன் — Productivity

எ

எடுகோள் — Hypothesis

ஒ

ஒப்புமை விலை — Relative price

ஒருசிறைத் தொடர்பு — Partial correlation

ஒருபடித்தான நிலை — Homogeneity

ஒருமுனைச் சோதனை — One-tailed test

ஒழுங்கு மாதிரி முறை — Systematic sampling

க

கணக்கிடுதல் — Calculation

கணக்கிடு முறைகள் — Computations

கண்டறிதல் — Observation

கனியீட்டுதல் — Mining

கா

'காம்பர்ட்ஸ்' வளைகோடு — Gompertz curve

காலத்திருப்பச் சோதனை — Time-reversal test

காலத் தொடர்வரிசை — Time series

கி

கிரேக்க அகரவரிசை — Greek Alphabet

கு

குறிப்புச் சுழல்கள் — Reference cycles

குறியீட்டு முறை — Notation

குறியீடு — Index

குறியீட்டெண் — Index number

குறைந்த வர்க்க முறை — Method of least squares

கூ

கூட்டுச் சராசரி — Arithmetic mean

கெ

கெழு — Coefficient

கை

'கை'-வர்க்கம் — Chi-square

கொ

கொத்து மாதிரி முறை — Cluster sampling

ச

சங்கிலிக் குறியீட்டெண் — Chain index
சட்டம் — Frame
சமச்சீரின்மை — Asymmetry
சமமதிப்புக் குறியீடு — Parity index
சராசரி — Average, mean

சா

சார்பு — Bias

சி

சிறப்பான ஸ்தானங்கள் — Significant figures
சிறப்புச் சுழல்கள் — Specific cycles

சு

சுருக்கல் — Deflation
சுழல், சுழற்சி — Cycle
சுழல் ஏற்றவிறக்கங்கள் — Cyclical fluctuations
சுழல் கட்டங்கள் — Cyclical stages
சுழல் தோரணி — Cyclical pattern
சுழல் தோற்றங்கள் — Cyclical phases
சுழல் மாற்றங்கள் — Cyclical changes
சுழற்சி அடிப்படை — Cycle base

சூ

சூனிய எடுகோள் — Null hypothesis
சூழ்நிலை — Regimen

செ

செய்ம்முறைப் பிழைகள்	—	Experimental errors

த

தரப்பிழை	—	Standard error
தரவிலக்கம்	—	Standard variation
தனியான 'தீர்மானம்'	—	Separate determination

தீ

'தீர்மானம்'—வளர்ச்சியான	—	Determination, incremental
'தீர்மான'க் கெழுக்கள்	—	Coefficients of determination

தே

தேனிரும்பு	—	Pig iron

தொ

தொடர்பற்றநிலைச் சோதனை	—	Test of independence
தொடர்புக் குறியீடு	—	Correlation index
தொடர்புக் கெழுவின் படம்	—	Correlogram
தொடர்பு விகிதம்	—	Correlation ratio
தொழிலாளிப் படை	—	Labour force
தொழிற் புள்ளிவிவரங்கள்	—	Labour statistics
தொழில் உற்பத்தி	—	Industrial production
தொழிற் செயல்	—	Industrial activity

தோ

தோரணி	—	Pattern

ந

நகரும் சராசரிகள்	—	Moving averages
நம்பக இடைவெளி	—	Confidence interval
நம்பக எல்லைகள்	—	Confidence limits
நம்பகக் கெழு	—	Confidence coefficient

நா

நாணயமாற்று வீதம்	—	Terms of exchange
'நார்மல்' சமன்பாடுகள்	—	Normal equations

'நார்மல்' பரவல்	—	Normal distribution
'நார்மல்' வளைகோடு	—	Normal curve

நி

நிலைச் சராசரிகள்	—	Positional means
நிறை	—	Weight
நிறைச்சார்பு	—	Weight bias
நிறையிட்ட சராசரி	—	Weighted mean

நீ

நீர்ப்பாசனம்	—	Irrigation

நெ

நெடுங்காலப் போக்கு	—	Secular trend

ப

படுகைகளாகப் பிரித்தல்	—	Stratification
பணமாற்று வழி	—	Terms of exchange
பணவாட்டம்	—	Deflation
பண்ணை விலைக் குறியீடு	—	Farm-price index
பதிலின்மை	—	Non-response
பயன்பாடு	—	Utility
பரப்பு மாதிரி முறை	—	Area sampling
பரவல்	—	Distribution
பருவகாலக் குறியீடு	—	Seasonal index
பருவகாலத் தோரணிகள்	—	Seasonal patterns
பல்தரத் தொடர்பு	—	Multiple correlation

பா

'பாஸ்ச்சே'யின் வாய்பாடு	—	Paasche's formula

பி

பிழை	—	Error
பிழைமாறுபாடு	—	Error variance
பிறழ்ச்சி	—	Shift

பு

புள்ளியியல் — Statistics (Science)
புள்ளியியல் விவரங்கள் — Statistical data

பெ

பெருக்குச் சராசரி — Geometric mean

போ

போக்கு — Trend
போக்குச் சார்பலன் — Trend function

ம

மதிப்பிடு, மதிப்பீடு — Estimate
மதிப்பீடுகளின் திட்பம் — Precision of estimates

மா

மாதிரி — Sample
மாதிரி அலகு — Sampling unit
மாதிரி அளவெடுப்பு — Sample survey
மாதிரித் திட்டம் — Sampling plan
மாதிரிப் பிழை — Sampling error
மாதிரி பின்னம் — Sampling fraction
மாற்றங்கள் — Transformations
மாறி — Variable
மாறிகளின் தொடர்பு — Regression
மாறுபாட்டு ஆய்வு — Analysis of variance
மாறுபாடு — Variance

மி

மின்னியக்கக் கணக்கிடுதல் — Electronic computation

மீ

மீதி — Residual

மு

முதனிலை மூலம் — Primary source
முழுமைத் தொகுதி — Population

மூ

மூலம்	—	Source

மொ

மொத்த அடக்கம்	—	Coverage
மொத்தம்	—	Aggregate
மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்	—	Whole-sale price index number

லா

லாகிருதம்	—	Logarithm
'லாஜிஸ்டிக்' வளைகோடு	—	Logistic curve
'லாஸ்பெய்ரே'யின் வாய்பாடு	—	Laspeyre's formula

வ

வகைச்சார்பு	—	Type bias
வட்டச் சோதனை	—	Circular test
வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி	—	Population, infinite
வரம்புற்ற முழுமைத் தொகுதி	—	Population, finite
வரிசைத் தொடர்பு	—	Serial correlation
வரையற்ற டிகிரிகள் / ,, பாகைகள்	—	Degrees of freedom
வரையுள்ள பெருக்கி	—	Finite multiplier
வளர்ச்சியைக் குறிக்கும் வளைகோடுகள்	—	Growth curves

வா

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீடு	—	Cost of living index

வி

விகிதசமம்	—	Proportion
விகிதம்	—	Ratio
விரிவு காரணி	—	Expansion factor
விலைக் குறியீடுகள்	—	Price indexes
விழுமிய குறியீடு	—	Ideal index
விலை ஒப்புமைகள்	—	Price relatives

வீ

வீச்சு	—	Amplitude

வே

வேலைத்தாள்	—	Worksheet

ரா

ராண்டம் (இயைபிலா)	—	Random
,, எண்கள்	—	Random numbers
,, மாதிரி முறை	—	,, sampling
,, தன்மை	—	Randomness

ரெ

ரெஸிப்ரோக்கல்கள்	—	Reciprocals

ஹா

ஹார்மோனிக் சராசரி	—	Harmonic mean

பொருட்குறிப்பு அகராதி

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை - 9.

1965வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

*1.	பொருளாதாரம் - II	சி. வேலாயுதம்	9—00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12—00
3.	பொருளாதாரம்-ஓர் அறிமுகம் - I	தி. சி. மோகன்	12—05
4.	பொருளாதாரம்-ஓர் அறிமுகம் - II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10—70
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7—00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும் - II	சி. வேலாயுதம்	11—50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7—50
*8.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5—50
*9.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4—75
10.	இந்தியப் பொருளியல் - I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10—00
11.	இந்தியப் பொருளியல் - II	எம். லூர்துநாதன்	4—25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை - I	சி. சுந்தரராஜன்	10—75
13.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை - II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10—50
14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு - I	ஈ. சீ. இராமசாமி	6—00
15.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு - II	,,	6—00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5—00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு - I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11—00
18.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம் - I	மா. குமாரசாமி	10—00
19.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி - I	தே. வேலப்பன்	10—00

* மூல நூல் (Original book)

20.	பணம்-சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10—00
*21.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9—50
22.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில் வாணிபப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11—00

வரலாறு

*23.	பிரிட்டன் வரலாறு - I	கி. ர. அனுமந்தன்	10—00
*24.	பிரிட்டன் வரலாறு - II	,,	9—75
*25.	ஐரோப்பிய வரலாறு - I	டி. வி. சொக்கப்பா	4—50
26.	ஐரோப்பா-கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15—00
27.	இங்கிலாந்து வரலாறு - I	இரா. அண்ணுமலை	13—00
28.	இங்கிலாந்து வரலாறு - II	பா. மாணிக்கவேலு	13—00
29.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு - I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15—00
30.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு - I	தி. வெ. குப்புசாமி	7—50

அரசியல்

*31.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4—70
32.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8—50
33.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8—50
34.	பன்னுட்டு அரசியல் - I	திருமதி நூர்ஜஹான்பாவா	16—00
35.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல் - I	வீ. கண்ணையா	9—00
36.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல் - II	அ. ஜெகதீசன்	7—25

உளவியல்

37.	குழந்தை உளவியல் - I	கி. ச. அப்புள்ளாச்சாரி	8—00
38.	குழந்தை உளவியல் - II	,,	7—00

39.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7—00
40.	இளையோர் உளவியல் - I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12—00
41.	இளையோர் உளவியல் - II	,,	9—00
42.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9—25
43.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11—00
44.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3—00
தத்துவம்			
45.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5—50
அறவியல்			
46.	அறவியல்-ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8—50
அளவை யியல்			
47.	அளவை இயல்-தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2—50
மானிடவியல்			
48.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4—75
49.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியன்	5—50
சமூகவியல்			
50.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜெ. நாராயணன்	10—00
புவியியல்			
*51.	ஆசியா - I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9—50
*52.	ஆசியா - II	,,	8—75
*53.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8—50
*54.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8—25

* மூல நூல் (Original book)

